MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. Felix Klein
zu Göttingen.

Prof. Walther Dyck
zu München.

Prof. Adolph Mayer
zu Leipzig.

XXXIX. Band.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.

Inhalt des neununddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Die grundlegende Bedeutung des vorliegenden Themas für die Riemann'sche Theorie der algebraischen Functionen brauche ich wohl kaum hervorzuheben. Geht doch diese Theorie von der graphisch über der complexen Zahlenebene construirten Riemann'schen Fläche aus, um erst sodann die Functionen, welche durch diese Fläche bestimmt sind, zu untersuchen.

Auch ist die hier behandelte Aufgabe in den an Riemann anknüpfenden Arbeiten vielfach theils gestreift, theils — freilich in sehr speciellen Fällen — eingehend untersucht worden. Vor allen habe ich hier die Arbeiten von J. Thomae zu nennen, insbesondere die im 75sten Bande von Crelle's Journal veröffentlichte Abhandlung: „Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen", in welcher ausführlich erörtert wird, dass dieselbe Riemann'sche Fläche durch Abänderung der Verzweigungsschnitte in die verschiedensten Gestalten gebracht werden kann und dass bei einem Umlauf eines der Verzweigungspunkte die Fläche möglicher Weise in eine wesentlich verschiedene Fläche übergeht. Den speciellen Fall der dreiblättrigen Flächen behandelt die Dissertation von H. Kasten (Göttingen 1876). Hier wird die Anzahl der wesentlich verschiedenen dreiblättrigen Flächen mit n gegebenen Verzweigungspunkten auf $\frac{1}{2}(3^{n-2}-1)$ bestimmt, wobei der Verfasser diese Zahl indessen seltsamer Weise nur für eine obere Grenze der zu bestimmenden Anzahl hält.

Sodann habe ich die Arbeiten von F. Klein über die Transformation der elliptischen Functionen*), die sich hieran anschliessenden Abhandlungen von W. Dyck über die Aufstellung und Untersuchung

*) Vgl. insbesondere: „Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen", Mathem. Annalen, Bd. 15, pag. 533 ff.

von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen*) zu erwähnen, sowie die Schrift von F. Klein: „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" (Leipzig 1882), in welcher auf pag. 64 die Aufgabe, alle Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungsstellen zu bestimmen, berührt wird.

Weiter mir bekannt gewordene Arbeiten, welche das vorliegende Thema berühren oder in mehr oder minder nahem Zusammenhange mit demselben stehen, sind die folgenden:

J. Lüroth: „Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche". Mathem. Annalen Bd. 4.

A. Clebsch: „Zur Theorie der Riemann'schen Flächen". ib. Bd. 6.

A. Kneser: „Zur Theorie der algebraischen Functionen". ib. Bd. 29.**)

D. Hilbert: „Ueber binäre Formen mit vorgeschriebener Discriminante". ib. Bd. 31.

L. Schlesinger: „Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen". Crelle's Journal, Bd. 105.***)

Wenn nun so auch die Aufgabe:

Die Gesammtheit der n blättrigen Riemann'schen Flächen zu untersuchen, welche an w gegebenen Stellen in vorgeschriebener Weise verzweigt sind,

vielfach gestreift wurde, so scheint dieselbe bislang doch noch nicht in ihrer Allgemeinheit behandelt zu sein. Dem entsprechend dürften die meisten Resultate, zu welchen ich gelangt bin, neu sein. Indem ich mich zu der Darlegung dieser Resultate wende, muss ich indessen zuvor die Nachsicht des Lesers erbitten. Denn obgleich ich mich seit längerer Zeit sehr eingehend mit dem Gegenstande beschäftigt habe, ist es mir doch nicht gelungen, die Fragen, welche sich darboten, in jedem Falle zu dem wünschenswerthen Abschluss zu bringen. Die Fragen, auf welche ich besonders mein Augenmerk gerichtet habe, sind die folgenden:

I) Welches ist die Anzahl N der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche an w gegebenen Stellen verzweigt sind?

II) Welches ist die Gruppe der algebraischen Gleichung N^{ten} Grades, von welcher die Bestimmung jener Flächen abhängt?

---

*) Inaugural-Dissertation, München 1879 und Mathem. Annalen, Bd. 17 pag. 473 ff.

**) Vgl. den Excurs auf pag. 180.

***) Vgl. pag. 185 und pag. 194. Die hier aufgestellten Behauptungen sind indessen unrichtig, soweit ihnen die Annahme zu Grunde liegt, dass die vom Verfasser betrachteten Riemann'schen Flächen durch die Verzweigungspunkte eindeutig bestimmt seien.

III) Wie viele Wurzeln dieser Gleichung sind reell, wie viele paarweise conjugirt imaginär, wenn man annimmt, dass die w gegebenen Verzweigungswerthe theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär sind?

IV) Welches sind in den niedrigsten Fällen die algebraischen Functionen, welche die N Riemann'schen Flächen definiren?

Die näheren Bestimmungen für diese zum Theil an sich nicht völlig bestimmten Fragen werde ich im Folgenden an den geeigneten Stellen hinzufügen. Diesen Fragen entsprechen der Reihe nach die ersten vier Abschnitte der Abhandlung. In dem fünften Abschnitte bespreche ich in aller Kürze eine naheliegende Verallgemeinerung des vorliegenden Problemes.

I. Abschnitt.

Anzahlbestimmungen.

§ 1.

Einführung der Riemann'schen Fläche.

Für meine Untersuchungen war es wesentlich, die Riemann'sche Fläche als ein rein topologisch erklärtes Gebilde, also ganz unabhängig von den auf ihr verlaufenden Functionen, aufzufassen. Dieser Auffassung entsprechend sind also die Lösungen des Problemes, die Riemann'schen Flächen zu bestimmen, welche gegebene Verzweigungswerthe besitzen, topologische Gebilde und keine Zahlenwerthe. Sie gehen erst in solche über, wenn an Stelle der Flächen solche Zahlenwerthe als Unbekannte eingeführt werden, welche die einzelne Fläche vollständig charakterisiren. Die Erklärung der n-blättrigen Riemann'schen Fläche, welche an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ der complexen Zahlenebene E verzweigt ist, stelle ich nun so:

Man ziehe in der Ebene E von irgend einem Punkte O aus nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ die Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_w,$$

welche weder sich selber noch einander (ausser im Punkte O) treffen. Längs dieser Linien schlitze man die Ebene E auf, wodurch die Ebene E in die Ebene E^* übergehen möge. Die Ebene E^* wird von den $2w$ Ufern der ausgeführten Schnitte begrenzt. Die Aufeinanderfolge der Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ sei derart gewählt, dass man bei einem negativen Umlauf um den Punkt O die Ufer in der Reihenfolge

$$l_1^+ l_1^- l_2^+ l_2^- \ldots l_w^+ l_w^-$$

überschreitet.*)

Man lege nun n Exemplare der Ebene E^* auf einander und bezeichne dieselben in irgend einer Reihenfolge als 1stes, 2tes, ..., $n$tes Blatt. Die Riemann'sche Fläche entsteht jetzt, indem man die n Blätter längs der Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_w$ in folgender Weise mit einander verbindet. Jeder der Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_w$$

ordne man je eine mit n Elementen gebildete Substitution

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

zu. Ist nun z. B.

$$S_k = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix},$$

so verbinde man längs des Schnittes l_k die positiven Ufer der Blätter $1, 2, \ldots, n$ bezüglich mit den negativen Ufern der Blätter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so dass man bei einem positiven Umlauf um den Punkt a_k allgemein aus dem Blatte i in das Blatt α_i gelangt.

Die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, welche man zur Herstellung der Fläche wählt, sollen nur folgenden beiden Bedingungen genügen:

I) Vermöge der Substitutionen soll ein Uebergang von jedem Element zu jedem andern möglich sein.

II) Die Zusammensetzung aller Substitutionen soll die Identität ergeben, es soll also

$$S_1 S_2 \ldots S_w = 1$$

sein.

Die erste Bedingung, welche auch dahin ausgesprochen werden kann, dass die aus $S_1, S_2, \ldots, S_w$ erzeugte Gruppe transitiv sein soll, hat zur Folge, dass die construirte Fläche in sich zusammenhängt. Zufolge der zweiten Bedingung wird bei einem Umlauf um den Punkt O keine Vertauschung der Blätter eintreten.

Wie man sieht, ist nach der hier gegebenen Erklärung eine Riemann'sche Fläche vollständig bestimmt, wenn wir angeben:

1) Die „Verzweigungspunkte" $a_1, a_2, \ldots, a_w$.

2) Den Punkt O und die von ihm ausgehenden Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$.

3) Die Numerirung der n Blätter E^*.

4) Die den Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ zugeordneten Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$.

---

*) Bei Ausführung eines Schnittes wird das zur Linken liegende Ufer des Schnittes als das positive bezeichnet. Ferner heisst ein im Sinne des Uhrzeigers erfolgender Umlauf um einen Punkt ein „negativer" Umlauf.

§ 2.

Vergleich Riemann'scher Flächen. Zuordnung der Flächen zu Substitutionssystemen.

Wir betrachten jetzt zwei Riemann'sche Flächen F und F', von welchen wir nur voraussetzen wollen, dass sie in den Bestimmungsstücken 1) übereinstimmen, dass sie also dieselben Verzweigungspunkte besitzen. Wir nehmen in der Ebene E einen von diesen Verzweigungspunkten verschiedenen Punkt A an und betrachten die in A beginnenden und endigenden Wege W, welche durch keinen der Verzweigungspunkte hindurchlaufen.

Wenn sich nun die Blätter der beiden Flächen F und F' so numeriren lassen, dass auf jedem Wege W die Blätter der einen Fläche genau dieselbe Vertauschung erfahren, wie die Blätter der anderen Fläche, so sollen die beiden Flächen als nicht verschieden angesehen werden. Im andern Falle gelten die beiden Flächen als verschieden.

Man zeigt leicht, dass zwei Flächen, welche sich nach dieser Festsetzung als nicht verschieden erweisen, sich auch dann als nicht verschieden herausstellen, wenn man an Stelle des Punktes A irgend einen andern Punkt B setzt. Ferner erhellt aus unserer Festsetzung, dass man schon alle verschiedenen Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ erhalten wird, wenn man von den Bestimmungsstücken 1), 2), 3), 4) nur die letzten, also die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$ auf alle möglichen Weisen wählt, die übrigen Bestimmungsstücke aber ein für alle Mal fest lässt.

Somit werden wir jede Riemann'sche Fläche mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ erhalten, wenn wir alle Systeme von w Substitutionen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

aufstellen, welche den Bedingungen I) und II) genügen.

Zwei verschiedenen derartigen Systemen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w,$$

und

$$S_1', S_2', \ldots, S_w'$$

wird nun offenbar dann und nur dann dieselbe Riemann'sche Fläche entsprechen, wenn die Systeme in einander transformirbar sind; d. h., wenn es eine Substitution T giebt, so dass

$$S_1 = TS_1'T^{-1}, \quad S_2 = TS_2'T^{-1}, \ldots, S_w = TS_w'T^{-1}$$

ist. Denn nur in diesem Falle kann man durch eine geeignete Numerirung der Blätter erreichen, dass auf jedem durch O gelegten geschlossenen Wege die Blätter der beiden Flächen die gleiche Ver-

tauschung erfahren. Wir fassen diese Erörterungen in folgenden Satz zusammen:

Hat man die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ *festgelegt, welche von irgend einem Punkte O aus nach den Punkten* $a_1, a_2, \ldots, a_w$ *führen, so sind die Riemann'schen Flächen mit den Verzweigungspunkten* $a_1, a_2, \ldots, a_w$ *eindeutig zugeordnet den Systemen von w Substitutionen*

$$S_1, S_2, \ldots, S_w,$$

welche den Bedingungen I) und II) von § 1 *genügen, wobei indessen zwei Systeme die in einander transformirbar sind, als nicht verschieden gelten.*

In der Folge werde ich die einzelne Fläche F durch das zugehörige System von Substitutionen bezeichnen, also

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

setzen. Wenn es jedoch darauf ankommen sollte, die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ in die Bezeichnung aufzunehmen, so werde ich

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix}$$

schreiben. Nach dem Vorhergehenden ist die Fläche

$$(S_1', S_2', \ldots, S_w')$$

dann und nur dann dieselbe, wie die Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_w),$$

wenn es eine den Gleichungen

$$S_1' = TS_1T^{-1}, \quad S_2' = TS_2T^{-1}, \ldots, S_w' = TS_wT^{-1}$$

genügende Substitution T giebt.

Wir betrachten irgend eine n-blättrige Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Offenbar ergiebt die Substitution S_i sofort die „Art" der Verzweigung in dem Punkte a_i, d. h. die Substitution lässt ohne Weiteres erkennen, zu wie viel Cyklen sich die Blätter in a_i gruppiren und wie viele Blätter der einzelne Cyklus verbindet. Z. B. wird der Punkt a_i stets und nur dann ein einfacher Verzweigungspunkt sein, wenn die Substitution S_i eine Transposition ist. Stellen wir uns also die Aufgabe, alle Flächen herzustellen, welche in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in vorgeschriebener Weise verzweigt sind, so müssen wir alle den Bedingungen I) und II) genügenden Systeme von w Substitutionen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w$$

aufsuchen, wobei für jede einzelne Substitution noch die Zahl der Cyklen und die Zahl der in den einzelnen Cyklen enthaltenen Elemente

vorgeschrieben ist. Sollen wir z. B. alle Flächen bestimmen, welche an w Punkten einfach verzweigt sind, so haben wir alle Systeme von w Transpositionen

$$t_1, t_2, \ldots, t_w$$

aufzustellen, welche den Bedingungen I) und II) von § 1 genügen.

Auf diesen Fall, wo die gegebenen Verzweigungspunkte sämmtlich einfach sein sollen, wollen wir zunächst unsere Aufmerksamkeit richten, und zwar soll es sich dabei um die Bestimmung der Anzahl dieser Flächen handeln. Nach dem Vorausgeschickten können wir sagen:

„Die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten stimmt überein mit der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad t_1 t_2 \ldots t_w = 1$$

durch w Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$, welche mit n Elementen gebildet sind und einen Uebergang von jedem Elemente zu jedem andern gestatten."

Dabei sind zwei Lösungen der Gleichung (1), welche in einander transformirbar sind, als nicht verschieden zu erachten.

§ 3.

Anzahl der Darstellungen einer Substitution durch ein Product von w Transpositionen.

Die Zahl der Lösungen der Gleichung (1) in ihrer Abhängigkeit von n und w zu bestimmen, ist eine Aufgabe von grosser Complication und es ist mir erst nach vielen vergeblichen Versuchen gelungen, ein einigermassen befriedigendes Resultat zu erhalten. Zunächst beschäftige ich mich mit der folgenden Aufgabe, welche vielleicht schon an sich ein Interesse darbietet:

Man soll angeben, auf wie viele Weisen bei n Elementen eine gegebene Substitution S als ein Product von w Transpositionen dargestellt werden kann.

Die gesuchte Anzahl möge mit

$$[S]_w$$

bezeichnet werden. Allgemeiner wollen wir, falls Σ ein System von irgend welchen Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ bezeichnet, unter

$$[\Sigma]_w$$

nichts Anderes als die Summe

$$[S_1]_w + [S_2]_w + \cdots + [S_k]_w$$

verstehen. Hiernach bedeutet $[\Sigma]_w$ die Anzahl der verschiedenen

Transpositionssysteme $t_1, t_2, \ldots, t_w$, welche der Bedingung genügen, dass das Product

$$t_1 t_2 \ldots t_w$$

in dem Systeme Σ vorkommt. Wir bemerken sogleich, dass diese Anzahl folgende Eigenschaften besitzt:

Erstens ist:

$$(1) \qquad [\Sigma]_w = [T^{-1}\Sigma T]_w,$$

wenn T eine beliebig gewählte Substitution und $T^{-1}\Sigma T$ dasjenige System von Substitutionen bezeichnet, welches aus Σ durch Transformation jeder einzelnen Substitution mit T entsteht.

Zweitens ist, wenn

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\varrho$$

die in irgend einer Reihenfolge genommenen $\varrho = \frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen bedeuten,

$$(2) \qquad [\Sigma]_w = [\Sigma\tau_1]_{w-1} + [\Sigma\tau_2]_{w-1} + \cdots + [\Sigma\tau_\varrho]_{w-1},$$

unter $\Sigma\tau_i$ dasjenige System von Substitutionen verstanden, welches aus Σ durch Multiplication jeder einzelnen Substitution mit τ_i hervorgeht. Wir betrachten jetzt ein besonderes System Σ, welches auf folgende Weise gebildet wird. Wir zerlegen die Zahl n in eine Summe von r positiven Zahlen:

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r,$$

die wir der Grösse nach ordnen, so dass also

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \cdots \geqq \nu_r > 0$$

ist. Dieser Zerlegung entsprechend theilen wir die n Elemente, mit welchen wir die Substitutionen bilden, irgendwie in r Gruppen:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1}; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2}; \ldots; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_r},$$

von denen die erste ν_1, die zweite $\nu_2, \ldots$ die letzte ν_r Elemente enthält.

Wir bezeichnen ferner mit

$$\Gamma_1 = \Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1})$$

das System aller $\nu_1!$ Substitutionen, welche mit den Elementen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_1}$$

gebildet werden können. Dabei soll dieses System aus der einen identischen Substitution bestehen, wenn $\nu_1 = 1$ ist. Die entsprechende Bedeutung besitze jedes der Zeichen

$$\Gamma_2 = \Gamma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_2}), \ldots, \Gamma_r = \Gamma(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_r}).$$

Endlich bezeichne S irgend eine der $n!$ Substitutionen, welche mit allen n Elementen gebildet werden können.

Das System Σ, welches wir betrachten, sei nun das System der $\nu_1!\ \nu_2!\ \ldots\ \nu_r!$ Substitutionen

$$(S\Gamma_1\Gamma_2\ \ldots\ \Gamma_r);$$

zur Abkürzung wollen wir sagen, das System $(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r)$ und die Zahl $[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w$ „gehöre" zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ der Zahl n.

Es ist nun nach (2):

$$(3)\quad [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r\tau_1]_{w-1} + \cdots + [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r\tau_\varrho]_{w-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich zweckmässig umformen.

Nehmen wir nämlich zunächst eine Transposition τ, welche mit zwei Elementen α, oder mit zwei Elementen $\beta, \ldots$, oder mit zwei Elementen λ gebildet ist, so wird offenbar das System

$$(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r\tau)$$

genau dieselben Substitutionen enthalten, wie das System

$$(S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r).$$

Diese Transpositionen τ liefern also auf der rechten Seite von (3) den Beitrag

$$\left[\binom{\nu_1}{2} + \binom{\nu_2}{2} + \cdots + \binom{\nu_r}{2}\right]\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1},$$

wo in üblicher Weise $\binom{\nu_1}{2}, \ldots$ für $\frac{\nu_1(\nu_1-2)}{2}, \ldots$ geschrieben ist.

Nehmen wir weiter diejenigen Glieder der rechten Seite von (3), welche den Transpositionen

$$\tau' = (\alpha_1\beta_1),\quad \tau'' = (\alpha_2\beta_1),\ \ldots,\ \tau^{(\nu_1)} = (\alpha_{\nu_1}, \beta_1)$$

entsprechen, so geben diese zusammen den Beitrag

$$[S\Gamma_2\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}, \beta_1)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_r]_{w-1} - [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1},$$

da die Substitutionen

$$\Gamma_1\tau',\ \Gamma_1\tau'',\ \ldots,\ \Gamma_1\tau^{(\nu_1)}$$

zusammen das System $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1}, \beta_1)$ vermindert um das System $\Gamma_1 = \Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_1})$ ausmachen. Die Transpositionen vom Typus $(\alpha\beta)$ liefern hiernach auf der rechten Seite von (3) den Beitrag:

$$\sum_1^{\nu_2}{}_i\,[S\Gamma_2\Gamma(\alpha_1\ldots\alpha_{\nu_r}, \beta_i)\,\Gamma_3\ldots\Gamma_{\nu_r}]_{w-1} - \nu_2[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}.$$

Ebenso formen wir den Beitrag um, welchen die Transpositionen vom Typus

$$(\alpha\gamma), \ldots, (\alpha\lambda);\quad (\beta\gamma), \ldots, (\beta\lambda), \ldots$$

bez. liefern und erhalten auf diese Weise:

$$(4)\quad [S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = f\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}$$

$$+\sum_1^{\nu_2}{}^i[S\Gamma_2\Gamma(\alpha,\beta_i)\Gamma_3\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\sum_1^{\nu_3}{}^i[S\Gamma_3\Gamma(\alpha,\gamma_i)\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\cdots+\sum_1^{\nu_r}{}^i[S\Gamma_r\Gamma(\alpha,\lambda_i)\ldots\Gamma_{r-1}]_{w-1}$$

$$+\sum_1^{\nu_3}{}^i[S\Gamma_3\Gamma(\beta,\gamma_i)\Gamma_1\ldots\Gamma_r]_{w-1}+\cdots+\sum_1^{\nu_r}{}^i[S\Gamma_r\Gamma(\beta,\lambda_i)\Gamma_1\ldots\Gamma_{r-1}]_{w-1}$$

$$+\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$+\sum_1^{\nu_r}{}^i[S\Gamma_r\Gamma(s,\lambda_i)\Gamma_1\ldots\Gamma_{r-2}]_{w-1},$$

wobei der Factor f den Werth

$$(5)\quad f=\binom{\nu_1}{2}+\binom{\nu_2}{2}+\cdots+\binom{\nu_r}{2}-(\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+\cdots+r\nu_r)+n$$

besitzt. Die Bedeutung der übrigen auf der rechten Seite von (4) benutzten Zeichen bedarf wohl keiner näheren Erläuterung.

Von der Zahl f wollen wir sagen, sie „gehöre" zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ der Zahl n.

Die einzelnen auf der rechten Seite von (4) unter den Summenzeichen auftretenden Systeme lassen sich nun, wie folgt, zerlegen. Betrachten wir z. B. das System

$$(S\Gamma_2\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r),$$

so können wir dasselbe aus folgenden Systemen zusammensetzen:

$$\big(S\Gamma(\beta_2,\ldots,\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r\big),$$

$$\big(S(\beta_1\beta_2).\Gamma(\beta_2\ldots\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r\big),\ldots,\big(S(\beta_1\beta_{\nu_2}).\Gamma(\beta_2\ldots\beta_{\nu_2})\Gamma(\alpha,\beta_1)\Gamma_3\ldots\Gamma_r\big),$$

von denen jedes einzelne zu der Zerlegung $(\nu_1+1, \nu_2-1, \nu_3, \ldots, \nu_r)$ von n gehört.

Indem wir in entsprechender Weise alle auf der rechten Seite von (4) unter den Summenzeichen auftretenden Systeme zerlegen, erkennen wir, dass wir auf der rechten Seite von (4) eine Summe von Zahlen erhalten, welche bez. zu folgenden Zerlegungen von n gehören:

$$\nu_1+1, \nu_2-1, \nu_3, \ldots, \nu_r;\ \nu_1+1, \nu_2, \nu_3-1, \ldots, \nu_r;\ \ldots;\ \nu_1+1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_r-1;$$

$$\nu_1, \nu_2+1, \nu_3-1, \ldots, \nu_r;\ \ldots;\ \nu_1, \nu_2+1, \nu_3, \ldots, \nu_r-1;$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{r-1}+1, \nu_r-1.$$

Diese Zerlegungen mögen zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ benachbart heissen. Man zeigt nun ohne Schwierigkeit, dass die Zahl f, welche zu der Zerlegung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gehört, kleiner ist als die entsprechende Zahl gebildet für irgend eine benachbarte Zerlegung. Wenn wir also mit

$$f_1', f_2', \ldots$$

die Zahlen bezeichnen, welche zu den benachbarten Zerlegungen von $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gehören; ferner mit

$$f_1'', f_2'', \ldots$$

diejenigen Zahlen, welche zu den benachbarten der benachbarten gehören, u. s. f., so wird f kleiner sein als jede dieser Zahlen $f_1', f_2', \ldots, f_1'', f_2'', \ldots$.

Hieraus gelingt es nun zu schliessen, dass

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = cf^w + c_1'(f_1')^w + c_2'(f_2')^w + \cdots + c_1''(f_1'')^w + c_2''(f_2'')^w + \cdots$$

ist, wo $c, c_1', c_2', \ldots, c_1'', c_2'', \ldots$ von w unabhängige rationale Zahlen bedeuten. Wir nehmen an, dies sei schon für alle zu $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ benachbarte Zerlegungen bewiesen. Dann ist nach Gleichung (4):

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = f\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_{w-1} + \sum_{i,k} d_{i,k}(f_i^{(k)})^{w-1},$$

wo die Coefficienten $d_{i,k}$ von w unabhängige rationale Zahlen bedeuten.

Setzen wir in dieser Gleichung nach und nach

$$w = 1, 2, 3, \ldots, w$$

und combiniren alle so erhaltenen Gleichungen, so finden wir

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = f^w\cdot[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_0 + \sum_{i,k} d_{i,k}\left(f^{w-1} + f^{w-2}f_i^{(k)} + \cdots + (f_i^{(k)})^{w-1}\right).$$

Die Summe auf der rechten Seite lässt sich, da f von jeder der Zahlen $f_i^{(k)}$ verschieden ist, in die Gestalt setzen:

$$\sum_{i,k}\frac{d_{i,k}}{f - f_i^{(k)}}\,[f^w - (f_i^{(k)})^w]$$

und wir erhalten daher

$$[S\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_r]_w = cf^w + c_1'(f_1')^w + c_2'(f_2')^w + \cdots,$$

wo $c, c_1', c_2', \ldots$ von w unabhängige rationale Zahlen bezeichnen.

Zur Vollendung des Beweises ist noch zu zeigen, dass wir bei fortgesetzter Bildung der benachbarten Zerlegungen schliesslich auf eine Zerlegung kommen, für welche der zu beweisende Satz gilt.

Nun wird bei dem Uebergang von $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ zu einer benachbarten Zerlegung eine der r Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ um eine

Einheit vergrössert. Folglich muss man schliesslich stets zu der Zerlegung, bei welcher $r = 1$ und

$$\nu_1 = n$$

ist, gelangen, welch' letztere Zerlegung keine benachbarte mehr besitzt. Für diese Zerlegung ist

$$f = \varrho = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

und das entsprechende System $(S\Gamma_1)$ besteht aus allen $n!$ Substitutionen. Da nun jede der f^w Combinationen

$$t_1 t_2 \dots t_w$$

von w Transpositionen zum Systeme $(S\Gamma_1)$ gehört, so ist in diesem Falle

$$[S\Gamma_1]_w = f^w,$$

womit der Beweis vollendet ist.

Wir wenden jetzt das erhaltene Resultat auf die Zerlegung

$$n = 1 + 1 + \dots + 1 \quad (r = n, \ \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = 1)$$

an. Hier besteht das System $[S\Gamma_1\Gamma_2 \dots \Gamma_n]$ aus der einen Substitution S; und die Anzahl $[S\Gamma_1\Gamma_2 \dots \Gamma_n]_w$ bedeutet also die Zahl der Darstellungen von S als Product von w Transpositionen.

Somit finden wir den folgenden Satz, welcher die oben gestellte Aufgabe bis zu einem gewissen Punkte erledigt:

Die Anzahl der Darstellungen einer mit n Elementen gebildeten Substitution S als Product von w Transpositionen ist gleich

$$c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + \dots + c_k f_k^w,$$

wo die Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_k$, $f_1, f_2, \dots, f_k$ *von w nicht abhängen. Die Coefficienten* $c_1, c_2, \dots, c_k$ *sind rationale von der Substitution S und der Zahl n abhängende Zahlen. Dagegen sind* $f_1, f_2, \dots, f_k$ *ganze Zahlen, welche ausschliesslich von n abhängen und folgendermassen gebildet werden. Man zerlegt n auf alle möglichen Weisen in positive ganzzahlige Summanden*

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r,$$

wobei $\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \dots \geqq \nu_r > 0$ *vorausgesetzt wird und setzt*

$$f = \frac{\nu_1(\nu_1 - 1)}{2} + \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2} + \dots + \frac{\nu_r(\nu_r - 1)}{2}$$
$$- (\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + r\nu_r) + n.$$

Die auf diese Weise entstehenden Zahlen f sind gerade die oben mit $f_1, f_2, \dots, f_k$ *bezeichneten Zahlen.*

Die Abhängigkeit der Coefficienten $c_1, c_2, \dots, c_k$ von n und der Substitution S näher zu charakterisiren, ist mir nicht gelungen, obgleich

meine dahin zielenden Bemühungen die Existenz eines einfachen Bildungsgesetzes für jene Coefficienten haben vermuthen lassen.

Man zeigt leicht, dass von den Zahlen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ je zwei einander entgegengesetzt gleich sind (nachdem man diejenigen, welche Null sind, ausgesondert hat).

Dieser Umstand lässt sich auch aus dem bekannten Satze erschliessen, dass eine gegebene Substitution S entweder nur durch eine gerade oder nur durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen darstellbar ist.

§ 4.

Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten.

Wir bezeichnen mit

$$f(w|n)$$

die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$t_1 t_2 \ldots t_w = 1 \tag{1}$$

durch w mit n Elementen gebildete Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$.

Diese Anzahl stellt sich nach dem vorigen Paragraphen dar in der Form:

$$f(w|n) = c_1(n) \cdot [f_1(n)]^w + c_2(n) \cdot [f_2(n)]^w + \cdots + c_k(n) \cdot [f_k(n)]^w, \tag{2}$$

oder kürzer:

$$f(w|n) = \sum c(n) \cdot [f(n)]^w, \tag{2'}$$

wobei wir die nur von n abhängenden Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \quad f_1, f_2, \ldots, f_k$$

grösserer Deutlichkeit halber mit

$$c_1(n), c_2(n), \ldots, c_k(n), \quad f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)$$

bezeichnet haben. Es möge nun ferner

$$\varphi(w|n)$$

die Anzahl der Transpositionssysteme $t_1, t_2, \ldots, t_w$ bedeuten, welche der Gleichung (1) genügen und zugleich einen Uebergang von jedem der n Elemente zu jedem anderen gestatten. Nach dem Schluss von § 2 ist dann

$$N = \frac{\varphi(w|n)}{n!}$$

die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten, wenn wir den trivialen Fall $n = 2$, in welchem

$$N = 2 \cdot \frac{\varphi(w|n)}{n!} = 1$$

ist, ausschliessen. Denn sobald $n > 2$ ist, vertheilen sich die $\varphi(w|n)$ Transpositionssysteme $t_1, t_2, \ldots, t_w$ in Gruppen von je $n!$ in einander transformirbare Systeme und die $n!$ Systeme einer Gruppe liefern alle ein und dieselbe Riemann'sche Fläche.

Wir wollen nun die Zahl $\varphi(w|n)$ durch die uns schon bekannte Zahl $f(w|n)$ ausdrücken.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Zahl $f(w|n)$ in Summanden, indem wir die $f(w|n)$ Systeme $t_1 t_2 \ldots t_w$ in Classen eintheilen. Wir sondern nämlich die n Elemente auf irgend eine Weise in Gruppen

$$G = a_1, \ldots, a_{n_0}, \quad G_1 = b_1, \ldots, b_{n_1},$$
$$G_2 = c_1, \ldots, c_{n_2}, \ \ldots, \ G_r = l_1, \ldots, l_{n_r}$$

von bez. $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_r$ Elementen, wobei also

$$n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

ist, und ordnen den Gruppen $G_1, G_2, \ldots, G_r$ bez. irgend r positive ganze Zahlen $w_1, w_2, \ldots, w_r$ zu, welche der Bedingung

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w$$

genügen. Die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ sollen sämmtlich grösser als 1, die Zahl $n_0 \geqq 0$ sein. In eine Classe rechnen wir jetzt alle diejenigen der $f(w|n)$ Systeme $(t_1 t_2 \ldots t_w)$, welche die Elemente $a_1, \ldots, a_{n_0}$ überhaupt nicht enthalten, während w_1 der Transpositionen $t_1, \ldots, t_w$ die Elemente $b_1, \ldots, b_{n_1}$ in Verbindung setzen, w_2 der Transpositionen die Elemente $c_1, \ldots, c_{n_2}$ u. s. w. w_r der Transpositionen die Elemente $l_1, \ldots, l_{n_r}$.

Die Anzahl der in einer Classe enthaltenen Systeme von Transpositionen $(t_1, t_2, \ldots, t_w)$ beträgt, wie man leicht erkennt:

$$\frac{w!}{w_1!\, w_2! \ldots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1) \,.\, \varphi(w_2|n_2) \ldots \varphi(w_r|n_r).$$

Indem man jetzt über alle Classen summirt, erhält man:

$$(3) \quad f(w|n) = \sum \frac{n!}{r!\, n_0!\, n_1! \ldots n_r!} \cdot \frac{w!}{w_1!\, w_2! \ldots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \ldots \varphi(w_r|n_r),$$

wobei die Summation über alle Lösungen der Gleichungen

$$(4) \quad \left\{\begin{array}{l} n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n, \\ \qquad w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w, \\ \qquad\qquad \left(\begin{array}{l} n_0 \geqq 0, \ n_1 > 1, \ n_2 > 1, \ldots, n_r > 1; \ r > 0; \\ \qquad w_1 > 0, \ w_2 > 0, \ldots, w_r > 0. \end{array}\right) \end{array}\right.$$

zu erstrecken ist.

Die Functionalgleichung (3) lässt sich nun umkehren. Und zwar findet man:

$$(5)\quad \varphi(w|n) = \sum (-1)^{r+n_0-1} r^{n_0-1} \cdot \frac{n!}{n_0!\, n_1! \ldots n_r!} \frac{w!}{w_1!\, w_2! \ldots w_r!} f(w_1|n_1) f(w_2|n_2) \ldots f(w_r|n_r),$$

wobei die Summation ebenfalls über die Lösungen der Gleichungen (4) zu erstrecken ist. Wir setzen nun für $f(w_1|n_1), \ldots, f(w_r|n_r)$ ihre Ausdrücke nach Gleichung (2′) und summiren sodann nach $w_1, w_2, \ldots, w_r$, wobei $r, n_0, n_1, \ldots, n_r$ fest bleiben. Bei der Ausführung dieser Summation ist zu beachten, dass $w_1, w_2, \ldots, w_r$ der Bedingung $w_1 > 0$, $w_2 > 0, \ldots, w_r > 0$ und $w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w$ unterworfen sind, und man hat die leicht zu erhärtende Identität

$$\sum \frac{w!}{w_1!\, w_2! \ldots w_r!} x_1^{w_1} x_2^{w_2} \ldots x_r^{w_r} = s^w - \sum_i (s - x_i)^w + \sum_{i,k} (s - x_i - x_k)^w - + \cdots$$

zu beachten, wo $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_r$ gesetzt ist und die Summationsbuchstaben $i, k, \ldots$ die Werthe $1, 2, \ldots, r$ durchlaufen müssen.

Die Gleichung (5) nimmt nun die Gestalt an:

$$(5')\qquad \varphi(w|n) = \sum C_{n_1,\ldots,n_r} [f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_r)]^w,$$

wo die Coefficienten $C_{n_1,\ldots,n_r}$ von w unabhängige rationale Zahlen bezeichnen, und die Summationsbuchstaben $n_1, n_2, \ldots, n_r$ den Bedingungen

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r \leqq n, \quad n_1 > 1, \quad n_2 > 1, \ldots, n_r > 1$$

unterworfen sind. Die absolut grössten unter den verschiedenen Zahlen $f(n_1)$ haben die Werthe $-\frac{n_1(n_1-1)}{2}$ und $+\frac{n_1(n_1-1)}{2}$, wie dies aus dem vorigen Paragraphen hervorgeht. Hieraus folgert man, dass die absolut grössten Werthe von

$$f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_r),$$

welche unter dem Summenzeichen (5′) auftreten für $r = 1$, $n_1 = n$ entstehen und die Werthe $-\frac{n(n-1)}{2}$ und $+\frac{n(n-1)}{2}$ besitzen.

Daher stellt sich die Anzahl $\varphi(w|n)$ dar in der Form:

$$(6)\qquad \varphi(w|n) = \sum_{s=-\frac{n(n-1)}{2}}^{+\frac{n(n-1)}{2}} C_s \cdot s^w,$$

wo die Coefficienten C_s von n, nicht aber von w abhängen.

Die Zahl $\varphi(w|n)$ muss verschwinden, sobald w eine ungerade Zahl ist, da die Anzahl der Verzweigungspunkte nothwendig gerade ist. Also ist $C_{-s} = C_s$. Indem wir dieses berücksichtigen, können wir folgenden Satz aussprechen:

Die Anzahl N der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche w gegebene einfache Verzweigungspunkte besitzen, lässt sich darstellen in der Form:

$$N = c_1 \cdot 1^w + c_2 \cdot 2^w + c_3 \cdot 3^w + \cdots + c_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^w,$$

wo die Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\frac{n(n-1)}{2}}$ ausschliesslich von n abhängende rationale Zahlen bedeuten.

Von diesen Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{\frac{n(n-1)}{2}}$ können nur diejenigen von Null verschiedene Werthe haben, deren Indices in der Gestalt $f(n_1) + f(n_2) + \cdots + f(n_r)$ darstellbar sind.

§ 5.

Die Fälle $n = 3, 4, 5, 6$ als Beispiele.

Für die Fälle $n = 3, 4, 5, 6$ habe ich die Bestimmung der Coefficienten $c_1, c_2, \ldots$ ausgeführt, und ich will hier die erhaltenen Resultate zusammenstellen. Ich schicke die Werthe der Zahlen $f(n)$ und $f(w|n)$ für dieselben Fälle in tabellarischer Uebersicht vorauf.

n:	Die Zahlen $f(n)$:
2	1, −1,
3	3, 0, −3,
4	6, 2, 0, −2, −6,
5	10, 5, 2, 0, −2, −5, −10,
6	15, 9, 5, 3, 0, −3, −5, −9, −15.

Wenn die Zahl $f(w|n)$ angiebt, wie häufig bei n Elementen die Identität als ein Product von w Transpositionen dargestellt werden kann, so ist

für $n =$	$f(w\|n) =$
2	1
3	$\frac{1}{3} \cdot 3^w,$
4	$\frac{1}{12} \cdot 6^w + \frac{3}{4} \cdot 2^w,$
5	$\frac{1}{60} \cdot 10^w + \frac{4}{15} \cdot 5^w + \frac{5}{12} \cdot 2^w,$
6	$\frac{1}{360} \cdot 15^w + \frac{5}{72} \cdot 9^w + \frac{9}{40} \cdot 5^w + \frac{25}{72} \cdot 3^w.$

Die Anzahl N der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche an w gegebenen Stellen einfach verzweigt sind, beträgt:

für $n =$	$N =$
2	1
3	$\frac{1}{18}\cdot 3^w - \frac{1}{2} = \frac{1}{3!}(3^{w-1}-3)$,
4	$\frac{1}{288}\cdot 6^w - \frac{1}{18}\cdot 3^w - \frac{1}{32}\cdot 2^w + \frac{1}{2} = \frac{1}{4!}(2^{w-2}-4)(3^{w-1}-3)$,
5	$\frac{1}{7200}\cdot 10^w - \frac{1}{288}\cdot 6^w + \frac{1}{450}\cdot 5^w - \frac{1}{72}\cdot 4^w + \frac{1}{18}\cdot 3^w + \frac{1}{12}\cdot 2^w - \frac{5}{9}$,
6	$\frac{1}{2\,.\,(360)^2}\cdot 15^w - \frac{1}{7200}\cdot 10^w + \frac{1}{2\,.\,(72)^2}\cdot 9^w - \frac{1}{2\,.\,(24)^2}\cdot 7^w + \frac{7}{2\,.\,(36)^2}\cdot 6^w - \frac{1}{360}\cdot 5^w + \frac{1}{36}\cdot 4^w - \frac{19}{324}\cdot 3^w - \frac{19}{144}\cdot 2^w + \frac{727}{1152}$.

In diesen Tabellen bedeutet w irgend eine positive *gerade* Zahl.

§ 6.

Bestimmung der Anzahl $f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$.

Das Geschlecht p einer n-blättrigen Riemann'schen Fläche, deren Verzweigungen mit W einfachen Verzweigungspunkten äquivalent sind, ist bekanntlich aus der Gleichung

$$2p + 2n - 2 = W$$

zu bestimmen. Sind die w Verzweigungspunkte sämmtlich einfach, so ist $W = w$. Da nun das Geschlecht nicht negativ werden kann, so muss die Anzahl N für $w = 2, 4, 6, \ldots, 2n-4$ verschwinden; für $w = 2n-2$ wird N die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null mit gegebenen einfachen Verzweigungspunkten darstellen. Die letztere Anzahl soll nun auf anderem Wege direct bestimmt werden. Zu dem Zwecke behandeln wir zunächst folgende Aufgabe:

„Gegeben ist die auf n Elemente bezügliche Substitution S, welche, in Cyklen zerlegt,

$$S = (a_1, a_2, \ldots, a_{k_1})(b_1, b_2, \ldots, b_{k_2}) \ldots (l_1, l_2, \ldots, l_{k_\varrho}) = C_1 C_2 \ldots C_\varrho$$

lauten möge. Gesucht wird die Anzahl

$$f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$$

der Systeme von $n+\varrho-2$ Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$, welche der Bedingung

$$(1)\qquad St_1 t_2 \ldots t_{n+\varrho-2} = 1$$

genügen und dabei in Verbindung mit der Substitution S einen Uebergang von jedem der n Elemente zu jedem andern gestatten."

Wir wollen mit

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots$$

die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen bezeichen und das System

$$t_1 t_2 \ldots t_{n+\varrho-2}$$

der Transposition τ_i zuordnen, wenn $t_1 = \tau_i$ ist. Einer bestimmten Transposition τ_i sind dann so viele Systeme zugeordnet als die Gleichung

$$(2)\qquad (S\tau_i)\, t_2 t_3 \ldots t_{n+\varrho-2} = 1$$

Lösungen besitzt, welche der Bedingung genügen, dass vermöge

$$S,\ \tau_i,\ t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$$

ein Uebergang von jedem Elemente zu jedem andern möglich ist.

Bezeichnet $\psi(\tau_i)$ die Anzahl dieser Lösungen, so ist offenbar

$$(3)\qquad f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho) = \psi(\tau_1) + \psi(\tau_2) + \cdots + \psi(\tau_i) + \cdots$$

Es sei nun zuerst τ_i eine Transposition, welche Elemente aus verschiedenen Cyklen von S verbindet, z. B. sei $\tau_i = (a_1 b_1)$. Dann ist

$$(S\tau_i) = (a_1 \ldots a_{k_1} b_1 \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1 \ldots l_{k_\varrho}),$$

und die Gleichung (2) hat daher $f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\varrho)$ Lösungen. Man übersieht hiernach sofort, dass die Transpositionen, welche Elemente verschiedener Cyklen von S verbinden, auf der rechten Seite der Gleichung (3) den Beitrag

$$k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\varrho) + k_1 k_3 f(k_1 + k_3, k_2, \ldots, k_\varrho) + \cdots$$
$$= \sum k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_\varrho)$$

liefern, wobei die Summation auf alle Combinationen der Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ zu je zweien zu erstrecken ist.

Sei nun zweitens τ_i eine Transposition, welche Elemente desselben Cyclus von S verbindet, sei z. B. $\tau_i = (a_1 a_{r+1})$. Dann ist

$$(S\tau_i) = (a_1, \ldots, a_r)(a_1', \ldots, a_s')(b_1, \ldots b_{k_2}) \ldots (l_1, \ldots, l_{k_\varrho}) = C_1' C_1'' C_2 \ldots C_\varrho,$$

wo grösserer Deutlichkeit halber $a_1', \ldots, a_s'$ für $a_{r+1}, \ldots, a_{k_1}$ geschrieben ist.

Wie gross ist jetzt die Anzahl $\psi(\tau_i)$ der Lösungen von (2), unter der Bedingung, dass die Substitutionen

$$S,\ (a_1 a_{r+1}) = \tau_i,\ t_2, \ldots, t_{v+\varrho-2}$$

einen Uebergang von jedem Elemente zu jedem andern gestatten?

Zunächst bemerken wir, dass ein solcher Uebergang vermöge des Systems

$$(4) \qquad (S\tau_i),\ t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$$

jedenfalls nicht mehr möglich sein darf. Denn sonst könnten wir diesem Systeme entsprechend eine zusammenhängende n-blättrige Fläche mit

$$(r-1)+(s-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_\varrho-1)+n+\varrho-3=2n-4$$

einfachen Verzweigungen, also vom Geschlecht -1 herstellen.

Da aber vermöge des Systems (4) sicher von jedem der Elemente

$$b_1, \ldots, b_{k_2}, \ldots, l_1, \ldots, l_{k_\varrho}$$

entweder nach einem der Elemente a oder nach einem der Elemente a' ein Uebergang möglich sein muss, so zerlegen sich die Elemente in nur zwei Gruppen unter einander zusammenhängender. In der einen Gruppe finden sich die Elemente $a_1 \ldots a_r$, in der andern die Elemente $a_1' \ldots a_s'$.

Es werden also vermöge des Systems (4) etwa einerseits die Elemente der Cyklen

$$C_1', C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_\lambda}$$

unter sich und andererseits die Elemente der Cyklen

$$C_1'', C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \ldots, C_{\beta_\mu}.$$

unter sich zusammenhängen. Dem entsprechend zerlegt sich die Gleichung (2) in zwei Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} (C_1' C_{\alpha_1} \ldots C_{\alpha_\lambda}) t_1' t_2', \ldots, t_\sigma' = 1, \\ (C_1'' C_{\beta_1} \ldots C_{\beta_\mu}) t_1'' t_2'', \ldots, t_\tau'' = 1, \end{cases}$$

wo $t_1', t_2', \ldots, t_\sigma'$ bez. $t_1'', t_2'', \ldots, t_\tau''$ diejenigen unter den Substitutionen $t_2, t_3, \ldots, t_{n+\varrho-1}$ bedeuten, welche Elemente aus den Cyklen $C_1', C_{\alpha_1}, \ldots, C_{\alpha_\lambda}$ bez. $C_1'', C_{\beta_1}, \ldots, C_{\beta_\mu}$ verbinden. Man zeigt leicht, dass

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma = r + k_{\alpha_1} + \cdots + k_{\alpha_\lambda} + \lambda - 1, \\ \tau = s + k_{\beta_1} + \cdots + k_{\beta_\mu} + \mu - 1 \end{cases}$$

sein muss, da jede andere Annahme auf zusammenhängende Flächen mit negativem Geschlecht führt. Die Gleichungen (5) haben einzeln bez. $f(r, k_{\alpha_1}, k_{\alpha_2}, \ldots, k_{\alpha_\lambda})$ und $f(s, k_{\beta_1}, k_{\beta_2}, \ldots, k_{\beta_\mu})$ Lösungen, und es giebt also

$$f(r, k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}) \cdot f(s, k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu})$$

Systeme $t_1', \ldots, t_\sigma', t_1'', \ldots, t_\tau''$, welche den Gleichungen (5) genügen.

Aus jedem solchen Systeme können nun genau

$$\frac{(n+\varrho-3)!}{\sigma!\ \tau!}$$

Lösungen der Gleichung (2) gebildet werden. Wir können nämlich irgend σ Transpositionen

$$t_{\alpha'}, t_{\alpha''}, \ldots, t_{\alpha^{(\sigma)}} \quad (\alpha' < \alpha'' < \cdots \alpha^{(\sigma)})$$

mit

$$t_1', t_2', \ldots, t_\sigma'$$

identificiren, worauf die übrigen Transpositionen t in der Reihenfolge, wie sie in der Complexion $t_2, t_3, \ldots, t_{n+\varrho-2}$ vorkommen, mit $t_1'', t_2'', \ldots, t_\tau''$ zu identificiren sind.

Hiernach ist die Anzahl $\psi(\tau_i)$, für $\tau_i = (a_1 a_{r+1})$, dargestellt durch die Summe

$$(7) \quad \Phi_r(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho) = \sum \frac{(n+\varrho-3)!}{\sigma!\, \tau!} f(r, k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}) \cdot f(s, k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu}),$$

wobei sich die Summation auf alle Zerlegungen von

$$k_2, k_3, \ldots, k_\varrho$$

in zwei Gruppen $k_{\alpha_1}, \ldots, k_{\alpha_\lambda}$ und $k_{\beta_1}, \ldots, k_{\beta_\mu}$ bezieht. Die Zahl s ist gleich $k_1 - r$, die Zahlen σ und τ haben die Werthe (6). Zu beachten ist, dass man zu den Gruppenzerlegungen auch diejenigen zu rechnen hat, bei welchen in der einen Gruppe *keine* der Zahlen $k_2, \ldots, k_\varrho$, in der anderen Gruppe alle diese Zahlen aufgenommen sind.

Ferner ist dem an sich sinnlosen Zeichen $f(1)$ der Werth 1 beizulegen. Denselben Werth (7) besitzt die Anzahl $\psi(\tau_i)$ offenbar auch für jede der Annahmen

$$\tau_i = (a_2, a_{r+2}), \quad \tau_i = (a_3, a_{r+3}), \ldots,$$

so dass die Transpositionen, welche zwei Elemente a verbinden, auf der rechten Seite der Gleichung (3) den Beitrag

$$\frac{1}{2} k_1 [\Phi_1(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho) + \Phi_2(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho) + \cdots + \Phi_{k_1-1}(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho)]$$

liefern. Der Factor $\frac{1}{2}$ compensirt hier den Umstand, dass jede Transposition $(a_i a_j)$ zwei Mal gerechnet ist, nämlich einerseits als Transposition $(a_i a_j)$ und andererseits als Transposition $(a_j a_i)$.

Einen entsprechenden Beitrag liefern nun die Transpositionen, welche zwei Elemente b, oder zwei Elemente c etc. verbinden, so dass die Gleichung (3) die folgende Gestalt erhält:

$$(8) \quad f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho) = \sum k_1 k_2 f(k_1 + k_2, k_3 \ldots k_\varrho) + \sum \frac{1}{2} k_1 \sum_{1}^{k_1 - 1} {}^r\, \Phi_r(k_1 | k_2, \ldots, k_\varrho).$$

Von dieser Formel (8) ausgehend, bin ich durch eine sehr mühsame Induction zu der Vermuthung geführt, dass allgemein

$$(9)\quad f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho) = (n+\varrho-2)!\, n^{\varrho-3} \cdot \frac{k_1^{k_1+1}}{k_1!} \cdot \frac{k_2^{k_2+1}}{k_2!} \cdots \frac{k_\varrho^{k_\varrho+1}}{k_\varrho!},$$

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_\varrho = n)$$

sei. Um diese Vermuthung als zutreffend zu erweisen, genügt es, zu zeigen, dass die Gleichung (8) durch den vorstehenden Werth von $f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$ identisch befriedigt wird. Denn diese Gleichung gestattet die successive Berechnung der Werthe von $f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)$, ausgehend von dem Werthe $f(1) = 1$, welcher mit dem Ansatz (9) in Einklang steht.

Den Nachweis, dass die Gleichung (8) durch die Substitution (9) in eine Identität übergeht, will ich hier nicht ausführlich erbringen. Ursprünglich hatte ich mich dabei einiger Identitäten bedient, welche ich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik*) mitgetheilt habe. Später erkannte ich jedoch, dass man durch einige andere Identitäten rascher zum Ziele kommt. Dieselben mögen hier, da sie sehr einfacher Natur sind, eine Stelle finden.

Bezeichnen $u, v, x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ unbeschränkt veränderliche Grössen, so ist

$$\sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \cdots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1}$$
$$= (u + v + x_1 + \cdots x_\varrho)^{\varrho-1} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right),$$

und

$$\sum (u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \cdots + x_{\beta_\mu})^{\mu}$$
$$= (u + v + x_1 + \cdots + x_\varrho)^{\varrho} \cdot \frac{1}{u},$$

wobei sich die Summation auf alle Zerlegungen von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ in zwei Gruppen $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}$ und $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}$ bezieht.

§ 7.

Anzahlen für Riemann'sche Flächen vom Geschlecht Null.

Es ist nunmehr leicht, die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null zu bestimmen, welche folgenden Bedingungen genügen:

1) Die Verzweigungspunkte sollen sämmtlich gegeben sein.

*) Bd. 35, pag. 56 „Ueber einige Verallgemeinerungen der Leibniz'schen Differentiationsformel und des polynomischen Satzes."

2) An allen diesen Punkten bis auf einen, soll die Verzweigung eine einfache sein.

3) An dem letzten Punkte sollen sich die n Blätter zu m_1 Cyklen von je n_1, m_2 Cyklen von je $n_2, \ldots, m_\nu$ Cyklen von je n_ν Blättern gruppiren.

Die in Rede stehenden Flächen sind einzeln zugeordnet den verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$(1) \qquad S t_1 t_2 \ldots t_{n+\varrho-2} = 1,$$

wo S eine Substitution mit m_1 Cyklen von je $n_1, \ldots, m_\nu$ Cyklen von je n_ν Elementen bedeutet und $t_1, t_2, \ldots, t_{n+\varrho-2}$ Transpositionen bezeichnen.

Die Zahl ϱ ist gleich der Gesammtzahl der Cyklen von S, also

$$(2) \qquad \varrho = m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu.$$

Es giebt nun bekanntlich

$$(3) \qquad M = \frac{n!}{m_1!\, n_1^{m_1} \cdot m_2!\, n_2^{m_2} \cdots m_\nu!\, n_\nu^{m_\nu}}$$

Substitutionen S von dem angegebenen Charakter, und es wird also die Anzahl der Lösungen von (1) gleich

$$M \,.\, f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho),$$

wo von den Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\varrho$ m_1 gleich n_1, m_2 gleich $n_2, \ldots, m_\nu$ gleich n_ν sind.

Da wir nun in einander transformirbare Lösungen von (1) nicht als verschieden anzusehen haben, so bekommen wir (falls $n > 2$) für die gesuchte Anzahl von Riemann'schen Flächen den Werth

$$\frac{M.f(k_1, k_2, \ldots, k_\varrho)}{n!}$$

$$= (n + m_1 + \cdots + m_\nu - 2)!\, n^{m_1+m_2+\cdots+m_\nu-3} \frac{1}{m_1!}\left(\frac{n_1^{n_1}}{n_1!}\right)^{m_1} \cdots \frac{1}{m_\nu!}\left(\frac{n_\nu^{n_\nu}}{n_\nu!}\right)^{m_\nu}.$$

Insbesondere erhalten wir, falls wir $\nu = 1$, $m_1 = n$, $n_1 = 1$ wählen, das Resultat:*)

Die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null, welche $(2n-2)$ *gegebene einfache Verzweigungspunkte besitzen, beträgt*

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\, n^{n-4}.$$

Nur im Falle $n = 2$ ist diese Anzahl noch mit 2 zu multipliciren.

*) Die hier bestimmte Anzahl giebt offenbar auch die Zahl der Büschel von binären Formen n^{ter} Ordnung an, welche eine gegebene Discriminante besitzen. Es ist interessant, mit dieser Zahl die von den Herren F. Meyer, Schubert und Stephanos berechnete Anzahl der Büschel von binären Formen n^{ter} Ordnung mit gegebener Functionaldeterminante zu vergleichen. Die letztere Anzahl ist gleich $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!}$. Man vergleiche auch eine Arbeit von Hilbert, d. Ann., Bd. 33, p. 227.

II. Abschnitt.

Monodromie-Gruppen.

§ 1.

Die Monodromie-Gruppen A und B.

Wir wollen uns vorstellen, dass sich die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in der complexen Zahlenebene E simultan in Bewegung setzen und schliesslich in die neuen Lagen $a_1', a_2', \ldots, a_w'$ übergehen. Dabei soll jedoch das Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ in jedem Stadium der Bewegung aus w *getrennt* liegenden Punkten bestehen. Betrachten wir nun eine n-blättrige Riemann'sche Fläche F, welche an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt ist, so wird dieselbe sich stetig mit dem Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ ändern und in eine bestimmte Fläche F' übergegangen sein, wenn das Punktsystem die Endlage $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ erreicht hat.

Falls nun diese Endlage mit der Anfangslage übereinstimmt, falls also die Punkte $a_1', a_2', \ldots, a_w'$ in irgend einer Reihenfolge mit den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zusammenfallen, wollen wir die betrachtete Bewegung als eine „*geschlossene Bahn*" bezeichnen. Bilden dann $F_1, F_2, \ldots$ die Gesammtheit der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$, so werden die Flächen $F_1', F_2', \ldots$, in welche dieselben übergehen, in irgend einer Reihenfolge mit $F_1, F_2, \ldots$ identisch sein. Es folgt also:

„*Jeder geschlossenen Bahn des Punktsystems* $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ *entspricht eine bestimmte Substitution*

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} F_1, & F_2, & \ldots \\ F_1', & F_2', & \ldots \end{pmatrix}$$

der Riemann'schen Flächen."

Die Substitutionen $\mathfrak{S}$, welche allen möglichen geschlossenen Bahnen entsprechen, bilden eine Gruppe, die wir als

Monodromiegruppe A.

bezeichnen. Diese Gruppe besitzt eine Reihe von Untergruppen, welche sich ohne Weiteres darbieten. Jeder geschlossenen Bahn gehört nämlich eine Substitution

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_w \\ a_1', & a_2', & \ldots, & a_w' \end{pmatrix}$$

der w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu. Betrachten wir nun alle Bahnen,

deren zugehörige Substitutionen $\mathfrak{A}$ einer bestimmten Vertauschungsgruppe G der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_w$ angehören, so werden die diesen Bahnen entsprechenden Substitutionen $\mathfrak{S}$ offenbar eine Gruppe bilden, welche in der Gruppe A enthalten ist. Besteht die Vertauschungsgruppe G aus der einen identischen Substitution, so heisst das, wir betrachten nur diejenigen geschlossenen Bahnen, bei welchen die Endlage $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ auch in Bezug auf die Reihenfolge mit der Anfangslage übereinstimmt, so dass jeder Punkt a_i für sich einen geschlossenen Weg beschreibt. Diese Bahnen wollen wir „*vollständig geschlossen*" nennen. Die den vollständig geschlossenen Bahnen entsprechende Vertauschungsgruppe der Riemann'schen Flächen $F_1, F_2, \ldots$ heisse die

Monodromiegruppe B.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass diese Gruppe B eine ausgezeichnete (invariante) Untergruppe der Monodromiegruppe A ist.

§ 2.

Erläuterung.

Die nachstehenden Betrachtungen sind zwar für die weiteren Entwicklungen nicht erforderlich, doch wird es gut sein, dieselben hier einzufügen, da sie geeignet sind, die Auffassung zu erleichtern.

Alle möglichen Lagen des Punktsystems $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ bilden ein $2w$-fach ausgedehntes unbegrenztes Continuum R_{2w}. Die complexen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mögen als die Coordinaten der „Stelle" $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ dieses Continuums bezeichnet werden.

Im Allgemeinen können wir nun aus jeder Stelle durch Permutation der Coordinaten $w! - 1$ neue Stellen ableiten. Jedoch ist dieses nicht mehr der Fall, insofern weniger als $w! - 1$ Stellen erhalten werden, sobald sich unter den Coordinaten der ursprünglichen Stelle gleiche finden, d. h. sobald für diese Stelle mindestens ein Punkt a_i mit einem Punkte a_k zusammenfällt. Diese besonderen Stellen, welche durch die Gleichung

$$\sum_{i>k} (a_i - a_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, w)$$

charakterisirt sind, bilden ein $(2w-2)$-fach ausgedehntes Continuum V_{2w-2}, welches in Rücksicht auf die Bedeutung, welche es bei unseren Betrachtungen besitzt, als „*Verzweigungsgebilde*" bezeichnet werden soll. Das Verzweigungsgebilde theilt das Continuum R_{2w} nicht in Stücke, da es eine um zwei Einheiten geringere Dimension besitzt als dieses.

Uebrigens zerfällt das Verzweigungsgebilde in die $\frac{w(w-1)}{2}$ einzelnen Gebilde:

$$a_2 - a_1 = 0,\ a_3 - a_1 = 0, \ldots, a_w - a_{w-1} = 0.$$

Eine „geschlossene Bahn" bedeutet nun offenbar nichts Anderes, als einen in dem Continuum R_{2w} verlaufenden Weg, welcher unter Vermeidung des Gebildes V_{2w-2} von einer Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ ausgehend entweder zu dieser zurückkehrt, oder in einer der $w! - 1$ abgeleiteten Stellen endigt. Im ersteren Falle haben wir es mit einer „vollständig" geschlossenen Bahn zu thun.

Es bezeichne jetzt N die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen, welche an w gegebenen Stellen verzweigt sind, und man denke sich N ineinanderliegende Exemplare des Continuums R_{2w}. Von den N Flächen werden nur dann zwei oder mehrere zusammenfallen, wenn man die Stelle $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ auf das Verzweigungsgebilde V_{2w-2} rücken lässt. Diesem Umstande entsprechend werden die N Exemplare R_{2w} längs gewisser durch V_{2w-2} gelegten Uebergangsräume verbunden, und es entsteht auf diese Weise ein $2w$-fach ausgedehnter über dem Continuum R_{2w} ausgebreiteter Riemann'scher Raum, auf dessen Stellen die Gesammtheit der n-blättrigen Flächen mit w Verzweigungspunkten eindeutig umkehrbar bezogen ist. Die Monodromiegruppe dieses Riemann'schen Raumes ist offenbar nichts Anderes, als die Monodromiegruppe B.

Auch die Monodromiegruppe A lässt sich in entsprechender Weise deuten. Man hat dabei nur an Stelle des Continuums R_{2w} ein anderes Continuum $\overline{R}_{2w}$ zu setzen, dessen einzelne Stelle die elementaren symmetrischen Functionen der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu Coordinaten besitzt.

Aus den nachfolgenden Entwicklungen wird hervorgehen, dass, allgemein zu reden, der oben erwähnte Riemann'sche Raum nicht aus einem Stücke besteht, sondern in mehrere verschiedene Riemann'sche Räume zerfällt.

§ 3.

Aenderung der Riemann'schen Flächen auf einer von den Verzweigungspunkten beschriebenen Bahn.

Wir wollen nunmehr näher untersuchen, in welcher Weise eine Riemann'sche Fläche

$$(1) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix}$$

sich ändert, wenn das Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ sich stetig in eine neue Lage $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ bewegt. Einen solchen Uebergang

werden wir kurz als eine „Bahn" bezeichnen und von der „Anfangsstelle" $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ und der „Endstelle" $(a_1', a_2', \ldots, a_w')$ der Bahn sprechen.

Bei dieser Untersuchung wollen wir die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ in folgender Weise bestimmen.*) Wir ziehen eine knotenlose Linie L, welche von a_1 über $a_2, a_3, \ldots, a_{w-1}$ nach a_w hinführt und ergänzen diese Linie, indem wir a_w mit a_1 verbinden, zu einer geschlossenen Linie L, welche die Ebene E in zwei Gebiete G und G' zerlegt. Es sei G dasjenige Gebiet, welches auf der negativen Seite von L liegt. Die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ mögen nun von irgend einem Punkte O des Gebietes G durch das Innere von G nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ gelegt werden.

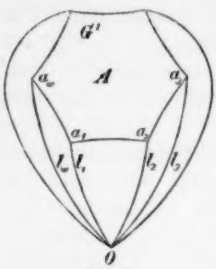


Fig. 1.

Legen wir von einem Punkte A des Gebietes G' aus Schleifen nach den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$, welche abgesehen von den die Punkte a_i umgebenden kreisförmigen Contouren, ganz innerhalb G' verlaufen, so erfahren die Blätter bei positiver Durchlaufung dieser Schleifen bezüglich die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$. Es ist für das Folgende bequem, zu bemerken, dass diese Substitutionen gerade zu Stande kommen, wenn wir dem Ueberschreiten von der negativen zur positiven Seite der Linien

$$a_1 a_2,\ a_2 a_3,\ a_3 a_4, \ldots, a_{w-1} a_w,\ a_w a_1$$

bezüglich die Substitutionen

$$S_1,\ S_1 S_2,\ S_1 S_2 S_3, \ldots, S_1 S_2 \ldots S_{w-1},\ S_1 S_2 \ldots S_w = 1$$

zuordnen. Hiernach entspricht nämlich der Schleife (a_k), da dieselbe die Linien $a_{k-1} a_k$ und $a_k a_{k+1}$ und zwar die erstere von der positiven zur negativen, die letztere von der negativen zur positiven Seite überschreitet, die Substitution

$$(S_1 S_2 \ldots S_{k-1})^{-1} (S_1 S_2 \ldots S_{k-1} S_k) = S_k,$$

wie es sein muss.

Wie wir auch die Ergänzungslinie $a_w a_1$, den Punkt O und die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ abändern mögen, stets wird die Fläche (1) ungeändert bleiben, wenn wir nur das System von Substitutionen

$$(2) \qquad \Sigma = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

festhalten. Daher wird die Fläche auch schon vollständig durch Angabe der Linie L und des Systemes Σ bestimmt sein, und dem entsprechend mit

*) Vgl. Clebsch, l. c. Man vergleiche für das Folgende die Figur 1.

(4) $$F = \binom{L}{\Sigma}$$

bezeichnet werden können.

Die einzelnen Stücke der Linie L bezeichnen wir mit

(5) $$s_1 = a_1 a_2,\ s_2 = a_2 a_3, \ldots, s_{w-1} = a_{w-1} a_w.$$

Ohne die Fläche F zu ändern, dürfen wir offenbar das Stück $s_i = a_i a_{i+1}$ noch beliebig deformiren, wenn wir dabei nur keinen der Punkte $a_1, \ldots, a_w$ überschreiten und die übrigen Stücke s, sowie das System Σ fest lassen.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir jetzt irgend eine Bahn. Diese wird sich in der Ebene E als ein System von Linien

(6) $$a_1 a_1',\ a_2 a_2', \ldots, a_w a_w'$$

darstellen, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ simultan durchlaufen. Wenn nun diese Linien weder sich selber noch einander schneiden, so soll die Bahn „einfach“ heissen. Es genügt, einfache Bahnen zu betrachten, da sich offenbar jede Bahn als eine Reihe aneinandergesetzter einfacher Bahnen darstellen lässt. In welche Fläche ist nun die Fläche (4) nach Durchlaufung der einfachen Bahn (6) stetig übergegangen? Um dieses zu entscheiden, unterwerfen wir die Stücke $s_1, s_2, \ldots, s_{w-1}$ zunächst derartigen Deformationen, dass die Linie L schliesslich keine anderen Punkte, als $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mit den Linien (6) gemein hat.

Dies ist stets möglich; denn wenn z. B. die Linie $a_1 a_1'$ ausser a_1 noch weitere Schnittpunkte mit L besitzt, so betrachten wir den letzten vor a_1' liegenden Schnittpunkt, welcher sich auf dem Stücke $s_i = a_i a_{i+1}$ finden möge. Ein Blick auf die Figur 2 zeigt dann, dass wir die Linie s_i durch eine andere ersetzen können (sie ist in der Figur punktirt), welche nun mit $a_1 a_1'$ mindestens einen Punkt weniger, mit den übrigen Linien (6) aber nicht mehr Punkte als die frühere Linie s_i gemein hat. Indem man dieses Verfahren mehrfach anwendet, kann man alle Schnittpunkte von L mit den Linien (6) beseitigen.*) Man beachte, dass die Abänderung der Linie L jedenfalls solche Stücke s_i nicht betrifft, welche von vornherein keiner der Linien (6) begegnen.

Fig. 2.

Betrachten wir nunmehr die Linien

(7) $$a_1' a_1 a_2 a_2',\ a_2' a_2 a_3 a_3', \ldots, a_{w-1}' a_{w-1} a_w a_w',$$

so setzen sich dieselben zu einer knotenlosen Linie zusammen, welche jedoch längs der Stücke $a_2 a_2', a_3 a_3', \ldots, a_{w-1} a_w'$ doppelt überdeckt ist.

*) Auch der Fall, in welchem ganze Stücke von L mit Stücken der Linien (6) coincidiren, bietet offenbar keine Schwierigkeit.

Wir deformiren die Linien (7) unter Festhaltung ihrer Endpunkte $a_1', a_2', \ldots, a_w'$ und ohne einen dieser Punkte zu überschreiten so, dass dieselben nach der Deformation eine einfache knotenlose Linie L' bilden. (In Figur 3 ist die Linie punktirt). Offenbar geht nun die Fläche (4) stetig in die Fläche

(8) $$F' = \binom{L'}{\Sigma}$$

über, wenn das Punktsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ die einfache Bahn (6) durchläuft. Wenn wir also die Aenderung der Riemann'schen Flächen bei Durchlaufung irgend einer Bahn bestimmen wollen, so haben wir unser Augenmerk nur auf die successive Abänderung der Linie L zu richten. Ist die Bahn eine geschlossene, so wird die Linie L in eine Linie L' übergehen, welche dieselben Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ wie die Linie L verbindet, und zwar auch in derselben Reihenfolge, falls die Bahn eine vollständig geschlossene ist.

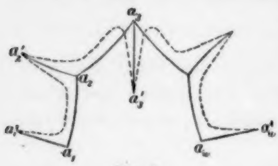


Fig. 3.

§ 4.

Vollständig geschlossene Bahnen.

Wir beschränken jetzt die Betrachtung auf vollständig geschlossene Bahnen, und wollen zeigen, dass durch geeignete Wahl einer solchen Bahn jede Linie

$$L = (s_1, s_2, \ldots, s_{w-1})$$

in jede andere Linie

$$L' = (s_1', s_2', \ldots, s_{w-1}')$$

übergeführt werden kann. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass die Linien L und L' in den ersten $i-1$ Stücken übereinstimmen, dass also

$$s_1 = s_1', s_2 = s_2', \ldots, s_{i-1} = s_{i-1}'$$

ist, während die Stücke s_i und s_i' *) von einander verschieden sind. Die Zahl i darf auch den Werth 1 besitzen, in welchem Falle schon s_1 und s_1' verschieden sind. Es bezeichne nun B_{i+1} eine Bahn, welche folgendermassen erklärt ist. Alle Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ mit Ausnahme von a_{i+1} bleiben fest; dieser letztere bewegt sich zunächst längs s_i bis nach a', sodann nach dem Punkte a'' auf s_i' und schliesslich längs s_i' in seine Ausgangslage zurück. Dabei sind die Punkte a', a'' und ihre Verbindungslinie $a'a''$ so zu wählen, dass in dem Dreieck $a_i a' a''$ keiner der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$

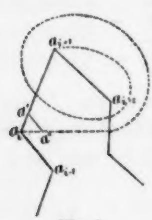


Fig. 4.

*) In der Figur 4 ist s_i' punktirt.

liegt und $a'a''$ keine der Linien $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}$ trifft. Nach Durchlaufung dieser Bahn B_{i+1} ist die Linie L übergegangen in eine neue Linie, welche mit L' die i ersten Stücke $s_1', s_2', \ldots, s_i'$ gemein hat. Diese Betrachtung zeigt, dass wir durch Aneinanderreihung von Bahnen

$$B_2, B_3, \ldots, B_w$$

die Linie L in jede beliebige andere Linie L' überführen können.

Die Bahnen B_i lassen sich nun weiter als Combinationen einer endlichen Anzahl von nunmehr einzuführenden Bahnen darstellen. Um die letzteren in einfacher Weise erklären zu können, ergänzen wir die Linie L, wie in § 3, zu einer geschlossenen Linie L und bezeichnen wieder mit G und G' die von der Linie L begrenzten Gebiete der Ebene E.

Eine Bahn, welche den Punkt a_i zunächst durch das Innere von G' an das Stück $a_k a_{k+1}$ von L und sodann ausserhalb G' in die Ausgangslage zurückführt, bezeichnen wir mit $B_{i,k}$. Dann lässt sich jede Bahn B_i als Combination der Bahnen

$$B_{i,i+1}, B_{i,i+2}, \ldots, B_{i,w}$$

darstellen. Jede beliebige vollständig geschlossene Bahn dürfen wir also durch eine Combination der $\frac{(w-1)(w-2)}{2}$ Bahnen

$$\begin{array}{llll} B_{2,3}, & B_{2,4}, & \ldots, & B_{2,w}, \\ & B_{3,4}, & \ldots, & B_{3,w}, \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ & & & B_{w-1,w} \end{array}$$

ersetzen und zwar durch eine Combination der Gestalt

$$B_{2,\alpha}^{\varepsilon_\alpha} B_{2,\beta}^{\varepsilon_\beta} \cdots B_{2,\lambda}^{\varepsilon_\lambda} \cdot B_{3,\alpha'}^{\varepsilon_{\alpha'}} B_{3,\beta'}^{\varepsilon_{\beta'}} \cdots B_{3,\lambda'}^{\varepsilon_{\lambda'}}, \cdots,$$

wo die Exponenten $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \ldots, \varepsilon_{\lambda'}, \ldots$ einen der Werthe $+1, -1$ besitzen.

Unter B^{-1} ist dabei dieselbe Bahn, wie unter B, nur in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, zu verstehen.

Wir bemerken beiläufig, dass zwischen den Bahnen B_{ik} die Beziehung

$$B_{2,w} B_{3,w} \ldots B_{w-1,w} = 1$$

besteht.

§ 5.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe B.

Wir legen jetzt eine feste Linie L zu Grunde.*) Dann können wir die einzelne Riemann'sche Fläche F durch das ihr zugehörende System von Substitutionen

$$(S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

bezeichnen. Die Linie L sei nach Durchlaufung der Bahn $B_{i,k}$ übergegangen in die Linie L'. (In der Figur sind die Stücke der Linie L, soweit sie nicht mit Stücken von L' zusammenfallen, gestrichelt; die Stücke der Linie L' sind stark ausgezogen). Ferner sei F' die Fläche, in welche

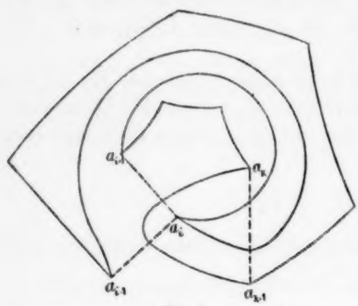


Fig. 5.

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

nach Durchlaufung der Bahn $B_{i,k}$ übergegangen ist. Bezeichnet dann r einen der Indices

$$i+1, i+2, \ldots, k,$$

so entspricht dem Wege l_r in Bezug auf die Fläche F', wie aus der Figur erhellt, die Substitution

$$S'_r = S_i S_r S_i^{-1};$$

dem Wege l_i entspricht in Bezug auf F' die Substitution

$$S'_i = (S_i S_{i+1} \ldots S_k)\, S_i (S_i S_{i+1} \ldots S_k)^{-1},$$

während allen übrigen Wegen l dieselbe Substitution in Bezug auf F' wie in Bezug auf F entspricht. Wir finden also:

„*Die der Bahn $B_{i,k}$ entsprechende Vertauschung $\mathfrak{S}_{i,k}$ der Riemann'schen Flächen besteht darin, dass an Stelle der Fläche*

$$F = (S_1, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_k, \ldots, S_w)$$

die Fläche

$$F' = (S_1, \ldots, S'_i, S'_{i+1}, \ldots, S'_k, \ldots, S_w)$$

tritt, wobei zur Abkürzung

$$\begin{cases} S'_r = S_i S_r S_i^{-1} \quad (r = i+1, i+2, \ldots, k), \\ S'_i = (S_i \ldots S_k)\, S_i (S_i \ldots S_k)^{-1}, \end{cases}$$

gesetzt ist.

Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen folgt weiter:

*) Vgl. für das Folgende die Figur 5.

„*Die Monodromiegruppe B besteht aus allen Combinationen der* $\frac{(w-1)(w-2)}{2}$ *Substitutionen*

$$\mathfrak{S}_{2,3},\ \mathfrak{S}_{2,4}, \ldots, \mathfrak{S}_{2,w},\ \mathfrak{S}_{3,4}, \ldots, \mathfrak{S}_{3,w}, \ldots, \mathfrak{S}_{w-1,w}.“$$

Von diesen „erzeugenden“ Substitutionen der Gruppe B können wir $\mathfrak{S}_{w-1,w}$ zufolge der Relation

$$\mathfrak{S}_{2,w}\,\mathfrak{S}_{3,w} \ldots \mathfrak{S}_{w-1,w} = 1$$

bei Seite lassen. Ob ausser dieser noch andere der Substitutionen $\mathfrak{S}_{i,k}$ durch die übrigen ausdrückbar sind, ob wir also die Zahl der erzeugenden Substitutionen noch weiter vermindern können, wollen wir hier nicht untersuchen.

§ 6.

Die erzeugenden Substitutionen der Gruppe A.

Bezeichnen wir mit W_i irgend eine bestimmte Bahn, nach deren Durchlaufung die Punkte a_i, a_{i+1} ihre Plätze gewechselt, die übrigen Punkte $a_1, \ldots, a_w$ dagegen ihre Ausgangslage wieder erreicht haben, so können wir aus den Bahnen

(1) $$W_1,\ W_2, \ldots, W_{w-1}$$

stets eine Bahn zusammensetzen, nach deren Durchlaufung die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ eine beliebig vorgeschriebene Vertauschung erfahren haben. Daher kann jede geschlossene Bahn durch eine Combination der Bahnen (1) und der oben eingeführten Bahnen $B_{i,k}$ ersetzt werden.

Wir wählen nun die Bahnen (1) in folgender Weise: Wir lassen den Punkt a_i durch das Innere von G' nach a_{i+1} und gleichzeitig a_{i+1} ausserhalb des Gebietes G' nach a_i laufen, während alle übrigen Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ fest bleiben.

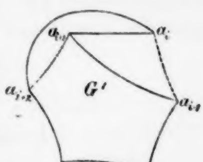


Fig. 6.

Die hierdurch erklärte Bahn nehmen wir als Bahn W_i. Die Aenderung, welche die Linie L nach Durchlaufung dieser Bahn erfahren hat, zeigt die Figur 6, in welcher die Stücke von L, welche eine Aenderung erfahren, gestrichelt, die Stücke, welche an ihre Stelle treten, gleich den übrigen Stücken stark ausgezogen sind. Man liest aus der Figur nun sofort ab, dass die Vertauschung $\mathfrak{S}_i$ der Riemann'schen Flächen, welche der Bahn W_i entspricht, sich dahin bestimmt, dass an Stelle der Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_w)$$

die Fläche

$$(S_1, S_2, \ldots, S_i S_{i+1} S_i^{-1}, S_i, \ldots, S_w)$$

tritt. Diese Vertauschungen $\mathfrak{S}_i$ in Verbindung mit den Vertauschungen $\mathfrak{S}_{i,k}$ erzeugen also die Monodromiegruppe A. Nun lassen sich aber

die Substitutionen $\mathfrak{S}_{i,k}$, wie man sofort erkennt, durch die Substitutionen $\mathfrak{S}_i$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$\mathfrak{S}_{i,k} = \mathfrak{S}_i \mathfrak{S}_{i+1} \ldots \mathfrak{S}_{k-2} \mathfrak{S}_{k-1} \,.\, \mathfrak{S}_{k-1} \mathfrak{S}_{k-2} \ldots \mathfrak{S}_{i+1} \mathfrak{S}_i.$$

Wir gelangen daher zu folgendem einfachen Resultat:

„Die Monodromiegruppe A besteht aus allen Combinationen der $w-1$ Substitutionen

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{w-1},$$

wo $\mathfrak{S}_i$ diejenige Vertauschung der Riemann'schen Flächen bedeutet, welche an Stelle der Fläche

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_i, S_{i+1}, \ldots, S_w)$$

die Fläche

$$F' = (S_1, S_2, \ldots, S_i S_{i+1} S_i^{-1}, S_i, \ldots, S_w)$$

treten lässt.

Ordnen wir den erzeugenden Substitutionen

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_{w-1}$$

der Gruppe A die Transpositionen

$$(a_1 a_2), (a_2 a_3), \ldots, (a_{w-1} a_w)$$

zu, welche ihrerseits als erzeugende Substitutionen für die Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Vertauschungen der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_w$ angesehen werden können, so haben wir dadurch eine isomorphe Beziehung zwischen beiden Gruppen festgelegt. In dieser Beziehung entsprechen den Untergruppen von $\mathfrak{A}$ die oben (§ 1) erwähnten Untergruppen von A. Insbesondere besteht die Monodromiegruppe B offenbar aus denjenigen Substitutionen von A, welche bei dem in Rede stehenden Isomorphismus der identischen Substitution von $\mathfrak{A}$ entsprechen.

§ 7.

Intransitivität der Gruppen A und B.

Man übersieht leicht, dass die Monodromiegruppen A und B intransitiv sind. In der That kann sich bei Durchlaufung irgend einer Bahn die Art des Zusammenhangs der Blätter in dem einzelnen Verzweigungspunkte für keine der Riemann'schen Flächen ändern, und es vertauschen sich daher z. B. in der Gruppe B nur jeweils solche Flächen

(1) $$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

unter einander, für welche die einzelnen Substitutionen S_i eine feste Zahl von Cyklen und in den Cyklen eine feste Zahl von Elementen enthalten.

Dies geht auch unmittelbar aus der Gestalt der erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{S}_{i,k}$ (pag. 30) hervor. Aus der Betrachtung der Substitutionen

$\mathfrak{S}_{i,k}$ entnehmen wir sofort noch weitere Bedingungen dafür, dass eine Fläche (1) in eine andere Fläche

$$(2) \qquad F' = (S_1', S_2', \ldots, S_w')$$

vermöge einer Substitution der Gruppe B übergeführt werden kann. Offenbar muss nämlich die Monodromiegruppe der Fläche (1), d. h. diejenige Gruppe, welche aus allen Combinationen der Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$ besteht, mit der Monodromiegruppe der Fläche F' übereinstimmen (oder doch in die letztere transformirbar sein). Ueberdies müssen innerhalb dieser gemeinsamen Monodromiegruppe der Flächen F und F' die beiden Substitutionen S_i und S_i' gleichberechtigt sein, wo i jeden der Indices $1, 2, \ldots, w$ bedeutet. Die Frage ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, habe ich nicht allgemein entscheiden können.

Indessen bietet es keine Schwierigkeit, diese Frage für den Fall zu beantworten, wo wir aus der Gesammtheit der n-blättrigen Flächen mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ diejenigen herausgreifen, für welche diese Punkte *einfache* Verzweigungspunkte sind.*)

Nach einem Satze des Herrn Lüroth**) kann man durch zweckmässige Wahl der Verzweigungsschnitte, d. h. durch zweckmässige Wahl der Linie L, erreichen, dass für eine beliebige jener Flächen das zugehörige System von Substitutionen das folgende wird:

$$S_1=(12), S_2=(12), S_3=(13), S_4=(13), \ldots, S_{2n-3}=(1,n), S_{2n-2}=(1,n),$$
$$S_r = (1, n) \quad (r=2n-1, \ldots, w).$$

Daher kann man auf einer zweckmässig gewählten geschlossenen Bahn jede der betrachteten Flächen in eine bestimmte unter ihnen, nämlich in die Fläche

$$\big((12), (12), (13), (13), \ldots, (1n)\big)$$

überführen und zwar folgt aus den Betrachtungen von Clebsch**), dass diese Ueberführung auch schon durch Benutzung von „vollständig" geschlossenen Bahnen möglich ist. Hiernach können wir folgende Sätze aussprechen:

Bildet man die Monodromiegruppe A, indem man dabei nur diejenigen Flächen berücksichtigt, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu einfachen Verzweigungspunkten besitzen, so ist die entstehende Gruppe transitiv. Das Gleiche gilt für die Monodromiegruppe B.

Oder anders ausgedrückt: Das Problem, die n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu bestimmen, ist *irreducibel*, sowohl wenn die symmetrischen Verbindungen der Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_w$, als auch wenn

*) Die Monodromiegruppe ist in diesem Falle die symmetrische Gruppe.

**) l. c.

diese Werthe selber als gegeben betrachtet werden. Im ersteren Falle ist nämlich die Gruppe A, im letzteren die Gruppe B die Galois'sche Gruppe des Problems, wobei alle Constanten als adjungirt vorausgesetzt werden. —

III. Abschnitt.

Realitäts-Fragen.

§ 1.

Conjugirte Riemann'sche Flächen.

Wir nehmen in der complexen Zahlenebene E irgend w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ an, legen nach diesen von irgend einem Punkte O aus (wie in I, § 1) die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ und betrachten irgend eine der Riemann'schen Flächen

$$(1) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w \end{pmatrix}$$

welche in $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt sind. Wenn wir diese Fläche an der Axe der reellen Zahlen der Ebene E spiegeln, so entsteht eine neue Fläche $\overline{F}$, welche wir als *conjugirte* Fläche von F bezeichnen wollen.

Gehen bei dieser Spiegelung die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ und die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ bezüglich über in $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_w$ und $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_w$, so ist, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt (vgl. die Fig. 7):

$$(2) \qquad \overline{F} = \begin{pmatrix} \bar{l}_w, & \bar{l}_{w-1}, & \ldots, & \bar{l}_2, & \bar{l}_1 \\ S_w^{-1}, & S_{w-1}^{-1}, & \ldots, & S_2^{-1}, & S_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

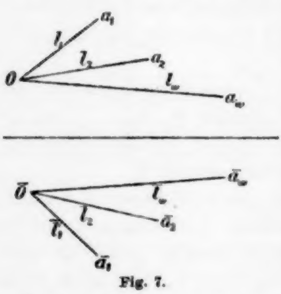


Fig. 7.

Die Flächen $\overline{F}$ und F sind eindeutig umkehrbar und conform auf einander bezogen; doch ist die conforme Beziehung eine solche, bei welcher eine Umlegung der Winkel statt hat. Zur Erläuterung sei noch Folgendes bemerkt: Stellen die Punkte der Ebene E die Werthe der complexen Variabeln x dar, und ist die Fläche F durch die algebraische Gleichung $f(y, x) = 0$ erklärt, so wird die Gleichung $\overline{f}(y, x) = 0$ die Fläche $\overline{F}$ definiren, wenn $\overline{f}(y, x)$ dadurch aus $f(y, x)$ abgeleitet wird, dass jeder Coefficient der letzteren Function durch seinen conjugirt imaginären Werth ersetzt wird.

Wenn die Fläche F mit ihrer conjugirten $\overline{F}$ übereinstimmt, so ist die Fläche F im Sinne des Herrn Klein „symmetrisch".*) (Die Gleichung $f(y, x) = 0$ kann dann so gewählt werden, dass sie reelle Coefficienten besitzt).

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_w$ theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär sind.

Wir wollen annehmen, dass die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_w$ dieser Bedingung genügen, und zwar sei die Reihenfolge dieser Werthe so gewählt, dass

$$a_1 \text{ und } a_w = \bar{a}_1,\ a_2 \text{ und } a_{w-1} = \bar{a}_2, \ldots, a_\mu \text{ und } a_{w-\mu+1} = \bar{a}_\mu$$

conjugirt imaginär, sowie

$$a_{\mu+1} = b_1,\ a_{\mu+2} = b_2, \ldots, a_{\mu+\varrho} = b_\varrho$$

reell sind. Die Verzweigungspunkte sind dann also der Reihe nach

$$(3) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\mu,\ b_1, b_2, \ldots, b_\varrho,\ \bar{a}_\mu, \ldots, \bar{a}_2, \bar{a}_1.$$

Wir setzen ferner $b_1 > b_2 > \cdots > b_\varrho$ voraus, wählen den Punkt O auf der Axe der reellen Zahlen, und zwar so, dass $O > b_1$ ist, und ziehen endlich die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ dergestalt, dass $l_1, l_2, \ldots, l_\mu$ durch Spiegelung an der Axe der rellen Zahlen in

$$l_w = \bar{l}_1,\ l_{w-1} = \bar{l}_2, \ldots, l_{w-\mu+1} = \bar{l}_\mu$$

übergehen (vgl. Fig. 8).

Indem wir dieses System von Linien ein für alle Mal festlegen, können wir die Fläche (1) kürzer mit

$$F = (S_1, S_2, \ldots, S_w)$$

oder, indem wir die Bezeichnung der Substitutionen etwas abändern, mit

$$(4) \qquad F = (S_1, S_2, \ldots, S_\mu,\ T_1, T_2, \ldots, T_\varrho,\ \Sigma_\mu, \ldots, \Sigma_2, \Sigma_1)$$

bezeichnen. Beziehen wir nun die conjugirte Fläche $\overline{F}$ auf dasselbe System von Linien, so finden wir

$$(5) \qquad \overline{F} = (\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_\mu,\ \overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_\varrho,\ \overline{\Sigma}_\mu, \ldots, \overline{\Sigma}_2, \overline{\Sigma}_1),$$

wo zur Abkürzung

$$(6) \qquad \begin{cases} \overline{S}_1 = \Sigma_1^{-1}, \ldots, \overline{S}_\mu = \Sigma_\mu^{-1};\ \overline{T}_k = U_k^{-1}\, T_k^{-1}\, U_k \quad (k=1,2,\ldots,\varrho), \\ \overline{\Sigma}_1 = S_1^{-1}, \ldots, \overline{\Sigma}_\mu = S_\mu^{-1};\ U_k = T_k . T_{k+1} \ldots T_\varrho \quad (k=1,2,\ldots,\varrho) \end{cases}$$

*) „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale", pag. 72.

gesetzt ist. Man bestätigt diese Angabe sofort mit Hülfe der Figur 8. Die Bedingung dafür, dass die Flächen (4) und (5) dieselben sind, besteht nun in der Transformirbarkeit der zugehörigen Systeme von

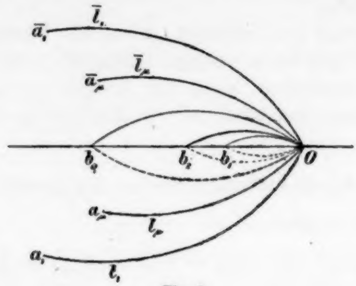


Fig. 8.

Substitutionen in einander. In Rücksicht auf (6) ergiebt sich daher, nach leichter Zwischenrechnung, der Satz:

Die Riemann'sche Fläche (4) *ist dann und nur dann sich selbst conjugirt, wenn es eine Substitution U giebt, welche den Gleichungen*

$$(7)\qquad \begin{cases} S_i U \Sigma_i = \Sigma_i U S_i = U & (i = 1, 2, \ldots, \mu), \\ U_k U U_k = U & (k = 1, 2, \ldots, \varrho). \end{cases}$$

genügt, wobei zur Abkürzung

$$(8)\quad T_\varrho = U_\varrho,\ T_{\varrho-1} T_\varrho = U_{\varrho-1},\ T_{\varrho-2} T_{\varrho-1} T_\varrho = U_{\varrho-2}, \ldots, T_1 T_2 \ldots T_\varrho = U_1$$

gesetzt ist.

Betrachten wir irgend einen Punkt P auf der Axe der reellen Zahlen und nennen wir $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die n über P liegenden Punkte der Riemann'schen Fläche (4), so werden diese Punkte bei der symmetrischen Umformung der Fläche eine bestimmte Vertauschung erfahren, indem den Punkten

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

dieselben Punkte, aber eventuell in anderer Reihenfolge:

$$P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \ldots, P_{\alpha_n}$$

entsprechen. Die Substitution

$$(9)\qquad V = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \end{pmatrix}$$

wird die Periode zwei besitzen, da eine Wiederholung der symmetrischen Umformung zur Identität führt.

Bezeichnen wir nun mit

$$(10)\qquad (0), (1), (2), \ldots, (\varrho)$$

die Stücke

$$b_\varrho O,\ O b_1,\ b_1 b_2, \ldots, b_{\varrho-1} b_\varrho,$$

in welche die Axe der reellen Zahlen durch die Punkte $O, b_1, b_2, \ldots, b_\varrho$ zerlegt wird, so finden wir für die Substitution V bez.

$$(11)\qquad V = U,\ V = U_1 U,\ V = U_2 U, \ldots, V = U_\varrho U,$$

je nachdem der Punkt P auf dem Stücke (0) oder (1) oder (2), ... oder (ϱ) angenommen wird. Die Gleichungen

$$(12)\qquad U^2 = 1,\ (U_1 U)^2 = 1,\ (U_2 U)^2 = 1, \ldots, (U_\varrho U)^2 = 1$$

stehen mit den Gleichungen (7), wie man leicht erkennt, in Einklang.

Die Substitutionen (11) dienen vor allem dazu, festzustellen, in welcher Weise sich die einzelnen Stücke der Axe der reellen Zahlen zu den Uebergangslinien*) der Fläche F zusammenschliessen.

Wir bemerken noch, dass die Gleichungen (7) ersetzt werden können durch die Gleichungen (12) und die Gleichungen

$$(13)\qquad S_i U \Sigma_i = U \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

§ 2.

Flächen mit einfachen, paarweise conjugirt imaginären Verzweigungspunkten.

Betrachten wir die n-blättrigen Riemann'schen Flächen, mit den gegebenen Verzweigungswerthen

$$a_1, a_2, \ldots, a_w,$$

so werden diese Flächen theils sich selber conjugirt, theils paarweise einander conjugirt sein, wenn wir annehmen, dass $a_1, a_2, \ldots, a_w$ theils reell, theils paarweise conjugirt imaginär sind. (Würden wir die Bestimmung jener Flächen von einer algebraischen Gleichung abhängig machen, so würden bei geeigneter Wahl der Unbekannten, den sich selbst conjugirten Flächen die reellen Wurzeln der Gleichung entsprechen).

Die Erörterungen des vorigen Paragraphen setzen uns nun in Stand, die sich selbst conjugirten Flächen von den übrigen zu trennen und den verschiedenen Arten von Uebergangslinien entsprechend in Gruppen einzutheilen.

Die allgemeine Durchführung der hierzu erforderlichen Untersuchungen vermag ich hier nicht zu geben; vielmehr muss ich mich begnügen, die wesentlichen Punkte in einem einfachen Falle zu besprechen.

Dieser Fall sei derjenige, in welchem die $w = 2\mu$ Verzweigungswerthe paarweise conjugirt imaginär sind, etwa

$$a_w = \bar{a}_1,\ a_{w-1} = \bar{a}_2, \ldots, a_{\mu+1} = \bar{a}_\mu,$$

*) Siehe F. Klein, l. c.

und in welchem überdies nur diejenigen Flächen betrachtet werden, welche in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ einfach verzweigt sind.

Diese Flächen sind, nach Festlegung der Linien

$$l_1, l_2, \ldots, l_\mu, \bar{l}_\mu, \ldots, \bar{l}_2, \bar{l}_1,$$

einzeln zugeordnet den Systemen von $w = 2\mu$ Transpositionen

$$(1) \qquad t_1, t_2, \ldots, t_\mu, \tau_\mu, \ldots, \tau_2, \tau_1,$$

welche den mehrfach erwähnten Bedingungen (vgl. I, § 1) genügen. Einem Systeme entspricht eine sich selbst conjugirte Fläche, wenn die Gleichungen

$$(2) \qquad \tau_1 = Ut_1U, \ \tau_2 = Ut_2U, \ldots, \tau_\mu = Ut_\mu U, \ U^2 = 1$$

durch eine Substitution U befriedigt werden können. Eine sich selbst conjugirte Fläche F kann daher schon durch das System der $\mu + 1$ Substitutionen

$$(3) \qquad t_1, t_2, \ldots, t_\mu, U$$

charakterisirt und dem entsprechend mit

$$(4) \qquad F = (t_1, t_2, \ldots, t_\mu, U)$$

bezeichnet werden. Die Bedingungen, welchen das System (1) genügen muss, übertragen sich nun auf das System (3) in folgender Weise. Erstens muss, der Bedingung $t_1 t_2 \ldots t_\mu \tau_\mu \ldots \tau_2 \tau_1 = 1$ entsprechend,

$$(5) \qquad TU = UT$$

sein, wenn wir zur Abkürzung

$$(6) \qquad T = t_1 t_2 \ldots t_\mu$$

setzen. Ferner müssen, da vermöge

$$t_1, t_2, \ldots, t_\mu, Ut_1U, \ldots, Ut_\mu U$$

ein Uebergang von jedem Elemente zu jedem anderen möglich sein soll, die Substitutionen (3) alle Elemente mit einander in Verbindung setzen, oder, was dasselbe ist, die Substitutionen (3) müssen eine transitive Gruppe erzeugen. Sodann bemerke man, dass nicht zugleich

$$U = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \ldots \left(a_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}}\right)$$

und ein Theil der Transpositionen $t_1, \ldots, t_\mu$ nur die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$, ein anderer Theil nur die Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_{\frac{n}{2}}$ in Verbindung setzen darf. Denn sonst würden auch

$$t_1, \ldots, t_\mu, Ut_1U, \ldots, Ut_\mu U$$

nur die Elemente a unter sich und die Elemente b unter sich verbinden. Man erkennt nun ohne Schwierigkeit, dass diese für das System (3) nothwendigen Bedingungen auch hinreichen. Mit andern Worten:

„Die sich selbst conjugirten Flächen F sind einzeln zugeordnet den Systemen (3), welche alle Elemente in Verbindung setzen (oder eine transitive Gruppe erzeugen) und den Gleichungen

(7) $$U^2 = 1, \quad TU = UT, \quad \text{wobei} \quad T = t_1 t_2 \ldots t_\mu$$

gesetzt ist, genügen."

Auszuschliessen sind dabei (im Falle eines geraden n) diejenigen Systeme, für welche

$$U = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \ldots \left(a_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}}\right) \quad \text{und} \quad t_1, t_2, \ldots, t_\mu$$

nur die Elemente a unter sich und die Elemente b unter sich verbinden.*) Uebrigens sind natürlich wieder in einander transformirbare Systeme (3) als nicht verschieden anzusehen.

Der allgemeine Ausdruck einer Substitution U, welche der Bedingung $U^2 = 1$ genügt, ist offenbar dieser:

(8) $$U = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \ldots (a_r b_r)(c_1)(c_2) \ldots (c_s),$$

wo $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r, c_1, \ldots, c_s$ die n Elemente in irgend einer Reihenfolge bezeichnen. Dabei sind r und s irgend zwei nicht negative Zahlen, welche die Gleichung

$$s + 2r = n$$

befriedigen. Für den Fall $r = 0$ reducirt sich U auf die Identität.

Es mögen jetzt α_i und β_i die beiden Elemente a_i und b_i in einer der beiden möglichen Reihenfolgen bedeuten, so dass also entweder $\alpha_i = a_i$ und $\beta_i = b_i$ oder $\alpha_i = b_i$ und $\beta_i = a_i$ ist. Dann wird.

(9) $$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \ldots & a_r & b_r \\ \alpha_{i_1} & \beta_{i_1} & \alpha_{i_2} & \beta_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_r} & \beta_{i_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_s \\ c_{k_1}, & c_{k_2}, & \ldots, & c_{k_s} \end{pmatrix}$$

die allgemeinste mit U vertauschbare Substitution vorstellen, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_r$ und $k_1, k_2, \ldots, k_s$ die Indices $1, 2. \ldots, r$ bez. $1, 2, \ldots, s$ in irgend einer Reihenfolge bezeichnen.

Diejenigen sich selbst conjugirten Flächen, für welche U und T dieselben Substitutionen sind, wollen wir in eine Classe $[U, T]$ rechnen. Jede der Classe $[U, T]$ angehörende Fläche besitzt so viele Uebergangslinien, als die Substitution

$$\begin{pmatrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_s \\ c_{k_1}, & c_{k_2}, & \ldots, & c_{k_s} \end{pmatrix}$$

Cyklen hat. Denn die Punkte auf der Axe der reellen Zahlen, welche in den Blättern $c_1, c_2, \ldots, c_s$ liegen, bleiben bei der symmetrischen

*) Dies ist nämlich der *einzige* Fall, in welchem die durch $t_1, t_2, \ldots, t_{\mu-1} U$ erzeugte Gruppe transitiv, dagegen die durch $t_1, t_2, \ldots, t_\mu, Ut_1U, \ldots, Ut_\mu U$ erzeugte Gruppe intransitiv ist.

Umformung der Fläche fest und bei einer Ueberschreitung des Punktes O, von welchem die Linien $l_1, \ldots, l_w, \ldots, \bar{l}_1$ ausgehen, erfahren die Blätter der Fläche gerade die Substitution $t_1 t_2 \ldots t_\mu = T$.

Die Anzahl der Flächen, welche der Classe $[U, T]$ angehören, finden wir, indem wir die Zahl der Lösungen von

$$t_1 . t_2 \ldots t_\mu = T \tag{10}$$

bestimmen, dabei jedoch nur diejenigen Lösungen $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ zählen, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen. Die Bestimmung dieser Zahl lässt sich durch ähnliche Betrachtungen ausführen, wie wir sie in Abschnitt I angestellt haben. Ich habe indessen nur den Fall

$$w = 2\mu = 2n - 2,$$

in welchem es sich also um Flächen vom Geschlecht Null handelt, näher untersucht und will hier die erhaltenen Resultate mittheilen.

§ 3.

Flächen vom Geschlecht Null.

Betrachten wir in den n Blättern einer Riemann'schen Fläche die Axen der reellen Zahlen, so werden sich dieselben auf der Fläche zu einer oder mehreren geschlossenen Linien zusammensetzen. Diese Linien will ich „Realitätslinien" nennen. Dieselben können einander oder sich selber nur in Verzweigungspunkten begegnen. Wenn keiner der Verzweigungspunkte reell ist, so setzt sich die einzelne Realitätslinie aus den Axen gewisser Blätter zusammen, jede Axe in ihrer ganzen Ausdehnung genommen. Die Anzahl dieser Axen möge dann die Multiplicität der Realitätslinie heissen. Die Multiplicität giebt offenbar an, wie oft sich der einzelne reelle Werth auf der Realitätslinie vorfindet.

Auf einer sich selbst conjugirten Fläche gehören die Uebergangslinien zu den Realitätslinien. Diejenigen Realitätslinien, welche nicht zugleich Uebergangslinien sind, werden entweder sich selbst symmetrisch oder paarweise zu einander symmetrisch sein.

Betrachten wir jetzt eine sich selbst conjugirte Fläche vom Geschlechte Null, deren $w = 2\mu$ Verzweigungswerthe paarweise conjugirt imaginär sind, so sind nur folgende Möglichkeiten vorhanden:

1) Es ist eine Uebergangslinie vorhanden, welche als Realitätslinie die Multiplicität s besitzt. Ferner giebt es je $2\mu_1, 2\mu_2, 2\mu_3, \ldots$ paarweise symmetrische Realitätslinien von den bez. Multiplicitäten $1, 2, 3, \ldots$.

Die Fläche möge in diesem Falle vom „Charakter"

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$$

heissen. Die „Charaktere" $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$, können irgend welche ganzzahlige Werthe besitzen, die nicht negativ sind und der Gleichung

$$s + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots) = n$$

genügen.

2) Es ist keine Uebergangslinie vorhanden; dagegen giebt es eine sich selbst symmetrische Realitätslinie von der Multiplicität 2ϱ, ferner je $2\mu_1, 2\mu_2, 2\mu_3, \ldots$ paarweise symmetrische Realitätslinien von den bez. Multiplicitäten $1, 2, 3, \ldots$.

Die Fläche möge in diesem Falle vom „Charakter"

$$(\varrho;\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$$

heissen. Die „Charaktere" $\varrho, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ können irgend welche ganzzahlige Werthe besitzen, die nicht negativ sind und der Gleichung

$$2\varrho + 2(\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots) = n$$

genügen. Für die Zahl ϱ ist der Werth Null ausgeschlossen. Die oben erwähnten auf Anzahlen bezüglichen Resultate fasse ich nun in folgendem Satze zusammen:

Unter den n-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null mit gegebenen paarweise conjugirten Verzweigungswerthen giebt es

$$(n-1)!\ (r+s)^{\lambda-2} \cdot \frac{s^s}{s!} \cdot \prod_k \frac{1}{\mu_k!} \left(\frac{k^{2k-1}}{k!\,k!}\right)^{\mu_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

sich selbst conjugirte Flächen vom Charakter $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$.

Dabei ist zur Abkürzung

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots = \lambda,$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots = r,$$

gesetzt, und es besteht ferner die Gleichung

$$s + 2r = n.$$

Ferner giebt es (falls n eine gerade Zahl ist) unter jenen Flächen

$$(n-1)!\ (r+\varrho)^{\lambda-2} \cdot \cdot \frac{(2\varrho)^{2\varrho}}{(2\varrho)!} \prod_k \frac{1}{\mu_k!} \left(\frac{k^{2k-1}}{k!\,k!}\right)^{\mu_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

sich selbst conjugirte Flächen vom Charakter $(\varrho;\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$, *wobei zur Abkürzung*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots = \lambda,$$
$$\varrho + \mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots = r = \frac{n}{2}$$

gesetzt ist.

IV. Abschnitt.

Analytische Bestimmung der drei- und vierblättrigen Flächen.

In den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ gelingt es, wie Herr Thomae gezeigt hat*), mit Hülfe von ϑ-Functionen solche n-werthige algebraische Functionen herzustellen, deren w Verzweigungswerthe gegeben sind. Die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w Verzweigungspunkten beträgt nun (vgl. I, § 5) in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ bez.

$$N = \frac{3^{w-2}-1}{2} \quad \text{und} \quad N = (2^{w-4}-1)\cdot\frac{3^{w-2}-1}{2}$$

und ebensoviele wesentlich verschiedene algebraische Functionen müssen in diesen Fällen (nach den Riemann'schen Existenztheoremen)**) existiren.

Es erschien mir nun interessant, zu untersuchen, ob man, Herrn Thomae's Ideengang folgend, die richtige Anzahl N von Functionen erhält.

Dass dies in der That der Fall ist, will ich im Folgenden zeigen. Dabei werde ich das Verfahren des Herrn Thomae in einer für den vorliegenden Zweck geeigneten Weise darstellen.

§ 1.

Beziehung einer n-blättrigen Fläche auf eine zweiblättrige.

Gegeben sei eine n-blättrige Riemann'sche Fläche F vom Geschlecht p mit

$$w = 2p + 2n - 2$$

Verzweigungspunkten. Indem wir, wie früher, von einem Punkte O aus die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ nach den Verzweigungspunkten legen, bezeichnen wir die Fläche durch die diesen Linien entsprechenden Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$, setzen also

$$F = (t_1, t_2, \ldots, t_w).$$

Machen wir die hypothetische Annahme, dass eine wie diese Fläche verzweigte algebraische Function y existirt, so werden die Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dieser Function, welche in übereinander liegenden Punkten der n Blätter Statt finden, gerade die Transposition t_i erfahren, wenn wir den i^{ten} Verzweigungspunkt umkreisen.

Wir legen jetzt unter die Fläche F eine zweiblättrige (also hyperelliptische) Fläche F' mit denselben w Verzweigungspunkten. Bedeutet t die eine bei zwei Elementen mögliche Transposition, so wird die Fläche F' durch

*) Mathematische Annalen Bd. 6, pag. 612 und Bd. 18, pag. 443.

**) Diese Theoreme, welche ich im Folgenden nicht voraussetzen werde, sind bekanntlich von den Herren Neumann und Schwarz bewiesen worden.

$$F' = (t, \ldots, t)$$

zu bezeichnen sein. Es ist unmittelbar klar, dass Functionen existiren, welche wie F' verzweigt sind; eine solche Function ist ja z. B.

$$y = \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_w)},$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_w$ die Verzweigungswerthe bedeuten.

Wir verpflanzen jetzt an irgend eine Stelle der Fläche F' die über derselben auf der Fläche F liegenden Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und setzen diese, indem wir die Stelle auf der Fläche F' sich in Bewegung setzen lassen, stetig über die Fläche F' fort.

Umkreisen wir auf der Fläche F' einen beliebig gewählten Punkt, so gehen die Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einzeln in sich über. Dies ist ohne Weiteres deutlich, wenn jener Punkt kein Verzweigungspunkt ist. Wenn aber der Punkt ein Verzweigungspunkt sein sollte, so erfordert seine Umkreisung auf der Fläche F' eine doppelte Umkreisung in der x-Ebene, und daher werden auch in diesem Falle $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sich einzeln reproduciren. Diese Thatsache kann dahin ausgesprochen werden:

Eine wie die Fläche F verzweigte algebraische Function y ist auf der hyperelliptischen Fläche F' zwar mehrwerthig (nämlich n-werthig), aber unverzweigt.

Zerschneiden wir die Fläche F' in eine einfach zusammenhängende und setzen auf dieser einen der n Werthe von y, von irgend einer Stelle ausgehend, stetig fort, so erhalten wir einen eindeutigen Zweig der Function y.

Die n Zweige der Function y erfahren dann beim Ueberschreiten einer Schnittlinie eine bestimmte Vertauschung. Man erhält eine Fläche auf welcher y einwerthig ist, wenn man n Exemplare der zerschnittenen Fläche F' übereinanderdeckt und dieselben längs jeder Begrenzungslinie der zugehörigen Vertauschung entsprechend verbindet.

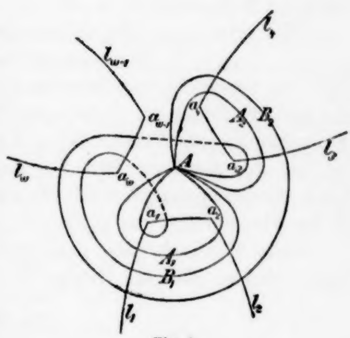


Fig. 9.

Diese Vertauschungen sollen jetzt unter Annahme einer bestimmten Zerschneidung der Fläche F' bestimmt werden.*) Die geschlossene Linie L werde wie früher durch die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ so gelegt, dass die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ ganz in dem einen Theile G der Ebene verlaufen, welcher von L begrenzt

*) Vgl. für das Nachfolgende die Figur 9.

wird. Die beiden Blätter der Fläche F' mögen längs der Stücke $a_1 a_2, a_3 a_4, \ldots, a_{w-1} a_w$ der Linie L zusammenhängen. Wir nehmen nun in dem Theile G' der Ebene einen Punkt A an und lassen in diesem Punkte die Schnitte beginnen und endigen. Jeder Uebergangslinie

$$a_{2i-1}\, a_{2i} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \mu = \frac{w}{2} - 1\right)$$

entsprechend führen wir zwei Schnitte A_i, B_i. Der Schnitt A_i verläuft ganz im oberen Blatte und umkreist die Punkte $a_{2i-1} a_{2i}$. Der Schnitt B_i beginnt im oberen Blatte, führt, um den Punkt a_{2i-1} laufend, in's untere Blatt, läuft in diesem bis zur Uebergangslinie $a_{w-1} a_w$, tritt sodann wieder in's obere Blatt, in welchem derselbe, die Linien $l_w, l_1, l_2, \ldots, l_{2i}$ überschreitend, wieder in A mündet.

Nach Ausführung dieser Schnitte

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\mu, B_\mu \quad \left(\mu = \frac{w}{2} - 1\right)$$

ist die Fläche F' in eine einfach zusammenhängende übergegangen.

Der Schnitt B_i führt von der positiven auf die negative Seite von A_i, der Schnitt A_i von der negativen auf die positive Seite von B_i. Umkreist man im oberen Blatte den Punkt A in positivem Sinne, so überschreitet man die Schnitte in folgender Reihenfolge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \; A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- \ldots A_\mu^+ B_\mu^+ A_\mu^- B_\mu^- ;$$

dabei bedeuten die oberen Indices $+$ und $-$, dass das Ueberschreiten von der negativen auf die positive bez. von der positiven auf die negative Seite erfolgt.

Wir betrachten jetzt auf der zerschnittenen Fläche F' die n Zweige $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Function y, von welchen jeder einzelne eindeutig über die zerschnittene Fläche ausgebreitet ist. Bedeuten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die auf der negativen Seite einer der Linien A_i, B_i in einem Punkte P stattfindenden Werthe der n Zweige von y, ferner $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ die auf der positiven Seite in demselben Punkte P der betreffenden Linie stattfindenden Werthe, so unterscheiden sich $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ nur in der Reihenfolge von $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Beim Ueberschreiten jener Linie von der negativen zur positiven Seite erfahren also die Zweige die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix},$$

d. h. man gelangt von dem Zweige y_k' in den Zweig $y_k (k = 1, 2, \ldots, n)$. Da die Linie A_i von der negativen auf die positive Seite der Linie B_i führt, so erhalten wir die B_i entsprechende Substitution S, indem wir feststellen, welche Vertauschung $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nach Durchlaufung der Linie A_i erfahren haben.

Ebenso bestimmen wir die A_i entsprechende Substitution, indem wir feststellen, wie sich $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bei Durchlaufung der Linie B_i vertauschen.

Auf diese Weise finden wir die folgenden, den Linien $A_1, B_1, \ldots, A_\mu, B_\mu$ entsprechenden Substitutionen:

Wir bilden aus den Transpositionen $t_1, t_2, \ldots, t_w$ die folgenden Substitutionen:

$$\begin{aligned}
S_1 &= t_1 t_2 \ldots t_{w-1} = t_w,\\
S_2 &= t_2 \ldots t_{w-1} = t_1 t_w,\\
S_3 &= t_3 \ldots t_{w-1} = t_2 t_1 t_w,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_{w-1} &= t_{w-1} = t_{w-2} \ldots t_2 t_1 t_w.
\end{aligned}$$

Beim Uebertritt von der negativen zur positiven Seite erfahren dann die n Zweige $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\begin{aligned}
&\textit{längs } A_i \textit{ die Substitution } S_{2i-1}^{-1} \cdot S_{2i+1}^{-1} \cdot S_{2i} = U_i,\\
&\textit{längs } B_i \textit{ die Substitution } S_{2i+1}^{-1} \cdot S_{2i-1} \qquad = V_i.
\end{aligned}$$

Man erhärtet leicht die Relation

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_\mu V_\mu U_\mu^{-1} V_\mu^{-1} = 1,$$

welche nichts anderes besagt, als dass bei einer positiven Umkreisung des Punktes A jeder Zweig in sich übergeht.

Die Substitutionen U_i und V_i lassen sich in die Gestalt

$$U_i = S_{2i-1}^{-1} (t_w t_1 t_2 \ldots t_{2i} t_{2i-1}) S_{2i-1}, \qquad V_i = S_{2i+1}^{-1} (t_{2i-1} t_{2i}) S_{2i+1}$$

bringen, woraus erhellt, dass die erstere einem Producte von $2i+2$, die letztere einem Producte von zwei Transpositionen ähnlich ist.

Die Gruppe, welche die Substitutionen U_i, V_i erzeugen, also die Monodromiegruppe von y auf der Fläche F', ist daher in der alternirenden Gruppe enthalten. Man kann aber leicht zeigen, dass sie mit der alternirenden Gruppe identisch ist. In der That können die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$ nach dem Satze von Lüroth immer so gewählt werden, dass

$$t_w = (y_1 y_2), \quad t_1 = (y_1 y_2), \quad t_2 = (y_1 y_3),$$
$$t_3 = (y_1 y_3), \ldots, t_{2n-6} = (y_1 y_n), \quad t_{2n-5} = (y_1 y_{n-1})$$

und alle folgenden Transpositionen t gleich $(y_1 y_n)$ werden. Bei dieser Wahl der Linien l finden wir aber

$$(1) \quad \begin{cases} U_1 = (y_1 y_2 y_3), & U_2 = (y_1 y_3 y_4), \ldots, U_{n-2} = (y_1 y_{n-1} y_n),\\ V_1 = (y_1 y_3 y_2), & V_2 = (y_1 y_4 y_3), \ldots, V_{n-2} = (y_1 y_n y_{n-1}),\end{cases}$$

während alle übrigen Substitutionen U_i, V_i sich auf die Identität reduciren. Die Substitutionen (1) erzeugen aber, wie leicht zu sehen,

die alternirende Gruppe, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung folgt.

Man kann diese Betrachtungen in etwas abändern, indem man die Fläche F' von vornherein als diejenige Fläche einführt, welche die Verzweigung des Differenzenproductes $\prod_{i \gtrless k} (y_i - y_k)$ darstellt. Auch bemerkt man, dass die hypothetische Annahme einer Function y, welche wie F verzweigt ist, hätte vermieden werden können, indem die Sätze dieses Paragraphen im Grunde nur rein topologische Beziehungen der Flächen F und F' aussprechen.

§ 2.

Der Fall $n = 3$.

Wenn jetzt die Fläche F als eine dreiblättrige, also $n = 3$ vorausgesetzt wird, so sind die Substitutionen U_i, V_i sämmtlich Potenzen der cyklischen Substitution

$$S = (y_1 y_2 y_3).$$

Daher ist der Lagrange'sche Ausdruck

$$z = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3, \tag{1}$$

wo α eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bedeutet, eine auf der Fläche F' unverzweigte Function, welche beim Ueberschreiten einer der Linien A_i, B_i einen Factor α^k $(k = 0, 1, 2)$ erhält. Die Function z ist also eine Wurzelfunction dritten Grades auf der Fläche F'. Diese Functionen lassen sich aber bekanntlich durch Integrale dritter Gattung oder auch durch ϑ-Functionen darstellen*). Wir versuchen die Darstellung für den Fall, in welchem y auf der Fläche F in $p + 1$ Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ einfach unendlich wird. Die Summe $y_1 + y_2 + y_3$ ist dann eine rationale Function von x, welche nur für $x = a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ und zwar höchstens von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich werden kann und sich daher auf eine Constante reducirt. Indem wir y um eine geeignete Constante vermehren, erreichen wir, dass

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \tag{2}$$

wird. Das Geschlecht μ der zweiblättrigen Fläche F' ist

$$\mu = \frac{w}{2} - 1 = p + 1.$$

Es mögen nun

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu$$

*) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, Art. 25 und 26.

die nach Riemann's Vorschrift bestimmten Normalintegrale erster Gattung der Fläche F' bezeichnen, wobei wir die oben angegebene Zerschneidung der Fläche F' zu Grunde legen. Ferner seien

$$u_\nu^{(k)} \; (k = 1, 2, \ldots, p+1)$$

die Werthe des Integrales u_ν in den Verzweigungspunkten

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p+1},$$

und endlich sei

(3) $$e_\nu = \sum_k u_\nu^{(k)}.$$

Die Wurzelfunction (1) drückt sich dann als ϑ-Quotient in der Gestalt aus:

(4) $$y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 = c \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

wo c eine Constante und $g_1, \ldots, g_\mu$, $h_1, \ldots, h_\mu$ Drittel ganzer Zahlen bedeuten.

Auf einem geeigneten Wege, welcher von einer Stelle der Fläche zu der entsprechenden Stelle des anderen Blattes führt, werden sich y_2 und y_3 vertauschen. Gehen dabei gleichzeitig $u_1, \ldots, u_\mu$ in $u_1', \ldots, u_\mu'$ über, so erhalten wir aus (4):

(5) $$y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3 = c \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu' - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu' - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu (u_\nu' - e_\nu)}.$$

Nun ist bekanntlich

(6) $$u_\nu + u_\nu' \equiv 2u_\nu^{(1)} \equiv 2u_\nu^{(2)} \cdots \equiv 2u_\nu^{(p+1)} \equiv 2u_\nu^{(p+2)}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu)$$

wo sich das Congruenzzeichen auf die Perioden der Integrale bezieht und $u_\nu^{(p+2)}$ den Werth von u_ν in dem Verzweigungspunkt a_{p+2} bedeutet. Ferner können wir

(7) $$e_\nu = \sum_{k=1}^{p+1} u_\nu^{(k)} \equiv u_\nu^{(p+2)}$$

annehmen*). Aus (6) und (7) folgt:

(8) $$u_\nu' - e_\nu \equiv -(u_\nu - e_\nu) - 2(e_\nu - u_\nu^{(p+2)}) \equiv -(u_\nu - e_\nu).$$

Und somit geht die Gleichung (5), da ϑ eine gerade Function ist, über in:

---

*) Vgl. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale (Leipzig 1884) pag. 367.

$$(9)\quad y_1+\alpha^2 y_2+\alpha y_3=c\cdot\alpha'\cdot\frac{\vartheta\left(u_\nu-e_\nu+g_\nu\pi i+\sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu-e_\nu)}\cdot e^{2\sum_1^\mu h_\nu(u_\nu-e_\nu)},$$

wo α' eine dritte Einheitswurzel bezeichnet.

Aus den Gleichungen (2), (4) und (9) erhalten wir nun y_1, y_2, y_3 und zwar kommt, indem wir eine geeignet gewählte unter diesen Grössen mit y bezeichnen:

$$(10)\qquad y=c\left[\frac{\vartheta\left(u_\nu-e_\nu-g_\nu\pi i-\sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu-e_\nu)}\cdot e^{-2\sum_1^\mu h_\nu(u_\nu-e_\nu)}\right.$$
$$\left.+\frac{\vartheta\left(u_\nu-e_\nu+g_\nu\pi i+\sum_1^\mu h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu-e_\nu)}\cdot e^{2\sum_1^\mu h_\nu(u_\nu-e_\nu)}\right].$$

Der Ausdruck (10), welchen wir für y gefunden haben, erfüllt nun aber auch, wie man sofort übersieht, alle erforderlichen Bedingungen: er stellt eine dreiwerthige algebraische Function von x dar, welche die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ zu einfachen Verzweigungspunkten besitzt.

Die Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\mu, h_1, h_2, \ldots, h_\mu$ können alle Werthe der Gestalt

$$g_1=\frac{\varepsilon_1}{3},\quad g_2=\frac{\varepsilon_2}{3},\ \ldots,\ g_\mu=\frac{\varepsilon_\mu}{3},\quad h_1=\frac{\eta_1}{3},\quad h_2=\frac{\eta_2}{3},\ \ldots,\ h_\mu=\frac{\eta_\mu}{3},$$

erhalten, wo $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\mu, \eta_1, \ldots, \eta_\mu$ ganze nicht sämmtlich verschwindende Zahlen bedeuten. Da aber der Ausdruck (10) unverändert bleibt, wenn wir das System (g, h) durch $(-g, -h)$ ersetzen, und sich nur um einen constanten Factor ändert, wenn eine der Zahlen g, h um eine Einheit wächst oder abnimmt, so erhalten wir genau

$$\frac{3^{2\mu}-1}{2}=\frac{3^{w-2}-1}{2}$$

verschiedene Functionen y, also in der That gerade so viele, als es nach I., § 5 verschiedene dreiblättrige Flächen mit w Verzweigungspunkten giebt.

§ 3.

Der Fall $n=4$.

Wir betrachten jetzt den Fall $n=4$. Es ist die Aufgabe, eine algebraische Function y zu bestimmen, welche wie eine gegebene vierblättrige Fläche F mit den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt ist. Wir werden wieder annehmen, dass die zu bestimmende Function y in den Punkten

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p+1} \quad \left(p = \frac{w}{2} - 3\right)$$

von der ersten Ordnung unendlich wird. Bezeichnen wir mit y_1, y_2, y_3, y_4 die Werthe, welche y in vier übereinanderliegenden Punkten der Fläche F annimmt, so erfahren die Quadrate der Grössen

$$(1) \qquad \begin{cases} z = z_1 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4, \\ z_2 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4, \\ z_3 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \end{cases}$$

bei einem Umlauf um einen der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ eine Permutation, welche in einer Vertauschung zweier jener Quadrate besteht. Daher ist z^2 wie eine dreiblättrige Fläche F'' mit den einfachen Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt und z selber ist auf der Fläche F'' eine Wurzelfunction zweiten Grades, welche in den $p+1$ Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Das Geschlecht γ der Fläche F'' ist gleich $p+1$. Bedeuten $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$ Normalintegrale erster Gattung der Fläche F'', so kommt bei geeigneter Bestimmung der Constanten $e_1, e_2, \ldots, e_\gamma$:

$$(2) \qquad z = z_1 = c \cdot \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum_1^\gamma h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum_1^\gamma h_\nu(u_\nu - e_\nu)},$$

wo c eine Constante und $g_1, \ldots, g_\gamma, h_1, \ldots, h_\gamma$ Hälften ganzer Zahlen bezeichnen. Zur Abkürzung werde die rechte Seite von (2) gleich $\psi(u_\nu)$ gesetzt, ferner seien $u_1, \ldots, u_\gamma, u_1', \ldots, u_\gamma', u_1'', \ldots, u_\gamma''$ die Werthe der Integrale erster Gattung in übereinanderliegenden Punkten der Fläche F''. Dann ergiebt sich, unter Wiederholung der Gleichung (2):

$$(3) \qquad \begin{cases} z_1 = \psi(u_\nu), \\ z_2 = \psi(u_\nu'), \\ z_3 = \psi(u_\nu''). \end{cases}$$

Da nun $y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ eine Constante ist, welche wir gleich Null annehmen dürfen, so folgt endlich in Rücksicht auf (1):

$$(4) \qquad y = y_1 = \frac{1}{4}\left(\psi(u_\nu) + \psi(u_\nu') + \psi(u_\nu'')\right).$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser für y gefundene Ausdruck allen Bedingungen genügt; d. h. nehmen wir irgend eine an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ einfach verzweigte dreiblättrige Fläche F'' an und construiren auf ihr die Function $\frac{1}{4}[\psi(u_\nu) + \psi(u_\nu') + \psi(u_\nu'')]$, so wird dieselbe eine algebraische vierwerthige Function sein, welche an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ einfach verzweigt ist. Die Anzahl dieser Func-

tionen können wir nun leicht abzählen. Die Zahl der dreiblättrigen Flächen, welche wir für F''' annehmen können, beträgt

$$\frac{3^{w-2}-1}{2}.$$

Ferner gestatten die in $\psi(u_\nu)$ auftretenden Hälften ganzer Zahlen $g_1, \ldots, g_\gamma, h_1, \ldots, h_\gamma$ $2^{2\gamma}-1=2^{w-4}-1$ wesentlich verschiedene Bestimmungen. Wir erhalten also für die gesuchte Anzahl den Werth

$$\frac{(2^{w-4}-1)(3^{w-2}-1)}{2},$$

welcher mit der früher (I, § 5) bestimmten Zahl der vierblättrigen Flächen mit w gegebenen Verzweigungspunkten übereinstimmt.

§ 4
Anschliessende Bemerkungen.

Die vorstehenden Betrachtungen verdanken ihren Erfolg offenbar denselben Thatsachen, welche die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichungen 3. und 4. Grades ermöglichen. Aehnliche Betrachtungen lassen sich für diejenigen n-blättrigen Flächen anstellen, deren Monodromiegruppen besondere Eigenschaften besitzen, worauf wir indessen nicht näher eingehen wollen. Es mag nur noch ein anderer Umstand hervorgehoben werden, welcher aus den obigen Entwicklungen hervorgeht. Es ist dieses der Zusammenhang des Problemes, die 3- und 4-blättrigen Flächen mit gegebenen einfachen Verzweigungspunkten zu bestimmen, mit der Drei-Theilung der hyperelliptischen Functionen. Dieser Zusammenhang ist in einem speciellen Falle auch schon in der Literatur hervorgetreten. Handelt es sich um die Aufgabe, die Büschel binärer Formen 4. Grades zu bestimmen, deren Discriminante eine gegebene Function (vom 6ten Grade in dem Parameter des Büschels) ist, so kommt dies offenbar auf die Bestimmung der 4-blättrigen Riemann'schen Flächen vom Geschlecht Null mit gegebenen Verzweigungspunkten hinaus. Nun lässt sich jene Aufgabe, wie Hilbert (l. c.) gezeigt hat, auf ein von Clebsch behandeltes Problem*) zurückführen. Das letztere verlangt eine binäre Form 6. Grades in die Gestalt v^3-u^2 zu setzen, wo v und u Formen 3. und 2. Grades bedeuten. C. Jordan bemerkte nun, dass die Gruppeneigenschaften dieses Problemes genau mit denjenigen übereinstimmen, welche das Problem der Drei-Theilung der hyperelliptischen Functionen

*) Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. Mathem. Annalen Bd. 2, pag. 193. Vgl. auch Burkhardt: „Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein." Mathem. Annalen Bd. 35, pag. 255.

($p = 2$) besitzt. Clebsch zeigte sodann auch direct den inneren Zusammenhang beider Probleme. Die erwähnten Gruppeneigenschaften lassen sich übrigens, wie wir noch bemerken wollen, auf Grund der allgemeinen Sätze des zweiten Theiles vorliegender Arbeit herleiten.

V. Abschnitt.

Flächen, welche über einer gegebenen Fläche ausgebreitet sind.

§ 1.

Einführung und Vergleich von Flächen F, welche über einer festen Fläche Φ ausgebreitet sind.

Die complexe Zahlenebene lässt sich als die einfachste Riemann'sche Fläche vom Geschlecht Null ansehen. Von diesem Gesichtspunkte aus bietet sich sofort eine Verallgemeinerung des Problemes, welches allen vorstehenden Entwicklungen zu Grunde liegt. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass wir nicht mehr nach den Flächen fragen, welche über der complexen Zahlenebene, sondern nach denjenigen, welche über einer gegebenen Riemann'schen Fläche ausgebreitet sind*). Die letztere werde ich in der Folge stets mit Φ bezeichnen, ihr Geschlecht mit p. Die fest gegebene Fläche Φ kann man sich entweder mehrblättrig über einer complexen Zahlenebene ausgebreitet denken, oder auch als eine frei im Raume liegende geschlossene Ringfläche mit p Löchern. Man kann noch weiter gehen und die Fläche Φ in Gestalt irgend einer zweidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit von $(2p+1)$-fachen Zusammenhange annehmen**). Die Vorstellung der Ringfläche ist besonders bequem für solche Betrachtungen, welche der Analysis situs angehören.

Ich gehe nun dazu über die oben erwähnte Verallgemeinerung unseres Problemes näher zu entwickeln. Wir zerschneiden die Fläche Φ durch die Riemann'schen Schnitte

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_p, B_p$$

in eine einfach zusammenhängende Fläche. Diese Schnitte lassen wir sämmtlich in ein und demselben Punkte O der Fläche beginnen und endigen. Deuten wir durch die Indices $+$ und $-$ ein Ueberschreiten von der negativen auf die positive bez. von der positiven auf die negative Seite einer Linie an, so sollen die Schnitte bei einem positiven Umlauf um den Punkt O in der Folge

$$A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- A_2^+ B_2^+ A_2^- B_2^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-$$

*) Vgl. W. Dyck's in der Einleitung citirte Abhandlungen.

**) F. Klein: „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie". Diese Annalen Bd. 21, pag. 141.

überschritten werden. Es ist dieses dieselbe Wahl der Schnitte, welche oben (IV, § 1) bei der hyperelliptischen Fläche F' in Anwendung kam.

Auf der Fläche Φ seien nun w Punkte

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_w$$

gegeben. Wir nehmen an, der Punkt O sei so gewählt, dass er mit keinem dieser w Punkte zusammenfällt und wir verbinden O mit den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ durch Schnitte $l_1, l_2, \ldots, l_w$, welche weder einander noch einem der Schnitte A_i, B_i begegnen. Bei einer positiven Umkreisung des Punktes O mögen die Schnitte in der Folge

$$(2) \qquad l_1^+ l_2^+ \ldots l_w^+ A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-$$

überschritten werden. Die Fläche Φ sei nach Ausführung aller Schnitte in die Fläche Φ^* übergegangen. Die Fläche Φ^* ist einfach zusammenhängend, ihre Begrenzung wird von den Ufern der Schnitte l, A, B gebildet.

Wir nehmen nun n in einander liegende Exemplare der Fläche Φ^* an, welche wir in irgend einer Reihenfolge als erstes, zweites, ... n^{tes} Blatt bezeichnen.

Ferner ordnen wir den Linien

$$(3) \qquad l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_w,\ A_1,\ B_1,\ A_2,\ B_2,\ \ldots,\ A_p,\ B_p$$

je eine auf n Elemente bezügliche Substitution

$$(4) \qquad S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_w,\ U_1,\ V_1,\ U_2,\ V_2,\ \ldots,\ U_p,\ V_p$$

zu und verbinden endlich die n Exemplare Φ^* längs der Linien (3) derart dass die n Blätter beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite einer der Linien (3) gerade die dieser Linie entsprechende Substitution (3) erfahren. Die auf diese Weise verbundenen Blätter Φ^* bilden eine n-fach über der Fläche Φ ausgebreitete Fläche, welche wir mit

$$(5) \qquad F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

bezeichnen. Damit diese Fläche in sich geschlossen sei (aus einem Stücke bestehe) legen wir den Substitutionen (4) die Bedingung auf, eine transitive Gruppe zu erzeugen, welch' letztere die Monodromiegruppe von F in Rücksicht auf Φ heisst. Damit ferner nur die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ nicht aber der Punkt O Verzweigungspunkte von F werden, beschränken wir die Wahl der Substitutionen (4) weiter durch die Festsetzung, dass

$$(6) \qquad S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1$$

sein soll.

Ziehen wir auf der Fläche Φ von einem Punkte A aus, welcher von $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verschieden ist, irgend eine nach A zurückkehrende

und die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ vermeidende Linie L, so werden nach Durchlaufung dieser Linie die Blätter von F eine gewisse Substitution S erfahren haben. (Die Gesammtheit der Substitutionen S bildet die oben erwähnte Monodromiegruppe von F.) Aendern wir nun, unter Festhaltung der Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$, den Punkt O, die durch ihn laufenden Linien (3) und die Substitutionen (4), und sei F' die zu den abgeänderten Elementen gehörige Fläche. Wir erachten dann die Flächen F und F' als nicht von einander verschieden, wenn jeder in A beginnenden und endigenden Linie L rücksichtlich F dieselbe Substitution S entspricht, wie rücksichtlich F', oder wenn doch dieser Umstand durch eine zweckmässige Abänderung der Numerirung der Blätter von F erreicht werden kann.

Diese Definition ist, wie man leicht sieht, von der Wahl des Punktes A unabhängig.

§ 2.

Berechnung des Geschlechts der Flächen F.

Betrachten wir die im vorigen Paragraphen erklärte Fläche F, so legen wir jedem ihrer Verzweigungspunkte, z. B. dem Punkte a_i, wie üblich eine bestimmte Multiplicität bei. Wenn nämlich c_i die Zahl der Cyklen der Substitution S_i bedeutet, so heisst der Verzweigungspunkt a_i von der Multiplicität $n - c_i$. Auf der Fläche F findet sich der Punkt a_i dann c_i-mal wieder, während jeder andere Punkt von Φ auf der Fläche F genau n-mal erscheint.

Die Anzahl

$$W = \sum_{i=1}^{w} (n - c_i) \tag{1}$$

heisst die Zahl der einfachen Verzweigungen der Fläche F.

Ihrer Entstehung gemäss trägt die Fläche F eine Eintheilung in

$$f = n$$

einfach zusammenhängende Gebiete, von denen jedes einzelne ein Exemplar der Fläche Φ^* ist. Die Ecken dieser Gebietseintheilung werden von den Punkten a_i und den Punkten O gebildet, ihre Anzahl beträgt also

$$e = \sum c_i + n.$$

Die Anzahl der Kanten der Gebietseintheilung findet man leicht gleich

$$k = n \cdot w + 2pn.$$

Nun ist nach dem verallgemeinerten Euler'schen Satze

$$e + f = k + 2 - 2P,$$

wo P das Geschlecht der Fläche F bedeutet. Berechnen wir aus den vorstehenden Gleichungen P, so erhalten wir das Resultat:

„Das Geschlecht P der Fläche F besitzt den Werth:

$$P = \frac{1}{2} W + n(p - 1) + 1, \tag{2}$$

wo W die Zahl der einfachen Verzweigungen, n die Blätterzahl von F und p das Geschlecht der Fläche Φ bedeutet."

§ 3.

Das verallgemeinerte Problem und seine Monodromiegruppe.

Das verallgemeinerte Problem lautet nun so:

Gegeben sind eine Riemann'sche Fläche Φ und auf derselben w Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$. Man soll diejenigen Riemann'schen Flächen bestimmen, welche n-blättrig über der Fläche Φ ausgebreitet und an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ verzweigt sind.

Die zu bestimmenden Flächen sind nach dem Vorhergehenden einzeln zugeordnet den Systemen von $w + 2p$ Substitutionen

$$S_1, S_2, \ldots, S_w, \; U_1, V_1, U_2, V_2, \ldots, U_p, V_p, \tag{1}$$

welche mit n Elementen gebildet sind und folgenden Bedingungen genügen:

1) Die von den Substitutionen (1) erzeugte Gruppe ist transitiv.
2) Die Substitutionen befriedigen die Gleichung

$$S_1 S_2 \ldots S_w U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1. \tag{2}$$

Dabei sind zwei Systeme (1) als nicht verschieden zu erachten, wenn das eine durch Transformation (Umnumerirung der n Elemente) aus dem anderen abgeleitet werden kann.

Ist das Geschlecht p der Fläche Φ gleich Null, so kommen wir auf unser früheres Problem zurück.

Um die Monodromiegruppe des verallgemeinerten Problemes zu erhalten, denke man sich die $3p - 3$*) Moduln der Fläche Φ und zugleich die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ von irgend einer Anfangslage aus stetig in Bewegung gesetzt und in die Anfangslage zurückgeführt. In jedem Stadium der Bewegung müssen jedoch die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_w$ von einander getrennt und die Fläche Φ irreducibel bleiben. Verfolgen wir während der Bewegung die Aenderung der Flächen F, so werden die letzteren nur eine Vertauschung erfahren haben, wenn die Anfangslage wieder erreicht ist. Die Gesammtheit dieser Vertauschungen

*) Diese Zahl ist bekanntlich für $p = 0$ durch 0 und für $p = 1$ durch 1 zu ersetzen.

bildet die in Rede stehende Monodromiegruppe. Nun werden bei der Bewegung für eine bestimmte Fläche F sich nur die Linien $l_1, l_2, \ldots, l_w$, $A_1, \ldots, B_p$ nach und nach ändern, nicht aber die zugehörigen Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, $U_1, \ldots, V_p$. Also folgt:

Eine Substitution der Monodromiegruppe unseres Problemes ersetzt die Fläche

$$F = \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots, & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

durch die Fläche

$$F' = \begin{pmatrix} l_1', & l_2', & \ldots, & l_w', & A_1', & B_1', & \ldots, & A_p', & B_p' \\ S_1, & S_2, & \ldots, & S_w, & U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix},$$

wo l', A', B' irgend ein denselben Bedingungen, wie l, A, B genügendes Liniensystem bedeutet.

Man wird alle Substitutionen der Monodromiegruppe erhalten, wenn man für l', A', B' nach und nach alle möglichen jenen Bedingungen genügenden Liniensysteme wählt.

Das verallgemeinerte Problem kann offenbar dadurch specialisirt werden, dass man die Art der Verzweigung an den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_w$ vorschreibt, oder allgemeiner dadurch, dass man den Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ gewisse beschränkende Bedingungen auferlegt. Derartige Specialisirungen sind schon durch den Umstand angezeigt, dass das verallgemeinerte Problem im Allgemeinen reducibel ist.

§ 4.

Unverzweigte Flächen und Functionen.

In diesem und den folgenden Paragraphen will ich den besonderen Fall betrachten, in welchem die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_w$ in Fortfall kommen, so dass es sich um n-blättrige Flächen

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix}$$

handelt, welche auf der gegebenen Fläche Φ unverzweigt sind. Diese Flächen erscheinen von besonderem Interesse, weil sie den Flächen Φ von höherem Geschlecht eigenthümlich sind und berufen sein dürften, in dem Aufbau der einfachsten automorphen Functionen*) eine wichtige Rolle zu spielen.

---

*) Ich schliesse mich in der Bezeichnung den neusten Publicationen von F. Klein an. Siehe: „Zur Theorie der Lamé'schen Functionen". Göttinger Nachrichten vom 1. März 1890. Ferner: „Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung." Diese Annalen, Bd. 38, I, und die von Herrn Fricke herausgegebenen „Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen" (Leipzig 1890) Bd. I, pag. 763.

Wir bezeichnen wie früher mit Φ^* die einfach zusammenhängende Fläche, welche aus Φ durch Ausführung der Schnitte A, B hervorgeht. Die Fläche F besteht aus n übereinanderliegenden Exemplaren Φ^*, welche längs der Linien A, B den Substitutionen U, V entsprechend verbunden sind. Bedeutet y eine algebraische eindeutige Function des Ortes auf der Fläche F und sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die im Allgemeinen von einander verschiedenen Werthe, welche y in n übereinanderliegenden Punkten von F annimmt, so lässt sich jeder der n Werthe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eindeutig über die Fläche Φ^* fortsetzen, und der Werthevorrath der Function y erscheint dann in n eindeutige Zweige zerlegt. Die letzteren erfahren beim Ueberschreiten der Linien A, B die Vertauschungen U, V. Die Bestimmung der Flächen F ist also gleichbedeutend mit der Bestimmung der auf der Fläche Φ n-werthigen algebraischen unverzweigten Functionen. Ist das Geschlecht der Fläche Φ gleich 1, so werden alle diese Functionen durch die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen geliefert, und der Fall $p = 1$ kann daher als vollständig erledigt betrachtet und weiterhin bei Seite gelassen werden. Für ein beliebiges p hat man in der Theorie der Abel'schen Functionen eine besondere Art algebraischer unverzweigter Functionen, nämlich die Wurzelfunctionen betrachtet. Ich werde weiterhin die Stellung dieser besonderen Functionen unter den allgemeinen unverzweigten Functionen näher charakterisiren. Zuvor möge der Fall $n = 2$, welcher sich leicht und vollständig erledigen lässt, kurz besprochen werden.

§ 5.

Bestimmung aller zweiwerthigen unverzweigten algebraischen Functionen.

Es handelt sich um die Bestimmung aller Flächen F, welche zweiblättrig und unverzweigt über einer gegebenen Fläche Φ vom Geschlecht p ausgebreitet sind.

Diese Flächen sind nach Festlegung der Schnitte A, B einzeln zugeordnet den Systemen von $2p$ Substitutionen $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$, welche mit zwei Elementen gebildet sind, die Gleichung

$$(1) \qquad U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} \ldots U_p V_p U_p^{-1} V_p^{-1} = 1$$

befriedigen und eine transitive Gruppe erzeugen. Sind 1, 2 die beiden Elemente, so giebt es nur die beiden Substitutionen

$$S_1 = (1)(2), \quad S_2 = (12)$$

und offenbar dürfen wir für U_i, V_i nach Willkür die eine oder die andere dieser Substitutionen wählen. Nur der eine Fall, in welchem $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ sämmtlich mit S_1 identificirt werden, ist auszuschliessen.

*Die Anzahl der Flächen F beträgt daher $2^{2p} - 1$.**)

Es gelingt auch leicht die zu diesen Flächen gehörenden algebraischen Functionen zu bestimmen. Sei F eine bestimmte jener $2^{2p} - 1$ Flächen, ferner y eine eindeutige algebraische Function des Ortes auf F und seien y_1, y_2 die beiden auf Φ^* eindeutigen Zweige der Function y. Die Function $y_1 - y_2$ nimmt dann beim Ueberschreiten eines der Schnitte A, B den Factor 1 oder -1 auf, ist also eine Wurzelfunction zweiten Grades. Die Summe $y_1 + y_2$ ist eine eindeutige algebraische Function des Ortes auf der Fläche Φ. Bilden wir nun, unter Anwendung der bekannten Riemann'schen Bezeichnungen, für die Fläche Φ den ϑ-Quotienten

$$(2)\qquad \psi = \psi(g_1, g_2, \ldots, g_p;\ h_1, h_2, \ldots, h_p)$$
$$= \frac{\vartheta\left(u_\nu - e_\nu - g_\nu \pi i - \sum h_\varrho a_{\nu\varrho}\right)}{\vartheta(u_\nu - e_\nu)} \cdot e^{-2\sum h_\nu (u_\nu - e_\nu)},$$

wo $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ Hälften ganzer Zahlen bedeuten, so ist $y_1 + y_2 = 2R_1$, $y_1 - y_2 = 2\psi R_2$ und folglich wird

$$(3)\qquad y = R_1 + \psi \cdot R_2$$

der allgemeine Ausdruck einer auf F eindeutigen algebraischen Function sein. Dabei bezeichnen R_1, R_2 eindeutige algebraische Functionen der Fläche Φ. Wir erhalten die $2^{2p} - 1$ verschiedenen Flächen F, indem wir für $(g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p)$ nach und nach alle möglichen wesentlich verschiedenen Systeme von Hälften ganzer Zahlen wählen. Uebrigens leuchtet ein, dass die einzelne Fläche F schon durch die Function

$$(3')\qquad y = \psi(g_1, g_2, \ldots, g_p;\ h_1, h_2, \ldots, h_p)$$

vollständig definirt werden kann**).

Die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ lassen sich nach der Methode des vorigen Abschnittes ebenfalls erledigen, worauf ich indessen hier nicht näher eingehe.

---

*) Vgl. wegen des Falles $p = 2$: W. Dyck: „Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen". Diese Annalen Bd. 17, pag. 493.

**) Die zweiblättrigen Flächen lassen offenbar sämmtlich eine eindeutige Transformation in sich von der Periode 2 zu und fallen also unter die Flächen, welche ich in der Arbeit: „Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen" (Göttinger Nachrichten vom 5. Februar 1887 oder diese Annalen, Bd. 32) untersucht habe. Ich benutze die Gelegenheit, hier ein Citat auf eine mir später bekannt gewordene Notiz des Herrn S. Kantor nachzutragen, welche dieselben Gebilde betrifft. Dieselbe ist betitelt: „Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques" und findet sich in den Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Bd. 100, pag. 343–345.

§ 6.

Die unverzweigten algebraischen Functionen, welche sich auf geschlossenen Wegen linear substituiren.

Es möge nun noch eine besondere Art von unverzweigten Functionen hervorgehoben werden, zu welcher als die einfachsten die Wurzelfunctionen gehören. Wir wollen diejenigen auf der Fläche Φ unverzweigten Functionen betrachten, deren n eindeutig über Φ^* ausgebreiteten Zweige lineare (ganze oder gebrochene) Functionen von einander sind. Die linearen Functionen, welche die n Zweige durch einen derselben darstellen, bilden offenbar eine Gruppe. Nun kennt man aber nach den Untersuchungen von F. Klein alle Gruppen linearer Functionen*). Diese sind, wenn wir in einander transformirbare Gruppen als nicht verschieden erachten:

1) Die cyklischen Gruppen: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

2) Die Diedergruppen: $y' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} y, \quad y' = -\frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}}}{y} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

3) Die Tetraedergruppe.

4) Die Octaedergruppe.

5) Die Icosaedergruppe.

Den cyklischen Gruppen entsprechen die Wurzelfunctionen. Letztere existiren auf allen Flächen Φ, deren Geschlecht grösser ist als Null, und es ist bekanntlich leicht, den allgemeinen Ausdruck dieser Functionen durch ϑ-Functionen anzugeben. Unverzweigte Functionen, welche den übrigen Gruppen entsprechen, existiren nur auf denjenigen Flächen Φ, deren Geschlecht p grösser als Eins ist. Auszunehmen ist die Diedergruppe $n = 2$ (Vierergruppe in der Bezeichnung des Herrn Klein), welcher auch für $p = 1$ unverzweigte Functionen entsprechen.**)

Um diese Behauptung zu beweisen, betrachten wir eine auf der Fläche Φ unverzweigte Fläche

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots, & A_p, & B_p \\ U_1, & V_1, & \ldots, & U_p, & V_p \end{pmatrix},$$

und nehmen an, dass eine auf F eindeutige algebraische Function einer der genannten Gruppen entspricht. Auf diese Gruppe G ist dann die durch $U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p$ erzeugte Vertauschungsgruppe

*) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder (Leipzig 1884) pag. 115 ff. Die Substitutionen der Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergruppe, welche ich im Texte der Kürze halber nicht angebe, findet man auf pag. 42 und 43 des genannten Werkes.

**) Man vergleiche für den Fall $p = 1$ eine Note von E. Picard in den Comptes Rendus, Bd. 90, pag. 1479.

isomorph bezogen. Wenn nun $p = 1$ ist, so besteht diese Vertauschungsgruppe wegen der Relation

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} = 1 \quad \text{oder} \quad U_1 V_1 = V_1 U_1$$

aus lauter mit einander permutablen Substitutionen. Folglich müssen auch alle Substitutionen der Gruppe G mit einander permutabel sein. Daher kann G nur eine cyklische Gruppe oder die Diedergruppe $n = 2$ sein. Auf den Flächen Φ vom Geschlecht $p = 1$ können also in der That nur diesen Gruppen unverzweigte Functionen entsprechen.

Was nun den Nachweis der Existenz von unverzweigten Functionen betrifft, welche den oben aufgezählten Gruppen entsprechen, so möge es genügen einen besonderen Fall zu betrachten. Man wird leicht erkennen, dass die in diesem Falle befolgte Methode, sich sofort auf den allgemeinsten Fall übertragen lässt.*)

Gegeben sei eine Riemann'sche Fläche Φ vom Geschlecht 2. Es soll auf dieser Fläche eine sechzig-werthige unverzweigte algebraische Function bestimmt werden, deren sechzig in einem Punkte von Φ stattfindenden Werthe durch die sechzig Icosaedersubstitutionen mit einander zusammenhängen.

Wir bezeichnen mit

$$S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 120) \tag{1}$$

die 120 homogenen Icosaedersubstitutionen, mit z_1 und z_2 die homogenen Variabeln, auf welche sich die Substitutionen beziehen. Ferner bilden wir eine Vertauschungsgruppe bei n Elementen

$$T_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 120), \tag{2}$$

welche der Gruppe der Substitutionen S_i isomorph ist. Eine solche Vertauschungsgruppe und zwar bei $n = 120$ Elementen erhält man z. B., wenn man die Symbole S_i als Elemente auffasst und nun jeder Icosaedersubstitution S_k die durch die Reihenfolge $S_k S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 120)$ angegebene Vertauschung der Symbole S_i zuordnet. Wir nehmen jetzt aus der Gruppe (2) irgend vier Substitutionen U_1, V_1, U_2, V_2 heraus, welche der Bedingung genügen, dass sie die ganze Gruppe erzeugen und die Gleichung

$$U_1 V_1 U_1^{-1} V_1^{-1} U_2 V_2 U_2^{-1} V_2^{-1} = 1$$

befriedigen. Dies ist offenbar möglich. Denn die Gruppe (1) und folglich auch die Gruppe (2) lässt sich schon durch zwei geeignet gewählte Substitutionen erzeugen. Sind T_α, T_β zwei solche Substitutionen, so genügt es

$$U_1 = T_\alpha, \quad V_1 = 1, \quad U_2 = T_\beta, \quad V_2 = 1$$

zu setzen.

*) Dieselbe Methode ist auch auf den Fall verzweigter Flächen anwendbar.

Dies vorausgeschickt breiten wir über der Fläche Φ die n-blättrige Fläche

$$F = \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & A_2, & B_2 \\ U_1, & V_1, & U_2, & V_2 \end{pmatrix}$$

aus und bezeichnen mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die n Werthe, welche eine auf F eindeutige algebraische Function in einem Punkte der Fläche Φ besitzt. Beschreibt der letztere Punkt auf der Fläche Φ alle möglichen geschlossenen Wege, so erfahren dabei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Vertauschungen der Gruppe (2). Da nun die Gruppen (2) und (1) isomorph sind, so kann man nach einem Satze des Herrn Klein*) zwei homogene Functionen

$$Z_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad Z_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

bilden, welche bei einer Vertauschung T_i der Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ genau dieselbe lineare Substitution erfahren, wie z_1, z_2 bei S_i.

Demgemäss ist

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

eine algebraische sechzig-werthige unverzweigte Function auf der Fläche Φ, welche den gestellten Bedingungen genügt.

Königsberg i. Pr., den 27. Januar 1891.

---

*) „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade." Diese Annalen, Bd. 15, pag. 253 ff.

Uebersicht.

Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen solcher linearen Substitutionen einer Variabelen, deren Coefficienten Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten.

(Mit einer Figurentafel).

Von

Robert Fricke in Berlin.

In meiner vorigen Arbeit*) habe ich eine gewisse Classe von Substitutionsgruppen auf arithmetischem Wege definirt, die in der complexen Ebene durchgehends einen endlichen Fundamentalbereich hatten. Die betreffenden Substitutionscoefficienten waren rational aus der Quadratwurzel einer ganzen Zahl q aufgebaut; und es war q aus Zweckmässigkeitsgründen als positive Primzahl der Form $(4h+3)$ angenommen. Das damals zur Definition der Gruppen benutzte Princip lässt sich nun leicht noch um einen Schritt verallgemeinern, und zwar derart, dass die Substitutionscoefficienten der einzelnen Gruppe rational aus zwei verschiedenen Quadratwurzeln $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ aufgebaut sind**). Wie die Substitutionscoefficienten des näheren gestaltet sein sollen, werde ich in einem ersten Theile der vorliegenden Arbeit auseinandersetzen; des leichten Ueberblicks halber wird r als positive oder negative Primzahl der Gestalt $(4h+1)$ vorausgesetzt. Ueberdem aber werden wir nach dieser Beschränkung nur zu Gruppen ohne parabolische Substitutionen gelangen, die also durch keine Transformation mit der Modulgruppe commensurabel werden können. Im weiteren soll es sich um die Anwendung der in Rede stehenden Gruppen auf die arithmetische Theorie gewisser binärer quadratischer Formen handeln, wie eine solche Anwendung der Modulgruppe auf die ganzzahligen binären quadratischen Formen der überkommenen Zahlentheorie in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen ihre Durchbildung gefunden hat.***)

*) Bd. XXXVIII der Annalen, p. 461.

**) Auf diese Verallgemeinerung bin ich durch eine Bemerkung des Herrn Bianchi aufmerksam geworden, mit dem ich über die gruppentheoretischen Gegenstände des Textes letzthin eine lebhafte Correspondenz hatte.

***) Die letztgemeinte Anwendung ist zu einem ersten Theile in Band I der „Vorlesungen über die Modulfunctionen", Abschnitt II, Capitel 3 zur Darstellung

I.

Substitutionsgruppen und Fundamentalpolygone.

1.

Einführung der zu betrachtenden Gruppen.

Man verstehe unter a, b, c, d irgend welche ganze Zahlen, unter q und r aber, wie schon einleitend bemerkt, Primzahlen der Form $q = 4h - 1$, $r = 4h + 1$, von denen die erstere positiv sein soll. Man bilde daraufhin alle linear-gebrochenen Substitutionen der Variabelen ω, welche wir abgekürzt in der Gestalt:

$$(1)\quad S = \begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{q}}{2}, & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{rq}}{2} \\ \frac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{rq}}{2}, & \frac{a-b\sqrt{q}}{2} \end{pmatrix},\quad a^2-qb^2+rc^2-qrd^2=4$$

schreiben, und die also durchgehends die Determinante 1 haben sollen. Zufolge dieser letzten Bedingung werden bei den über q und r gemachten Voraussetzungen die vier Zahlen a, b, c, d entweder durchgehends ungerade oder gerade ausfallen. Hieraus folgt, dass bei Combination zweier Substitutionen S der zunächst in den Coefficienten der neuen Substitution auftretende Nenner 4 sich stets auf 2 oder 1 kürzt: *Die Substitutionen S bilden sonach in ihrer Gesammtheit eine Gruppe, die wir als $\Gamma_8^{(q,r)}$ bezeichnen wollen.*

Es giebt eine Reihe von Gruppen, in denen $\Gamma_8^{(q,r)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe von endlichem Index ist, und es ist unser nächstes Ziel, bis zur umfassendsten Gruppe dieser Art vorzudringen. Zu dem Ende reihen wir zuvörderst die Substitutionen der Determinante 1:

$$(2)\quad T = \begin{pmatrix} \frac{a+b\sqrt{q}}{2}, & \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{2} \\ \frac{c\sqrt{r}-d\sqrt{qr}}{2}, & \frac{-a+b\sqrt{q}}{2} \end{pmatrix},\ a^2-qb^2+rc^2-qrd^2=-4$$

an, bei denen also wieder a, b, c, d zugleich gerade oder ungerade sind. Ebendeshalb beweist man leicht, dass zwei Substitutionen T combinirt stets ein S liefern, dass aber ST oder auch TS stets eine Substitution T ist. Es folgt: *Die Gesammtheit der Substitutionen S, T*

---

gebracht; die tiefer gehenden Ausführungen, welche namentlich auf der Verwendung der Transformationstheorie und insbesondere der Modulargleichungen beruhen, habe ich neuerdings für den zweiten Band der genannten Vorlesungen redigirt [Februar 1891].

bildet eine Gruppe $\Gamma_4^{(q,r)}$, in der $\Gamma_8^{(q,r)}$ ausgezeichnet vom Index zwei enthalten ist.

Es reihen sich die zwei weiteren Arten von Substitutionen der Determinante 1 an:

$$(3)\quad U = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \dfrac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \dfrac{a-b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad a^2-qb^2+rc^2-qrd^2=2,$$

$$(4)\quad V = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \dfrac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{c\sqrt{r}-d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \dfrac{-a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad a^2-qb^2+rc^2-qrd^2=-2.$$

Hier werden unter den vier bei der einzelnen Substitution zur Geltung kommenden Zahlen a, b, c, d offenbar immer zwei gerade, die beiden andern ungerade sein. Man muss dies berücksichtigen, um betreffs der vier definirten Arten von Substitutionen folgende allgemeine Regeln zu belegen: Combinirt man ein S mit einer Substitution einer der drei Arten T, U, V, so entspringt eine Substitution der nämlichen Art, und zwar unabhängig von der Reihenfolge der Combination; combinirt man irgend zwei Substitutionen derselben Art, so entspringt stets eine Substitution S; combinirt man endlich zwei Substitutionen aus zwei verschiedenen der drei Reihen T, U, V, so entspringt eine Substitution der dritten Reihe. Es folgt: *Die gesammten Operationen S, T, U, V bilden eine Gruppe $\Gamma_2^{(q,r)}$, in welcher $\Gamma_8^{(q,r)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index vier ist; jene erstere Gruppe reducirt sich bezüglich der letzteren auf eine Vierergruppe.*

Ist $r=1$, so kommen wir hier überall auf die Resultate meiner vorigen Arbeit zurück. Ist $r>1$, so bemerke man, dass sich die Operation $t(\omega)=\dfrac{-1}{\omega}$ in der Γ_2 noch nicht findet; gleichwohl ist leicht deutlich, dass bei Transformation der einzelnen Substitution (1) bis (4) vermöge t nichts anderes als Zeichenwechsel der beiden Zahlen b und d eintritt. Γ_2 ist sonach mit t vertauschbar, *und eben deshalb wird diese Gruppe durch Zusatz von t zu einer Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ erweitert, in welcher $\Gamma_8^{(q,r)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 8 ist.* Diese $\Gamma^{(q,r)}$ umfasst neben den S, T, U, V noch die vier weiteren Arten von Substitutionen der Determinante 1:

$$(5)\quad S', T' = \begin{pmatrix} \dfrac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{2}, & \dfrac{a+b\sqrt{q}}{2} \\ \pm\dfrac{-a+b\sqrt{q}}{2}, & \pm\dfrac{c\sqrt{r}-d\sqrt{qr}}{2} \end{pmatrix},\quad a^2-qb^2+rc^2-qrd^2=\pm 4,$$

$$(6)\quad U', V' = \begin{pmatrix} \frac{c\sqrt{r}+d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \frac{a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{-a+b\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \pm\frac{c\sqrt{r}-d\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad a^2-qb^2+rc^2-qrd^2=\pm 2,$$

wobei sich unter den doppelten Vorzeichen die oberen stets auf S', U', die unteren auf T', V' beziehen. Da eine Operation S, T, U, V durch t stets in eine Operation derselben Art transformirt wird, so muss irgend eine der Substitutionen (5), (6) mit einer ihr gleichartigen Substitution combinirt, stets ein S liefern. Demgemäss wird sich $\Gamma^{(q,r)}$ bezüglich der $\Gamma_8^{(q,r)}$ auf eine endliche G_8 reduciren, die neben der Identität noch sieben Operationen der Periode *zwei* besitzt. Nebenher ziehen wir daraus auf Grund bekannter Sätze den Schluss, dass $\Gamma_8^{(q,r)}$ niemals zum Geschlechte $p=0$ gehören kann; dagegen giebt es bei $p=1$ eine Gruppe G_8 der fraglichen Structur.

Ist r eine negative Zahl, so muss man an Stelle von t die Substitution $t'(\omega)=\frac{1}{\omega}$ zur Anwendung bringen und findet alsdann völlig entsprechende Verhältnisse. Es sind für diesen Fall übrigens die zweiten und dritten Coefficienten der Substitutionen durchweg rein imaginäre Zahlen; inzwischen kommt man einfach durch Ausübung der Transformation $s(\omega)=i\omega$ auf Substitutionen mit lauter reellen Coefficienten zurück. Es mag genügen, wenn wir unsere Besprechung allenthalben auf den Fall $r>0$ einschränken.

Alle bislang betrachteten Gruppen sind der Erweiterung durch die Spiegelung $A(\omega)=-\bar{\omega}$ an der imaginären Axe fähig. Wir gelangen so insbesondere von $\Gamma^{(q,r)}$ aus zu einer erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$, welches die umfassendste Gruppe ist, zu der wir in der bisherigen Weise überhaupt vordringen können. Wenigstens darf man behaupten, dass $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ allgemein nicht mehr eine ausgezeichnete Untergruppe in einer noch umfassenderen Gruppe linearer Substitutionen ist; man wird dies in den weiter unten zu betrachtenden Einzelfällen unmittelbar aus der Gestaltung der Fundamentalbereiche wahrnehmen.

2.

Periodicität der Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$.

Die Periodicität einer Substitution erster Art der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ hängt bekanntermassen einzig von der Summe σ ihres ersten und vierten Coefficienten ab. Ist diese Zahl σ ihrem absoluten Werthe nach grösser als zwei, so liegt eine *hyperbolische* Substitution vor. Es giebt deren in unserer Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ eine grosse Mannigfaltigkeit, deren

nähere Betrachtung wir indessen an dieser Stelle nicht unternehmen können. Die Summe $\sigma = \pm 2$ zeigt eine *parabolische* Substitution an; soll aber eine derartige überhaupt innerhalb $\Gamma^{(q,r)}$ vorkommen, so muss es auch parabolische Substitutionen S geben. Eine solche müsste $a = 2$ haben, während b, c, d der Gleichung $qb^2 - rc^2 + qrd^2 = 0$ genügen. Soll diese Gleichung eine ganzzahlige Lösung haben, so muss b durch r, c aber durch q theilbar sein. Schreiben wir demgemäss $b = b_0 r$, $c = c_0 q$, so kommt:

$$rb_0^2 - qc_0^2 + d^2 = 0;$$

nach bekannten Sätzen ist indes diese Gleichung nur dann ganzzahlig lösbar, wenn zugleich die beiden Bedingungen

$$\left(\frac{q}{r}\right) = +1, \quad \left(\frac{-r}{q}\right) = -\left(\frac{r}{q}\right) = +1$$

bestehen, was man vermöge des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste sogleich als unmöglich beweist. *Hiernach kommen parabolische Substitutionen in der Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ überhaupt nicht vor.*

Für die *elliptischen* Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ bleiben die Werthe $\sigma = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}, \pm 1, 0$ übrig; der Fall $\pm\sqrt{2}$ tritt indes nur bei den Substitutionen U, der Fall ± 1 nur bei den S und endlich $\sigma = \pm\sqrt{3}$ allein im Specialfall $q = 3$ bei den T auf. Um mit letzterem Fall zu beginnen, so haben wir also in der $\Gamma^{(3,r)}$ Substitutionen:

$$\text{(1)} \qquad T_6\colon\ a^2 + rc^2 - 3rd^2 = -1, \quad \omega_0 = \frac{a \pm i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{3})},$$

und zwar für jede ganzzahlige Lösung (a, c, d) der neben T_6 geschriebenen Gleichung; die Zahl b ist gleich ± 1 zu nehmen, und ω_0 giebt die beiden Fixpunkte, welche der elliptischen Substitution T_6 in der ω-Ebene zukommen. Für die elliptischen Substitutionen der Periode vier reihen wir sogleich das nachfolgende Schema an:

$$\text{(2)} \qquad U_4\colon\ -qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 1, \quad \omega_0 = \frac{-b\sqrt{q} \pm i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \quad \left(\frac{q}{r}\right) = 1;$$

es ist für sie $a = \pm 1$, und übrigens muss q offenbar quadratischer Rest von r sein, falls Substitutionen U_4 auftreten sollen. Es folgt für die S_3 mit $a = \pm 1$:

$$\text{(3)} \qquad S_3\colon\ -qb^2 + rc^2 - qrd^2 = 3, \quad \omega_0 = \frac{-b\sqrt{q} \pm i\sqrt{3}}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}.$$

Im Falle $q = 3$ sind die Substitutionen T_6 und S_3 einander eindeutig zugeordnet, indem stets $T_6^2 = S_3$ wird; ist $q > 3$, so hat man als Bedingung für das Auftreten von Substitutionen S_3:

$$\text{(4)} \qquad \left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{r}{3}\right), \quad \left(\frac{r}{q}\right) = -\left(\frac{q}{3}\right),$$

so dass insbesondere q und r einander nicht modulo 3 congruent sein können.

Dem Bisherigen gegenüber ist die Anzahl verschiedener Arten elliptischer Substitutionen der Periode zwei eine sehr viel grössere. Es erfordert $\sigma = 0$ offenbar, dass eine der vier Zahlen a, b, c, d mit Null identisch sei, und dabei liefern für $a = 0$ die S und U, für $b = 0$ die T und V u. s. w. elliptische Substitutionen der Periode zwei. Wir werden hier gleich wieder die Resultate einer leichten Zwischenbetrachtung wie bisher übersichtlich zusammenstellen:

$$(5)\quad a = 0 \begin{cases} S_2: \quad -qb^2+rc^2-qrd^2 = +4, & \omega_0 = \dfrac{-b\sqrt{q} \pm 2i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \\ U_2: \quad -qb^2+rc^2-qrd^2 = +2, & \omega_0 = \dfrac{-b\sqrt{q} \pm i\sqrt{2}}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \end{cases}$$

$$(6)\quad b = 0 \begin{cases} T_2: \quad a^2+rc^2-qrd^2 = -4, & \omega_0 = \dfrac{a \pm 2i}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \\ V_2: \quad a^2+rc^2-qrd^2 = -2, & \omega_0 = \dfrac{a \pm i\sqrt{2}}{\sqrt{r}(c - d\sqrt{q})}, \end{cases}$$

$$(7)\quad c = 0 \begin{cases} S_2': \quad a^2-qb^2-qrd^2 = +4, & \omega_0 = \dfrac{d\sqrt{qr} \pm 2i}{-a+b\sqrt{q}}, \\ U_2': \quad a^2-qb^2-qrd^2 = +2, & \omega_0 = \dfrac{d\sqrt{qr} \pm i\sqrt{2}}{-a+b\sqrt{q}}, \end{cases}$$

$$(8)\quad d = 0 \begin{cases} T_2': \quad a^2-qb^2+rc^2 = -4, & \omega_0 = \dfrac{c\sqrt{r} \pm 2i}{a - b\sqrt{q}}, \\ V_2': \quad a^2-qb^2+rc^2 = -2, & \omega_0 = \dfrac{c\sqrt{r} \pm i\sqrt{2}}{a - b\sqrt{q}}. \end{cases}$$

Elementare Betrachtungen über quadratische Reste lehren, dass Substitutionen S_2 höchstens dann eintreten können, wenn r Rest von q ist, dass sich Substitutionen V_2 jedenfalls nur für $r = 8h + 1$ finden können u. s. w.

Die Operationen zweiter Art der erweiterten $\Gamma^{(q,r)}$ sind SA, TA, UA etc. In der einzelnen Substitution dieser Art werden wir stets und nur dann eine *Spiegelung* besitzen, wenn in der mit A combinirten Operation erster Art der erste Coefficient mit dem letzten identisch ist, und solches erfordert wieder, dass eine der Zahlen a, b, c, d verschwindet. Indem wir sonach abgekürzt $SA = \overline{S}$, $TA = \overline{T}$ etc. setzen, ergiebt sich die folgende Tabelle der Spiegelungen, in welcher jedesmal auch vom zugehörigen Symmetriekreis Vermerk genommen wurde:

$$(9)\quad a = 0 \begin{cases} \overline{V}_2: \quad qb^2 - rc^2 + qrd^2 = 2, \\ (c - d\sqrt{q})\sqrt{r}(x^2+y^2) - 2b\sqrt{q}\,x + (c+d\sqrt{q})\sqrt{r} = 0, \end{cases}$$

$$(10)\quad b=0\begin{cases}\overline{S}_2,\ \overline{U}_2:\ a^2+rc^2-qrd^2=4,2,\\(-c+d\sqrt{q})\sqrt{r}(x^2+y^2)-2ax+(c+d\sqrt{q})\sqrt{r}=0,\end{cases}$$

$$(11)\quad c=0\begin{cases}\overline{V}_2':\ a^2-qb^2-qrd^2=-2,\\(a-b\sqrt{q})(x^2+y^2)-2d\sqrt{qr}\,x+(a+b\sqrt{q})=0,\end{cases}$$

$$(12)\quad d=0\begin{cases}\overline{S}_2',\ \overline{U}_2':\ a^2-qb^2+rc^2=4,2,\\(-a+b\sqrt{q})(x^2+y^2)-2c\sqrt{r}\,x+(a+b\sqrt{q})=0.\end{cases}$$

Natürlich treten keineswegs in jedem Einzelfall alle sechs Arten von Spiegelungen auf; vielmehr bemerkt man leicht: $\overline{V}_2$ tritt höchstens dann auf, wenn $q+r\equiv 4$, (mod. 8) ist und q modulo r denselben quadratischen Charakter hat wie 2, u. s. w.

3.

Das Fundamentalpolygon der Gruppe $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$.

Wo sich auch im Innern der ω-Halbebene zwei bei der einzelnen $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ auftretende Symmetriekreise kreuzen, immer wird dort der Fixpunkt für eine in der $\Gamma^{(q,r)}$ enthaltene elliptische Substitution gelegen sein; und wenn letztere die Periode ν hat, so wird der Winkel, unter dem sich jene Kreise schneiden, ein Multiplum von $\frac{\pi}{\nu}$ sein. Die Symmetriekreise der $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ können sich demnach höchstens zu Paaren unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ oder zu dreien unter den Winkeln $\frac{\pi}{3}$ oder zu vieren unter den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ oder endlich bei $q=3$ zu sechs unter den Winkeln $\frac{\pi}{6}$ überkreuzen. Man denke sich jetzt die gesammten bei der $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ auftretenden Symmetriekreise innerhalb der ω-Halbebene wirklich gezogen, wodurch letztere eine für die $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ charakteristische Eintheilung erfährt, die wir nun zu betrachten haben. Was die Existenz der Symmetriekreise angeht, so erblickt man erstlich in jedem Falle (q,r) eine unendliche Schaar concentrischer Kreise um den Nullpunkt, die den gesammten Lösungen der bei $\overline{S}_2'$ auftretenden Pell'schen Gleichung $a^2-qb^2=4$ zugehören, zweitens eine unendliche Schaar zum Einheitskreise orthogonaler Symmetriekreise, welche bei $\overline{S}_2$ für $c=0$, $a^2-qrd^2=4$ auftreten. Jetzt wolle man weiter bemerken, dass die Fixpunkte der in $\Gamma^{(q,r)}$ enthaltenen hyperbolischen Substitutionen die reelle ω-Axe überall dicht bedecken, und zwar noch mehr: Wenn wir irgend zwei endliche, wenn auch noch so kleine Linienstücke an zwei willkürlich gewählten Stellen der reellen ω-Axe

markiren, so kann man eine hyperbolische Substitution in der $\Gamma^{(q,r)}$ nachweisen, deren einer Fixpunkt auf dem einen, der andere auf dem anderen jener beiden Linienstücke gelegen ist; (man wird diesen Satz etwas weiter unten unmittelbar als gegründet erkennen). Nimmt man hinzu, welcher Art die Umgestaltung der Halbebene bei Ausübung einer hyperbolischen Substitution ist, so ist evident, dass sich für jeden Punkt der reellen ω-Axe ein denselben umschliessender Kreis von *endlichem* Radius finden lässt, der als Symmetriekreis der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ angehört. *Bei dieser Sachlage zerschneidet die Gesammtheit der Symmetriekreise die positive Halbebene in Kreisbogenpolygone, deren einzelnes überall in* e n d l i c h e r *Entfernung von der reellen Axe bleibt, und welches eben deshalb nur eine* e n d l i c h e *Anzahl von Seiten aufweist.* Diese Polygone entspringen aus einem unter ihnen nach dem Symmetrieprincip und schaaren sich um ihre Ecken in Anzahlen zu *vier*, *sechs*, *acht* oder bei $q = 3$ möglicher Weise auch zu *zwölf;* einem gewohnten Brauche folgend denken wir uns die Polygone abwechselnd schraffirt und frei.

Die besprochene Eintheilung der Halbebene wird durch jede Substitution der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ in sich transformirt. Infolge dessen definirt ein einzelnes jener Kreisbogenpolygone, als Fundamentalbereich betrachtet, eine Gruppe $\bar{\Gamma}_{\nu}^{(q,r)}$, welche als ausgezeichnete Untergruppe des *endlichen* Index ν in $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ enthalten ist. Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist $\nu = 1$, und das Kreisbogenpolygon ist direct der Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$; oder es giebt innerhalb der letzteren Gruppe noch Substitutionen, welche von der Identität verschieden sind und jenes Kreisbogenpolygon in sich transformiren. Solche Substitutionen können nur von der *ersten* Art sein; eine Operation zweiter Art nämlich, welche ein Kreisbogenpolygon in sich überführt, muss evidenter Weise auf dem Rande desselben zwei Fixpunkte besitzen, und da diese in unserem Falle im Innern der Halbebene liegen würden, so hätten wir es mit einer Spiegelung zu thun, die jedoch sämmtlich schon der $\bar{\Gamma}_{\nu}^{(q,r)}$ angehören. Weiter ist es geometrisch ohne weiteres ersichtlich, dass unser Polygon nur durch *elliptische* Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ in sich überführbar ist, *und dass diese in ihrer Gesammtheit eine cyklische Untergruppe bilden werden.* Also kann ν nur gleich 1, 2, 3, 4, 6 sein, und wir haben das Resultat: *Entweder ist das Kreisbogenpolygon Fundamentalbereich der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ und also diese Gruppe* a l l e i n *aus Spiegelungen erzeugbar, oder das Polygon hat einen Mittelpunkt, welcher Fixpunkt einer cyklischen G_2, G_3, G_4 oder endlich G_6 elliptischer Substitutionen ist; im letzteren Falle ist $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ nicht aus Spiegelungen allein erzeugbar, und der Fundamentalbereich dieser Gruppe entspringt aus dem Polygon erst durch* 2-, *bez.* 3-, 4-, *oder* 6-*Theilung, eine Theilung,*

die offenbar stets durch zwei vom Mittelpunkte des Polygons nach zwei gewissen Ecken ziehende Kreise bewerkstelligt werden kann.

Je nachdem der erste oder zweite der eben besprochenen Fälle eintritt, giebt es keine oder doch eine *einzige* Classe cyklischer Untergruppen aus elliptischen Substitutionen in der $\Gamma^{(q,r)}$, durch deren Fixpunkte Symmetriekreise der $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ nicht hindurchziehen. Die Fixpunkte aller anderen elliptischen Substitutionen sind auf Symmetriekreisen gelegen, und wir müssen hierbei unsere bisherige Betrachtung noch durch den Satz ergänzen, *dass die Anzahl unterschiedener Kreise, welche durch den einzelnen Fixpunkt hindurchziehen, gleich der Periode ν der betreffenden elliptischen Substitution ist.* Bei ungeradem ν ist dies evident; bei geradem ν bemerke man, dass die cyklische G_ν durch die Spiegelung an einem in Betracht kommenden Kreise zu einer in $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ enthaltenen $\overline{G}_{2\nu}$ erweitert wird, deren ν Operationen zweiter Art nur Spiegelungen sein können; ihnen gehören dann die fraglichen ν Kreise zu. Diese Resultate haben merkwürdige Sätze im Gefolge über die Beziehung der ganzzahligen Lösungen der Gleichungen (5) bis (8) des vorigen Artikels zu den ganzzahligen Lösungen von (9) bis (12) ebenda.

Zur Veranschaulichung der gewonnenen allgemeinen Sätze können in erster Linie die Beispiele meiner vorigen Arbeit gelten, welche sich auf die Specialfälle $(q, r) = (3, 1), (7, 1), (11, 1), (19, 1), (23, 1)$ beziehen. Die beiden Gruppen $\overline{\Gamma}^{(3,1)}$, $\overline{\Gamma}^{(11,1)}$ erwiesen sich als allein aus Spiegelungen erzeugbar; in den übrigen Fällen war die oben mit ν bezeichnete ganze Zahl gleich 2. Unter den niedersten Fällen mit $r > 1$ finde ich drei $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$, die wieder allein aus Spiegelungen erzeugbar sind, nämlich für $(q, r) = (3, 5), (3, 13)$ und $(7, 5)$; mögen für diese Gruppen hier die Einzelresultate noch zusammengestellt werden.

In der Gruppe $\overline{\Gamma}^{(3,5)}$ finden sich vier Arten von Spiegelungen, nämlich $\overline{S}_2$, $\overline{V}_2'$, $\overline{U}_2'$, $\overline{S}_2'$, für welche wir in sofort verständlicher Abkürzung die Beispiele $(2, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 0)$ anführen. Die ihnen der Reihe nach entsprechenden Symmetriekreise:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = 0, \ (1-\sqrt{3})(x^2+y^2) + (1+\sqrt{3}) = 0, \\ \sqrt{3}(x^2+y^2) - 2\sqrt{5}\,x + \sqrt{3} = 0, \quad x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

schliessen ein Kreisbogenviereck der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ ein, welches man in Fig. 1 der beigegebenen Tafel nachsehen wolle. Die Ecken des Vierecks liegen in der in der Figur angezeigten Folge an den Stellen:

$$(2)\qquad \omega_0 = i, \quad \frac{i\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}}, \quad \frac{3+i}{\sqrt{5}(-1+\sqrt{3})}, \quad \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

und bilden die Fixpunkte von vier in der $\Gamma^{(3,5)}$ vorkommenden elliptischen Substitutionen S_2', V_2', T_6, U_2. Alle in der $\bar{\Gamma}^{(3,5)}$ enthaltenen Arten von Spiegelungen, sowie cyklischen Untergruppen aus elliptischen Substitutionen, welche die Tabellen des vorigen Paragraphen liefern, bestehen demnach je nur aus *einer* Classe. Spiegeln wir das Viereck (1) etwa an der imaginären Axe und fügen ihm sein Spiegelbild an, so entspringt ein Fundamentalbereich der Gruppe $\Gamma^{(3,5)}$; wir finden daraufhin als ein System von erzeugenden Substitutionen für diese Gruppe:

$$(3)\quad v_1=\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0, & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & 0\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

In der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(3,13)}$ findet man gleichfalls vier Arten von Spiegelungen, nämlich $\bar{S}_2'$, $\bar{S}_2$, $\bar{V}_2'$, $\bar{U}_2'$, für welche wir die folgenden Beispiele aufstellen: $(2,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,1)$. Die zugehörigen Symmetriekreise:

$$(4)\quad \begin{cases} x^2+y^2-1=0,\ x=0,\ (1-\sqrt{3})(x^2+y^2)+(1+\sqrt{3})=0,\\ (-1+2\sqrt{3})(x^2+y^2)-2\sqrt{13}\,x+(1+2\sqrt{3})=0 \end{cases}$$

bilden ein Kreisbogenviereck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ (cf. Fig. 2) und den Ecken:

$$(5)\qquad \omega_0=i,\quad \frac{i\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}},\quad \frac{5+i}{\sqrt{13}(-1+\sqrt{3})},\quad \frac{2\sqrt{3}+i}{\sqrt{13}},$$

welch' letztere die Fixpunkte für vier elliptische Substitutionen S_2', V_2', T_6, U_4 abgeben. Indem wir wieder wie oben durch Spiegelung an der imaginären Axe einen Fundamentalbereich der $\Gamma^{(3,13)}$ herstellen, ergiebt sich für diese Gruppe folgendes System von erzeugenden Substitutionen:

$$(6)\qquad v_1=\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0, & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & 0\end{pmatrix},$$

$$v_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}, & \frac{-1+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Endlich ergeben sich auch in der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(7,5)}$ insgesammt vier Arten von Spiegelungen, nämlich $\bar{S}_2'$, $\bar{S}_2$, $\bar{U}_2'$, $\bar{V}_2$; für die ersten beiden

benutze man wieder die Beispiele (2, 0, 0), wie bisher; für $\overline{U}_2'$ müssen wir die beiden Lösungen (3, 1, 0), (2, 1, 1) der betreffenden Gleichung heranziehen und endlich (1, 1, 0) für $\overline{V}_2$. Den so charakterisirten Spiegelungen gehören der Reihe nach die Symmetriekreise zu:

$$(7)\quad \begin{cases} x^2+y^2-1=0,\ x=0,\ (-3+\sqrt{7})(x^2+y^2)+(3+\sqrt{7})=0, \\ (-2+\sqrt{7})(x^2+y^2)-2\sqrt{5}\,x+(2+\sqrt{7})=0, \\ \sqrt{5}(x^2+y^2)-2\sqrt{7}\,x+\sqrt{5}=0, \end{cases}$$

welche das in Fig. 3 gegebene Kreisbogenfünfeck der Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bilden. Die Ecken desselben:

$$(8)\quad \omega_0=i,\quad \frac{i\sqrt{2}}{3-\sqrt{7}},\quad \frac{\sqrt{7}+i\sqrt{3}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{7})},\quad \frac{\sqrt{5}+i}{-1+\sqrt{7}},\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

ergeben die Fixpunkte von fünf der $\Gamma^{(7,5)}$ angehörenden elliptischen Substitutionen S_2', U_2', S_3, T_2', V_2'. Hier wie im voraufgehenden Falle bilden die elliptischen Substitutionen und Spiegelungen der einzelnen Art innerhalb der $\overline{\Gamma}^{(7,5)}$ auch nur *eine* Classe. Indem wir übrigens für $\Gamma^{(7,5)}$ einen Fundamentalbereich in gewohnter Weise herstellen, findet sich für $\Gamma^{(7,5)}$ als ein System von Erzeugenden:

$$(9)\quad v_1=\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0, & \frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\\ \frac{-3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, & 0\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$v_4=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, & \frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\\ \frac{-2+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Dass alle drei betrachteten Gruppen zum Geschlechte $p=0$ gehören, wird man aus den Figuren sofort ablesen. Man bemerke aber noch, *dass ganz allgemein die Gruppen* $\Gamma^{(q,r)}$ *zum Geschlechte Null gehören.* Es ist nämlich jede Gruppe Γ von endlichem Fundamentalbereich, die durch Zusatz einer Spiegelung auf eine *allein* aus Spiegelungen erzeugbare Gruppe $\overline{\Gamma}$ erweitert werden kann, vom Geschlechte $p=0$. In der That, liefert das Polygon von $\overline{\Gamma}$ durch Reproduction am Grenzkreis K einen Fundamentalbereich von Γ, so sind je zwei Randpunkte des letzteren, die bezüglich K symmetrisch liegen, einander zuzuordnen.

II.

Aequivalenz und Reduction quadratischer Formen.

1.

Die zur $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ gehörenden binären quadratischen Formen. Ternäre Gestalt der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$.

Wie die Modultheilung in innigster Beziehung zu den ganzzahligen binären quadratischen Formen steht, so ergiebt uns die soeben besprochene Polygontheilung der ω-Halbebene eine zweckmässige Handhabe für die arithmetische Theorie gewisser binärer quadratischer Formen, die wir als zur $\Gamma^{(q,r)}$ gehörig bezeichnen. Wir schreiben diese Formen in der Gestalt:

$$(1)\qquad (\varkappa, \lambda, \mu) = (\varkappa + \lambda\sqrt{q})x^2 + 2\mu\sqrt{r}\,xy - (\varkappa - \lambda\sqrt{q})y^2\,^{*)}$$

und verstehen dabei unter $\varkappa, \lambda, \mu$ irgend drei rationale ganze Zahlen; die Determinante der Form (1) ist:

$$(2)\qquad D = \varkappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2.$$

Die Zugehörigkeit der Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ zur Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ wird durch die nachfolgende Betrachtung begründet. Man übe auf (1) die Substitution:

$$(3)\qquad x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

aus, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Zahlen der Determinante 1 sind; diese Substitution schreiben wir abgekürzt in der Gestalt $v = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ und werden übrigens die Substitutionen der Determinante -1, die wir vorab ausschliessen, späterhin von selbst mit erledigen. Wir verlangen, dass $(\varkappa, \lambda, \mu)$ durch v wieder in eine Form ihrer Art übergeführt wird, und schreiben demgemäss:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varkappa' + \lambda'\sqrt{q} = (\varkappa + \lambda\sqrt{q})\alpha^2 + 2\mu\sqrt{r}\,\alpha\gamma - (\varkappa - \lambda\sqrt{q})\gamma^2, \\ \qquad\mu'\sqrt{r} = (\varkappa + \lambda\sqrt{q})\alpha\beta + \mu\sqrt{r}(\alpha\delta + \beta\gamma) - (\varkappa - \lambda\sqrt{q})\gamma\delta, \\ -\varkappa' + \lambda'\sqrt{q} = (\varkappa + \lambda\sqrt{q})\beta^2 + 2\mu\sqrt{r}\,\beta\delta - (\varkappa - \lambda\sqrt{q})\delta^2, \end{cases}$$

wo also $\varkappa', \lambda', \mu'$ gleichfalls ganze rationale Zahlen sein müssen. Um zu sehen, welche Zahlwerthe für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zugänglich sind, entwickeln wir aus (4) das nachfolgende Gleichungssystem:

---

*) Die beiden Wurzeln $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ sollen stets positiv genommen werden.

$$(5)\quad\begin{cases} \varkappa' = \varkappa\cdot\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)+\lambda\cdot\frac{1}{2}\sqrt{q}\,(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)\\ \qquad\qquad + \mu\sqrt{r}(\alpha\gamma-\beta\delta),\\ \lambda' = \varkappa\cdot\frac{1}{2\sqrt{q}}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)+\lambda\cdot\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\\ \qquad\qquad + \mu\sqrt{\frac{r}{q}}(\alpha\gamma+\beta\delta),\\ \mu' = \varkappa\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}(\alpha\beta-\gamma\delta)+\lambda\sqrt{\frac{q}{r}}(\alpha\beta+\gamma\delta)+\mu(\alpha\delta+\beta\gamma) \end{cases}$$

und knüpfen weiter an den sofort evidenten Satz: Einem beliebig gewählten Tripel ganzer Zahlen $\varkappa$, λ, μ entspricht stets und nur dann immer wieder ein Tripel ganzer Zahlen $\varkappa'$, λ', μ', wenn die neun Coefficienten der ternären Substitution (5) durchgängig ganze rationale Zahlen sind, was wir nun des nähern zu untersuchen haben.

Wir nennen die Coefficienten der Substitution (5) a_{ik} und bemerken: Da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ und a_{33} ganzzahlig ist, so werden $2\alpha\delta$ und $2\beta\gamma$ ganze Zahlen sein; ein Gleiches gilt von $\alpha^2+\delta^2 = a_{11}+a_{22}$, $\beta^2+\gamma^2 = -a_{11}+a_{22}$. Es folgt, dass auch die vier Grössen $(\alpha\pm\delta)^2$, $(\beta\pm\gamma)^2$ ganze Zahlen sind, und daraufhin schreibe man:

$$(6)\quad\begin{cases} \alpha+\delta = a\sqrt{\sigma_1}\sqrt{\pi_1}, & \beta+\gamma = c\sqrt{\sigma_2}\sqrt{\pi_2},\\ \alpha-\delta = b\sqrt{\tau_1}\sqrt{\pi_1}, & \beta-\gamma = d\sqrt{\tau_2}\sqrt{\pi_2}; \end{cases}$$

hierbei sind a, b, c, d, sowie die σ_i, τ_i, π_i ganze Zahlen, von denen die letzten sechs keinen Primfactor mehr quadratisch zu enthalten brauchen; die Formeln (6) sind überdies so gewählt, dass sowohl für $i=1$, wie $i=2$ keine zwei unter den drei Zahlen σ_i, τ_i, π_i einen Primfactor > 1 gemeinsam haben sollen. Die Coefficienten von v nehmen daraufhin die Gestalt an:

$$(7)\quad\begin{cases} \alpha = \frac{a\sqrt{\sigma_1}+b\sqrt{\tau_1}}{2}\cdot\sqrt{\pi_1}, & \beta = \frac{c\sqrt{\sigma_2}+d\sqrt{\tau_2}}{2}\cdot\sqrt{\pi_2},\\ \gamma = \frac{c\sqrt{\sigma_2}-d\sqrt{\tau_2}}{2}\cdot\sqrt{\pi_2}, & \delta = \frac{a\sqrt{\sigma_1}-b\sqrt{\tau_1}}{2}\cdot\sqrt{\pi_1}. \end{cases}$$

Jetzt setze man die beiden Gleichungen an:

$$+a_{12}+qa_{21} = (\alpha^2-\delta^2)\sqrt{q} = ab\pi_1\sqrt{\sigma_1\tau_1 q},$$
$$-a_{12}+qa_{21} = (\beta^2-\gamma^2)\sqrt{q} = cd\pi_2\sqrt{\sigma_2\tau_2 q},$$

aus denen folgt, dass die beiden ganzen Zahlen $\sigma_1 . \tau_1 . q$ und $\sigma_2 . \tau_2 . q$ reine Quadrate sein müssen. Dies ist nur dadurch möglich, dass jedesmal die eine der beiden Zahlen σ_i, τ_i gleich q, die andere aber gleich 1 wird, was vier verschiedene Fälle giebt. Von diesen sind aber die beiden $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\tau_1 = \tau_2 = q$ und $\sigma_1 = \sigma_2 = q$, $\tau_1 = \tau_2 = 1$

unmöglich, weil für sie z. B. a_{23} nur dann ganzzahlig ausfallen kann, wenn eine der Zahlen π_1, π_2 durch q theilbar ist, entgegen dem Umstande, dass π_i relativ prim gegen σ_i, τ_i ist. Wir behalten also nur die beiden Fälle:

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{I.}\quad \sigma_1 = 1, \quad \tau_1 = q, \quad \sigma_2 = q, \quad \tau_2 = 1, \\ \text{II.}\quad \sigma_1 = q, \quad \tau_2 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad \tau_2 = q. \end{cases}$$

Der grösste gemeinsame Factor ε von π_1 und π_2 muss offenbar $4(\alpha\delta - \beta\gamma) = 4$ theilen; wir haben also nur zwei Möglichkeiten 1) $\varepsilon = 1$, 2) $\varepsilon = 2$ und demgemäss von (8) aus die vier Fälle I, 1) I, 2) II, 1) II, 2). Für $\varepsilon = 2$ schreiben wir $\pi_i = 2\pi_i'$ und heben den in den Ausdrücken von α, β, γ, δ auftretenden Factor $\sqrt{2}$ gegen die 2 im Nenner. Indem wir weiter fordern, dass a_{23} ganzzahlig wird, entspringt die fernere Bedingung, dass die ganze Zahl $\pi_1\pi_2 \cdot r$ ein reines Quadrat sein muss, und das giebt die Alternative $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = r$, bez. $\pi_1 = r$, $\pi_2 = 1$ *). So haben wir letzten Endes acht verschiedene Fälle, und man wird bemerkt haben, dass wir für v hier gerade zu den acht Arten der Substitutionen S, T etc. der $\Gamma^{(q,r)}$ zurückgeführt sind. Diese ergeben denn auch durchgehends ganzzahlige ternäre Substitutionen (5), und wir haben also den Satz: *Die Substitutionen v, durch welche die in* (1) *gegebenen quadratischen Formen* $(\varkappa, \lambda, \mu)$ *wieder in Formen ihrer Art transformirt werden, coincidiren gerade mit den gesammten Substitutionen unserer Gruppe* $\Gamma^{(q,r)}$.

Die Substitutionen (3) der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, welche (1) in eine Form gleicher Art überführen, entspringen aus den bisher gefundenen v einfach durch Combination mit der einzelnen Substitution $x' = x$, $y' = -y$. Operiren wir mit den nicht-homogenen ω-Substitutionen, so erzielen wir für unsere Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ denselben Effect, wenn wir an Stelle der eben gemeinten Substitutionen der Determinante -1 die Operationen zweiter Art der $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ setzen; ihnen entsprechen ganzzahlige ternäre Substitutionen (5) der Determinante -1.

Die Gesammtheit der solcherweise erhaltenen ternären Substitutionen (5) bildet eine mit der $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ holoedrisch isomorphe Gruppe, welche wir auch als Gruppe der ganzzahligen ternären Substitutionen der ternären quadratischen Form $(\varkappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2)$ in sich ansprechen können**). Indem wir also $\varkappa$, λ, μ als homogene Coordinaten der Ebene deuten, und zwar derart fixiren, dass $\varkappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2 = 0$ eine Ellipse darstellt, wird sich die Eintheilung der ω-Halbebene in bekannter

---

*) Im Falle $\varepsilon = 2$ tritt π_i' an Stelle von π_i.

**) Solchergestalt ist hier wieder Anschluss an die Poincaré'sche Originalarbeit gewonnen, von der ich in meiner vorletzten Arbeit ausging (cf. Bd. 38 der Annalen p. 50).

Weise (cf. „Vorl. über Modulf.“ pag. 60) in eine geradlinige Eintheilung des Ellipseninneren projiciren lassen, wie sie direct der ternären Gestalt der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ zugehört.

2.

Repräsentation, Aequivalenz u. s. w. der Formen. Erledigung des Falles $D<0$.

Die Begriffsbestimmungen der Theorie der ganzzahligen binären quadratischen Formen übertragen sich jetzt zwanglos auf die Theorie der Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$. Wir scheiden zuvörderst die Formen *positiver* Determinante D von denen *negativer* Determinante und bezeichnen eine Form mit $D<0$ als positiv oder negativ, je nachdem $(\varkappa+\lambda\sqrt{q})$ einen positiven oder negativen Zahlwerth hat. Natürlich treten nur solche Determinanten D auf, welche Darstellungen in der Gestalt $\varkappa^2-q\lambda^2+r\mu^2$ durch ganze Zahlen $\varkappa$, λ, μ zulassen. Den grössten gemeinsamen Theiler τ der drei Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu$ benennen wir als *Theiler der Form* $(\varkappa, \lambda, \mu)$; ist $\tau=1$, so möge $(\varkappa, \lambda, \mu)$ als *ursprüngliche* Form bezeichnet werden, für $\tau>1$ aber als *abgeleitete*.

Bei negativer Determinante betrachten wir etwa nur die positiven Formen und repräsentiren die einzelne unter ihnen durch den in der positiven ω-Halbebene gelegenen Punkt

$$\omega=\frac{-\mu\sqrt{r}+i\sqrt{-D}}{\varkappa+\lambda\sqrt{q}}, \tag{1}$$

welcher die eine Wurzel $x:y$ der mit Null identisch gesetzten Form angiebt. In entsprechender Weise kommen einer Form positiver Determinante die beiden reellen Wurzeln zu:

$$\omega_1=\frac{-\mu\sqrt{r}+\sqrt{D}}{\varkappa+\lambda\sqrt{q}}, \qquad \omega_2=\frac{-\mu\sqrt{r}-\sqrt{D}}{\varkappa+\lambda\sqrt{q}}, \tag{2}$$

und wir benennen hier ($\sqrt{D}$ stets positiv genommen) ω_1 als erste, ω_2 als zweite Wurzel der Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$. Letztere Form repräsentiren wir durch den in der positiven Halbebene gelegenen Halbkreis

$$(\varkappa+\lambda\sqrt{q})(x^2+y^2)+2\mu\sqrt{r}\,x-(\varkappa-\lambda\sqrt{q})=0, \tag{3}$$

welcher die beiden Punkte (2) verbindet, und der mit einem von ω_1 nach ω_2 hinweisenden Pfeile versehen sein soll; die beiden Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ und $(-\varkappa, -\lambda, -\mu)$ der Determinante $D>0$ werden zwar durch denselben Halbkreis (3) repräsentirt, aber die zugehörigen Pfeilrichtungen sind gerade entgegengesetzt.

Eine Form negativer Determinante heisst *ambig*, so oft ihr repräsentirender Punkt auf einem Symmetriekreise der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ liegt. Eine Form positiver Determinante heisst *ambig* falls ihr repräsen-

tirender Halbkreis orthogonal gegen einen und damit (wie wir sehen werden) gleich gegen unendlich viele Symmetriekreise der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ verläuft.

Zwei Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ und $(\varkappa', \lambda', \mu')$ heissen einander *äquivalent* oder des genaueren *eigentlich äquivalent*, wenn die eine in die andere durch eine Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$ überführbar ist; sie heissen *uneigentlich äquivalent*, wenn die eine in die andere durch eine Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$, combinirt mit $\omega' = -\omega$, überführbar ist. Aequivalente Formen haben denselben Theiler und dieselbe Determinante; ist letztere negativ, so sind beide Formen entweder positiv oder beide negativ. Die repräsentirenden Elemente beider Formen (Punkte, Halbkreise mit Pfeilen) gehen bei eigentlicher Aequivalenz durch Substitutionen erster Art, bei uneigentlicher Aequivalenz aber durch solcher zweiter Art der Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ in einander über; jedoch ist sehr zu betonen, dass für $D > 0$ bei uneigentlicher Aequivalenz die Pfeilrichtung des einen Halbkreises beim Fortgang zum andern umzukehren ist, um die richtige Pfeilrichtung für die uneigentlich äquivalente Form zu erhalten. Man wird dies im Hinblick auf die Folge der Wurzeln (2) leicht durch die Bemerkung bestätigen, dass die Ausübung der Substitution $\omega' = -\omega$ nur einen Zeichenwechsel von μ bewirkt.

Soll eine Form sich selbst uneigentlich äquivalent sein, so muss für $D < 0$ der repräsentirende Punkt auf einem Symmetriekreise der Theilung liegen; für $D > 0$ muss eine Operation zweiter Art in $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ existiren, welche den repräsentirenden Halbkreis unter Permutation seiner beiden Fusspunkte in sich transformirt. Dieselbe muss im Innern der Halbebene auf jenem Kreise einen Fixpunkt aufweisen und ist sonach nothwendig eine Spiegelung, deren Symmetriekreis gegen den repräsentirenden Halbkreis der Form orthogonal verläuft. Es folgt: *Jede sich selbst uneigentlich äquivalente Form ist ambig.**)

Den Ausgangsraum für die Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ wählen wir, wie schon stets in den oben betrachteten Fällen, jetzt ganz allgemein derart, dass er sich unmittelbar oberhalb des Punktes $\omega = i$ zur rechten und linken Seite der imaginären Axe symmetrisch anlegt. Von den Randpunkten des Bereiches rechnen wir nur die auf der linken Seite der imaginären Axe gelegenen demselben zu. Dies gilt freilich nur, falls $\bar{\Gamma}$ allein aus Spiegelungen erzeugbar ist; in den übrigen Fällen wird man die Vorschrift in leicht ersichtlicher Weise modificiren.

Eine quadratische Form negativer Determinante heisst *reducirt*, falls ihr repräsentirender Punkt dem Ausgangsraume angehört; eine

*) Infolge der etwas veränderten Begriffsbestimmung der ambigen Formen, erscheint der Wortlaut dieses Resultates gegenüber dem bekannten Satze der gewöhnlichen Zahlentheorie ein wenig modificirt.

quadratische Form positiver Determinante heisst *reducirt*, falls ihr repräsentirender Halbkreis den Ausgangsraum schneidet. *Eine Form negativer Determinante ist stets mit einer und nur einer reducirten Form äquivalent, eine Form positiver Determinante wenigstens mit einer.* Uebrigens bemerkt man bei $D > 0$ als particuläre Formen diejenigen, deren repräsentirende Halbkreise Symmetriekreise der $\bar{\Gamma}^{(q,r)}$ sind; diese werden wir reducirt nennen, wenn der betreffende Kreis den Ausgangsraum begrenzt und ihm zugerechnet wird*). Indem wir alle äquivalenten Formen in eine *Classe* vereinigen, werden wir dieselbe bei $D < 0$ durch ihre eine reducirte Form, bei $D > 0$ durch das System ihrer Reducirten repräsentiren können.

Indem wir weiterhin zunächst allein die Formen negativer Determinante erledigen, müssen wir die Anzahl der Substitutionen abzählen, durch welche eine Form in eine mit ihr äquivalente Form und also in sich selbst transformirt wird. Die Eintheilung der Halbebene ergiebt hier sofort die Antwort: *Eine Form* $(\varkappa, \lambda, \mu)$ *negativer Determinante wird im Allgemeinen nur durch die Identität in sich transformirt; eine Ausnahme bilden nur die Formen, deren repräsentirende Punkte Fixpunkte elliptischer Substitutionen sind; ist im Einzelfall deren Periode* ν, *so giebt es* ν *Substitutionen der Form in sich.* Die Determinanten dieser besonderen Formen sind, sofern wir letztere ursprünglich wählen, $D = -1, \ -2, \ -q, \ -2q, \ -r, \ -2r, \ -qr, \ -2qr$, von denen im Einzelfalle (q, r) natürlich im Allgemeinen nur eine beschränkte Zahl auftritt, z. B. drei für $(3, 1)$, vier für $(11, 1)$ u. s. w.**) Die in Rede stehenden Formen sind entweder ambig, wobei ihre repräsentirenden Punkte Schnittpunkte verschiedener Symmetriekreise sind, oder die repräsentirenden Punkte stellen die Centren der von den Symmetriekreisen gebildeten Polygone dar.

Die Bedingungen für die reducirten Formen lassen sich leicht in eine rein arithmetische Gestalt umsetzen. Man hat zum Ausdruck zu bringen, dass der repräsentirende Punkt (1) der Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ innerhalb bez. ausserhalb gewisser Kreise liegt, derjenigen Kreise nämlich, welche den Ausgangsraum einschliessen. Zu dem Ende hat man in die linke Seite der betreffenden Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = -\frac{\varkappa - \lambda\sqrt{q}}{\varkappa + \lambda\sqrt{q}}, \quad x = \frac{-\mu\sqrt{r}}{\varkappa + \lambda\sqrt{q}}$$

einzusetzen, die solcherweise entweder > 0 oder < 0 werden muss. Man sieht, *dass sich die Bedingungen für die reducirten Formen stets*

---

*) Jedoch bilden hier wieder die Formen $(0, 0, \mu)$ eine leicht erkennbare Ausnahme.

**) Unter Zugrundelegung der im vierten Abschnitt zu gebrauchenden Schreibweise der Formen sind die im Texte gemeinten besonderen Formen diejenigen der Determinanten $D = -1$ und -2.

durch eine Anzahl linearer Ungleichungen ausdrücken. Die Zahl derselben ist gleich der Anzahl der Seiten des Ausgangsraumes, und übrigens ist noch hinzuzusetzen, dass für die ambigen Formen eine oder zwei jener Ungleichungen in Gleichungen übergehen.

Beispielsweise wird im Falle $(q, r) = (3, 1)$ der Ausgangsraum von den drei Kreisen begrenzt:

$$(1 - \sqrt{3})(x^2 + y^2) + (1 + \sqrt{3}) = 0, \quad x^2 + y^2 \pm 2x - 1 = 0.$$

Es ergeben sich daraufhin als Bedingungen einer reducirten *positiven* Form die nachfolgenden:

$$\varkappa + \lambda \geqq 0, \quad \varkappa + \mu \leqq 0, \quad \varkappa < \mu, \tag{4}$$

wobei im Falle des Gleichheitszeichens der ersten Formel überdies noch $\mu \geqq 0$ zu fordern ist. Im Falle $(q, r) = (11, 1)$ haben wir die Grenzkreise:

$$(3 - \sqrt{11})(x^2 + y^2) + (3 + \sqrt{11}) = 0, \quad x^2 + y^2 \pm 2x - 1 = 0,$$
$$(-3 + \sqrt{11})(x^2 + y^2) \pm 4x + (3 + \sqrt{11}) = 0;$$

man findet als Bedingungen einer reducirten positiven Form:

$$\left\{\begin{array}{l} \varkappa + 3\lambda \geqq 0, \quad \varkappa + \mu \leqq 0, \quad \varkappa < \mu, \\ 3\varkappa + 11\lambda - 2\mu \geqq 0, \quad 3\varkappa + 11\lambda + 2\mu > 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

mit der Nebenbedingung $\mu \geqq 0$, falls in der ersten Formel das Gleichheitszeichen gilt. Natürlich ist von diesen fünf Bedingungen keine einzige entbehrlich.

3.

Erledigung der Formen von positiver Determinante.

Die Frage, welches die Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ sind, die eine Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ positiver Determinante in sich überführen, lässt sich (gerade wie bei den ganzzahligen quadratischen Formen) nur erst durch eine arithmetische Betrachtung beantworten. Soll es hyperbolische Substitutionen in $\Gamma^{(q,r)}$ geben, welche $(\varkappa, \lambda, \mu)$ in sich überführen, so werden dieselben eine cyklische Untergruppe bilden, die entweder nur aus Substitutionen S besteht, oder deren Substitutionen S eine in ihr ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei bilden. Jedenfalls wird es genügen, wenn wir für *jede* Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ positiver Determinante hyperbolische Substitutionen S nachweisen, welche $(\varkappa, \lambda, \mu)$ in sich transformiren; hierbei dürfen wir $(\varkappa, \lambda, \mu)$ offenbar als ursprüngliche Form voraussetzen.

Gehört zu $(\varkappa, \lambda, \mu)$ im mehrfach genannten Sinne die unter (1) pag. 63 genannte Operation S, so müssen die beiden Ausdrücke:

$$(\varkappa + \lambda\sqrt{q})\,\omega^2 + 2\mu\sqrt{r}\,\omega - (\varkappa - \lambda\sqrt{q}),$$
$$(-dqr + cr\sqrt{q})\,\omega^2 + 2bq\sqrt{r}\,\omega + (dqr + cr\sqrt{q}),$$

mit Null identisch gesetzt, gleiche Wurzeln haben. Demnach setzen wir, unter π einen Proportionalitätsfactor verstehend,

$$(1) \qquad -dqr = \pi\varkappa, \quad cr = \pi\lambda, \quad bq = \pi\mu$$

und berechnen unter Einführung der Determinante D von $(\varkappa, \lambda, \mu)$ für die Zahl a der Substitution S die Gleichung:

$$(2) \qquad \pi^2 D = qr(a^2 - 4).$$

So oft umgekehrt in Uebereinstimmung mit (1) und (2) vier ganze Zahlen a, b, c, d gefunden werden können, von den die drei letzten nicht alle verschwinden, ist dadurch eine Substitution S gesuchter Art wirklich bestimmt.

Indem wir vorab bemerken, dass π jedenfalls eine ganze Zahl ist (da $\varkappa, \lambda, \mu$ ohne gemeinsamen Theiler sind), müssen wir für die weitere Discussion von (1) und (2) eine vierfache Fallunterscheidung treffen.

I. $\varkappa, \mu$ *nicht zugleich durch* q *theilbar;* $\varkappa, \lambda$ *nicht zugleich durch* r *theilbar.*

In diesem Falle ist π eine durch qr theilbare Zahl; wir substituiren $\pi = qrv$, $qrD = D'$, so dass v und D' ganze Zahlen sind, und schreiben übrigens der Gewohnheit wegen $a = u$. Die Gleichungen (1), (2) liefern:

$$(3) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = vr\mu, \quad c = vq\lambda, \quad d = -v\varkappa.$$

Die unendlich vielen Lösungen der zuerst stehenden Pell'schen Gleichung liefern die zu $(\varkappa, \lambda, \mu)$ gehörende Gruppe hyperbolischer S.

II. $\varkappa \equiv \mu \equiv 0$, (*mod.* q); $\varkappa, \lambda$ *nicht zugleich durch* r *theilbar.*

In diesem Falle ist π durch r, D aber durch q theilbar. Schreiben wir also $a = u$, $\pi = rv$, $rD = qD'$, so sind v und D' sicher ganze Zahlen. Die Gleichungen (1) und (2) gehen über in:

$$(4) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = vr \cdot \frac{\mu}{q}, \quad c = v\lambda, \quad d = -v \cdot \frac{\varkappa}{q}$$

und liefern die gewünschten Substitutionen S.

III. $\varkappa, \mu$ *nicht zugleich durch* q *theilbar;* $\varkappa \equiv \lambda \equiv 0$, (*mod.* r).

Jetzt ist π durch q, D aber durch r theilbar. Man setze also $\pi = qv$, $qD = rD'$ und reihe den Formeln (4) die nachfolgenden an:

$$(5) \quad u^2 - D'v^2 = 4, \quad a = u, \quad b = v\mu, \quad c = vq \cdot \frac{\lambda}{r}, \quad d = -v \cdot \frac{\varkappa}{r}.$$

IV. $\varkappa \equiv \mu \equiv 0$, (*mod.* q); $\varkappa \equiv \lambda \equiv 0$, (*mod.* r).

Nun wird man direct $\pi = v$, $qrD' = D$ setzen und hat in D' eine ganze Zahl, da D durch qr theilbar ist. Es wird aber des Weiteren:

$$(6)\quad u^2 - D'v^2 = 4,\quad a = u,\quad b = v\cdot\frac{\mu}{q},\quad c = v\cdot\frac{\lambda}{r},\quad d = -v\cdot\frac{\varkappa}{qr}\cdot$$

Solcherweise haben wir das Resultat erhalten: *Zu jeder ursprünglichen, und also überhaupt zu jeder Form* $(\varkappa, \lambda, \mu)$ *positiver Determinante gehört eine in* $\Gamma^{(q,r)}$ *enthaltene cyklische Untergruppe von hyperbolischen Substitutionen, welche* $(\varkappa, \lambda, \mu)$ *in sich transformiren.* Auf Grund dieses Resultates lässt sich zugleich unsere oben (in I, 3) betreffs der Mannigfaltigkeit hyperbolischer Substitutionen in der $\Gamma^{(q,r)}$ gemachte Behauptung rechtfertigen. Die Verhältnisse werden am Deutlichsten, wenn man sie sich in der Ebene der homogenen Coordinaten $\varkappa, \lambda, \mu$ veranschaulicht. Statt dabei die Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ durch eine geradlinige Transversale der Ellipse $\varkappa^2 - q\lambda^2 + r\mu^2 = 0$ zu repräsentiren, kann man zu diesem Zweck direct den ausserhalb der Ellipse gelegenen Pol dieser Transversale benutzen, dessen Coordinaten gerade die Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu$ sind. Alle ausserhalb der Ellipse gelegenen Punkte mit rationalen Coordinaten repräsentiren dann Formen positiver Determinanten, und dass diese Punkte ausserhalb der Ellipse überall dicht liegen, ist unmittelbar evident. Dieses ist aber im Grunde, was wir oben behaupteten.

Im Allgemeinen lässt sich eine Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ positiver Determinante nur durch die Substitutionen der ihr soeben zugewiesenen cyklischen G_∞ in sich transformiren, in die wir übrigens neben den S die vielleicht sonst noch in Betracht kommenden hyperbolischen Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ aufgenommen denken. Aber es giebt besondere Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$, die ausser der G_∞ noch weitere Substitutionen in sich zulassen. Wir gedenken hier nur im Vorbeigehen der ambigen Formen, deren Substitutionen in sich offenbar eine erweiterte $\overline{G}_{2\infty}$ bilden. Wichtiger sind die Formen, deren repräsentirende Kreise durch einen und damit durch unendlich viele Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode *zwei* gehen. Die einzelne solche Substitution wird den repräsentirenden Kreis von $(\varkappa, \lambda, \mu)$ unter Wechsel der Pfeilrichtung in sich transformiren. Nennen wir sonach die beiden Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$, $(-\varkappa, -\lambda, -\mu)$ der positiven Determinante D einander *invers*, so gilt ersichtlich der Satz: *Eine Form* $(\varkappa, \lambda, \mu)$ *positiver Determinante ist stets und nur dann mit ihrer inversen Form äquivalent, wenn der repräsentirende Kreis durch Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode* 2 *geht.* Sehen wir in diesem Falle die beiden einander inversen Formen als nicht wesentlich von einander verschieden an, so kommt

eine $G_{2\infty}$ von Substitutionen in sich in Betracht, welche eine den Diedergruppen analoge Structur zeigt.

Als eine Besonderheit gegenüber den ganzzahligen quadratischen Formen müssen wir noch hervorheben, dass auch zu den Symmetriekreisen der Halbebenentheilung von $\overline{\Gamma}^{(q,r)}$ cyklische G_∞ hyperbolischer Substitutionen gehören. Diese Kreise werden im Allgemeinen durch eine $\overline{G}_{4\infty}$ in sich transformirt; die zugehörigen ursprünglichen Formen gehören den Determinanten $D = 1, 2, 2q, r, 2r, 2qr$ an*).

Die Theorie der reducirten Formen gestaltet sich nun genau, wie bei den ganzzahligen binären Formen positiver Determinante. Der repräsentirende Halbkreis einer Form $(\varkappa, \lambda, \mu)$ wird durch eine Reihe von Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ auf eine *endliche* Anzahl von im Ausgangsraum gelegenen Kreissegmenten transformirt. Diese Kreissegmente setzen sich in bekannter Weise zu einer geschlossenen Kette zusammen, welche die Periode der reducirten Formen versinnlicht. Haben wir insbesondere mit einer „sich selbst inversen Classe" zu thun, so besteht jene Kette aus zwei mit einander coincidirenden Hälften, die in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen sind.**)

Natürlich ist es wieder ein Leichtes, die Bedingungen für eine reducirte Form in rein arithmetische Gestalt umzusetzen; wir müssen zum Ausdruck bringen, dass die Eckpunkte des Ausgangsraumes nicht zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreises:

$$(7) \qquad (\varkappa + \lambda\sqrt{q})(x^2 + y^2) + 2\mu\sqrt{r}\,x - (\varkappa - \lambda\sqrt{q}) = 0$$

gelegen sind. So sind z. B. im Falle $q = 3$, $r = 1$ die drei Ecken des Ausgangsdreiecks bei $\omega = i$, $\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}}$, $\frac{-1+i}{-1+\sqrt{3}}$ gelegen. Die Bedingung einer reducirten Form ist also diese, *dass die drei ganzen Zahlen*

$$(8) \qquad \lambda, \quad \varkappa + 3\lambda + \mu, \quad \varkappa + 3\lambda - \mu$$

nicht alle dasselbe Vorzeichen haben dürfen; ist im Besonderen eine dieser Zahlen Null, so müssen die beiden anderen verschiedenes Vorzeichen haben; das Verschwinden von zwei Zahlen (8) tritt nur ein, wenn (7) Grenzkreis des Ausgangsraumes ist.

---

*) Wie im vorigen Artikel kommen wir hier auf die Determinanten $D = 1, 2$ zurück, falls wir die spätere Schreibweise der Formen gebrauchen (Absch. IV).

**) Man vergl. hier überall die eingehenden Auseinandersetzungen in den „Vorlesungen über die Modulfunctionen".

III.

Congruenzgruppen und Transformationstheorie.

1.

Die Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe innerhalb der $\Gamma^{(q,r)}$.

Die eleganten Anwendungen, welche die in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden Modulargleichungen auf die ganzzahligen quadratischen Formen zulassen, legten den Wunsch nahe, nach analogen Entwicklungen im Gebiete der Gruppen $\Gamma^{(q,r)}$ und der zugehörigen quadratischen Formen zu suchen. Wir beginnen diese Entwicklung mit der Betrachtung derjenigen Untergruppe von $\Gamma^{(q,r)}$, welche wir nach Analogie der Modulgruppe als Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezeichnen. Die Verhältnisse gestalten sich am durchsichtigsten bei Rückgang auf die ternäre Gestalt der Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ *). Alle in (5) II, 1 angegebenen Substitutionen der ternären $\Gamma^{(q,r)}$, deren Coefficienten die Congruenzen:

$$a_{ii} \equiv 1, \quad a_{ik} \equiv 0, \ (\text{mod.}\, n), \quad i \gtrless k \tag{1}$$

befriedigen, bilden offenbar eine in der Gesammtgruppe ausgezeichnete Untergruppe, die wir als *Hauptcongruenzgruppe* n^{ter} *Stufe* bezeichnen.

Um diese Untergruppe bei Gebrauch der gewöhnlichen ω-Substitutionen direct definiren zu können, müssen wir auf die Formeln in Artikel II, 1 zurückgehen. Hierbei werden wir n sogleich auf ungerade gegen q und r relativ prime Zahlwerthe einschränken, um die Untersuchung nicht zu complicirt zu gestalten. Soll nun (5) II, 1 der Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe angehören, so ist jede der sechs Zahlen $(a_{12} \pm q a_{21})$, $(a_{13} \pm r a_{31})$, $(q a_{23} \pm r a_{32})$ durch n theilbar, und daraus folgt durch leichte Zwischenrechnung für die vier ganzen Zahlen a, b, c, d der entsprechenden ω-Substitution:

$$ab \equiv ac \equiv ad \equiv bc \equiv cd \equiv db \equiv 0, \ (\text{mod.}\, n). \tag{2}$$

Die Congruenzen $a_{11} + a_{22} \equiv 2$, $a_{11} - a_{22} \equiv 0$ liefern weiter:

$$a^2\sigma_1\pi_1 + b^2\tau_1\pi_1 \equiv 4, \quad c^2\sigma_2 + d^2\tau_2 \equiv 0, \ (\text{mod.}\, n), \tag{3}$$

und endlich folgt aus $a_{33} \equiv 1$ unter Rücksicht auf die Determinante 1 der fraglichen ω-Substitution:

$$a^2\sigma_1\pi_1 - b^2\tau_1\pi_1 \equiv 4, \quad c^2\sigma_2 - d^2\tau_2 \equiv 0, \ (\text{mod.}\, n). \tag{4}$$

Da hiernach b^2 durch n theilbar ist, so muss a prim gegen n sein, und also geben die Congruenzen (2) $b \equiv c \equiv d \equiv 0$, (mod. n), während a der Congruenz $a^2\sigma_1\pi_1 \equiv 4$ genügen muss. Umgekehrt überblickt man sofort, dass *jede* diesen Bedingungen genügende ω-Substitution

*) Cf. Poincaré's öfter gen. Arbeit in Liouville's Journal, 4te Folge, Bd. 3.

umgekehrt eine die Congruenzen (1) befriedigende ternäre Operation liefert, und also kommt als erstes Resultat:

Alle den Bedingungen

$$(5)\qquad a^2\sigma_1\pi_1 \equiv 4,\quad b\equiv c\equiv d\equiv 0,\ (\text{mod. } n)$$

genügenden Substitutionen (7) *in II,* 1 *der* $\Gamma^{(q,r)}$ *bilden eine ausgezeichnete Untergruppe, die wir durch* $\Gamma_{(n)}^{(q,r)}$ *oder kurz* $\Gamma_{(n)}$ *bezeichnen und natürlich wieder Hauptcongruenzgruppe* n^{ter} *Stufe nennen.*

Man untersuche jetzt zuvörderst, welche von den acht Substitutionsarten S, T etc. sich an der Untergruppe $\Gamma_{(n)}$ betheiligen, und stelle sich zu dem Ende eine ausführliche Tabelle über die acht im Artikel II, 1 unterschiedenen Fälle auf. Man wird aus derselben leicht ablesen, dass den in der ersten der nachfolgenden Reihen aufgeschriebenen Werthen von $\sigma_1\pi_1$ jeweils die darunter stehende Substitutionsart entspricht:

$$(6)\qquad \begin{aligned}\sigma_1\pi_1 &= 1,\ q,\ 2,\ 2q,\ r,\ rq,\ 2r,\ 2rq,\\ &= S,\ T,\ U,\ V,\ S',\ T',\ U',\ V'.\end{aligned}$$

Hier ist es nun weiter eine Vereinfachung unserer Betrachtung, wenn wir n als Primzahl annehmen; es liegt diese Voraussetzung zwar keineswegs im Wesen unserer Untersuchung begründet; inzwischen ist es zweckmässig, wenigstens vorab in diesem Specialfall eines primzahligen n die Entwicklung durchzuführen. Soll jetzt die einzelne Substitutionsart an $\Gamma_{(n)}$ theilhaben, so ist als Bedingung dafür aufzustellen, dass ihr $\sigma_1\pi_1$ quadratischer Rest von n ist. Betreffs des quadratischen Charakters der drei Zahlen 2, q, r modulo n treten nun acht verschiedene Fälle ein. *Im ersten, wo alle drei Zahlen Reste sind, nehmen alle acht Arten* $S, T, \ldots$ *an der* $\Gamma_{(n)}$ *theil; in den übrigen sieben Fällen jeweils nur vier z. B.* S, U, S', U' *für den Fall*

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{r}{n}\right)=1,\quad \left(\frac{q}{n}\right)=-1\ \ u.\ s.\ w.$$

Dies ist andrerseits von gruppentheoretischer Seite her verständlich. Die $\Gamma^{(q,r)}$ reducirte sich bezüglich $\Gamma_8^{(q,r)}$ auf eine endliche G_8, die wir als die Gruppe der acht Substitutionen $S=1$, T, U, …, V' ansehen können*). Die acht Operationen der G_8 sind alle vertauschbar, und eine solche Gruppe hat, wie man sofort überblickt, sieben ausgezeichnete G_4 vom Vierertypus zu Untergruppen. Diesen entsprechen innerhalb $\Gamma^{(q,r)}$ sieben**) ausgezeichnete Γ_2 vom Index zwei, und diese sind den oben unterschiedenen Fällen eindeutig zugeordnet, bei denen

*) Hier ist $r>1$ angenommen. Die Modification für $r=1$ wird man immer leicht durchführen.

**) Für $r=1$ werden es nur drei.

nicht alle drei Zahlen $2, q, r$ Reste von n sind. Im Einzelfall ist $\Gamma_{(n)}$ Untergruppe ihrer Γ_2.

Mögen wir jetzt ein Repräsentantensystem für $\Gamma_{(n)}$ und zwar der Gesammtgruppe im Falle $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = +1$, sonst jedoch der zugehörigen Γ_2 aufstellen. Dieses System mag zuvörderst aus allen acht bez. vier Substitutionsarten zusammengesetzt sein. Indess bemerke man, dass jede überhaupt eintretende Art auch Substitutionen für $\Gamma_{(n)}$ liefert. Indem wir also eine der letzteren mit jener zum Repräsentanten aufgegriffenen Substitution combiniren und lieber die so entspringende Substitution in das Repräsentantensystem wählen, wird letzteres ausschliesslich aus Operationen S aufgebaut sein. Von hieraus entspringt durch eine elementare Zwischenrechnung der Satz: *Der Index der Hauptcongruenzgruppe $\Gamma_{(n)}$ in Bezug auf die Gesammtgruppe $\Gamma^{(q,r)}$ ist im Falle $\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \left(\frac{r}{n}\right) = 1$ identisch mit der Anzahl modulo n incongruenter Substitutionen S, in den übrigen sieben Fällen ist er das Doppelte dieser letzteren Anzahl.*

Nun aber lässt sich auf's Leichteste angeben, auf wieviel incongruente Substitutionen die Γ_8 der S modulo n zurückkommt, falls q und r quadratische Reste von n sind. Hier verstehe man einfach unter $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ jeweils eine der beiden ganzen Zahlen mod. n, deren Quadrate $\equiv q$ bez. r sind und brauche das Symbol 2^{-1} modulo n im bekannten Sinne. Dann liefert die einzelne Substitution S vier ganze Zahlen α, β, γ, δ modulo n:

$$(7) \quad \begin{cases} (a + b\sqrt{q})\, 2^{-1} \equiv \alpha, & (c\sqrt{r} + d\sqrt{qr})\, 2^{-1} \equiv \beta, \\ (-c\sqrt{r} + d\sqrt{qr})\, 2^{-1} \equiv \gamma, & (a - b\sqrt{q})\, 2^{-1} \equiv \delta, \end{cases}$$

welche eine mit 1 congruente Determinante bilden $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$, und umgekehrt liefert jedes solche Zahlenquadrupel offenbar eine Classe modulo n congruenter Substitutionen S: *Die Anzahl modulo n unterschiedener Substitutionen S ist gleich der Anzahl bezüglich n incongruenter Modulsubstitutionen, d. i. sie ist* $\frac{n(n^2-1)}{2}$. Aber zugleich ist durch den eingeschlagenen Beweisgang ohne Weiteres evident geworden, *dass die durch* (7) *begründete Beziehung der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ modulo n incongruenter Substitutionen S auf die an analoger Stelle bei den Modulfunctionen eintretende $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ holoedrischen Isomorphismus beider Gruppen darstellt.* *)

---

*) Auch dieser Satz war Gegenstand der Correspondenz des Hrn. Bianchi mit mir, und ich wollte hier jedenfalls ausdrücklich hervorheben, dass Hr.

Dieser merkwürdige Satz ist hier freilich nur erst in den beiden Fällen

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=1 \quad \text{und} \quad -\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=1$$

bewiesen; es ist aber kaum zweifelhaft, dass er ganz allgemein gültig ist. In der grösseren Zahl der übrigen Fälle gelingt der Beweis leicht durch Gebrauch der Galois'schen imaginären Zahlen; inzwischen scheinen einzelne Fälle sich auch auf die Weise noch nicht erledigen zu lassen. Ich will hier nicht auf die Discussion aller dieser Einzelfälle eingehen, um so mehr als fortan eine weitere Specialisation unserer Untersuchung eintreten soll, dahin gehend, dass wir nur noch den Fall I, nämlich $\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{q}{n}\right)=\left(\frac{r}{n}\right)=1$ berücksichtigen wollen. Die zu betrachtenden Primzahlen n sollen also nur noch gewissen arithmetischen Reihen der Differenz $8qr$ entnommen sein, wobei wir ja noch über unendlich viele in Betracht kommende n verfügen. So z. B. handelt es sich für $q=3$, $r=1$ um alle Primzahlen n der Form $n=24h\pm 1$.

Nach dieser Beschränkung reducirt sich also die Gesammtgruppe $\Gamma^{(q,r)}$ bezüglich ihrer ausgezeichneten Untergruppe $\Gamma_{(n)}$ auf eine endliche $G_{\frac{1}{2}n(n^2-1)}$, welche direct mit der wohlbekannten Gruppe dieser Ordnung in der Theorie der Modulfunctionen holoedrisch isomorph ist*). Indem wir das Fundamentalpolygon der $\Gamma_{(n)}^{(q,r)}$ zur geschlossenen Fläche $F_{(n)}^{(q,r)}$ umgestalten, wird diese eine reguläre Eintheilung in $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ Be-

---

Bianchi von seinen Untersuchungen über die automorphen Functionen der Gruppen des Textes aus das in Rede stehende interessante Resultat unabhängig und etwa zu gleicher Zeit mit mir aufgefunden hat.

*) Man könnte gegenüber dieser ganzen Entwicklung den Zweifel haben, ob sich nicht vielleicht $\Gamma^{(q,r)}$ modulo n auf eine von der Gesammtheit verschiedene Untergruppe der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ reduciren möchte. Inzwischen widerlegt man dies am einfachsten auf gruppentheoretischem Wege, indem man einerseits die in ihrer Gesammtheit bekannten Untergruppen von $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ heranzieht, sowie andererseits z. B. die von den Symmetriekreisen $x=0$, $x^2+y^2=1$ und den Ecken der ω-Halbebenentheilung herrührenden Operationen in der modulo n reducirten $\Gamma^{(q,r)}$ verfolgt. Da übrigens $\begin{pmatrix}1, 1\\0, 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1, 0\\1, 1\end{pmatrix}$ von ungerader Periode (mod. n), sind, so lassen sich diese Operationen immer in der Gestalt der Substitutionen S fixiren, und aus ihnen lässt sich die ganze $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ erzeugen. Sicher werden also schon die Substitutionen S und demnach auch die übrigen Arten $T, U, \ldots$ modulo n im Ganzen $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Typen aufweisen.

reiche tragen, welche bei den $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ eindeutigen Transformationen der Fläche in sich unter einander vertauscht werden.*) *Allen den unendlich vielen beim einzelnen n eintretenden Werthcombinationen* (q, r) *entsprechen solcherweise ebenso viele im Wesen verschiedene regulär-getheilte Flächen, die gleichwohl alle zur nämlichen Gruppe* $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ *der Transformationen in sich Anlass geben.* Um dies noch deutlicher zu sehen, gestalte man $F_{(n)}^{(q,r)}$ in eine $\frac{1}{2}n(n^2-1)$-blättrige Riemann'sche Fläche über einer Ebene um. So kommt z. B. bei $(q, r) = (3, 1)$ eine Fläche, die an drei Stellen verzweigt ist, und zwar hängen an der ersten Stelle die Blätter immer zu zweien, an der zweiten Stelle zu je vier, an der dritten zu je sechs zusammen. Dem stelle man die entsprechende Fläche der Modulfunctionen gegenüber; diese wird nicht nur im allgemeinen ein ganz anderes Geschlecht aufweisen, sondern die geometrischen Verhältnisse der Transformationen in sich gestalten sich beiderseits völlig verschieden, was man leicht in's Einzelne verfolgen wird. Einige hierauf bezügliche Ausführungen fügen wir sogleich im folgenden Paragraphen an.

2.

Einzelausführungen über die Untergruppen von $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$. Das Transformationspolygon n^{ter} Ordnung.

Die Periodicität der Operationen der $\Gamma^{(q,r)}$, modulo n betrachtet, lässt sich auf Grund bekannter Sätze ohne Weiteres angeben. Die Periode einer Substitution S ist gleich n oder ein Theiler von $\frac{n-1}{2}$ bez. $\frac{n+1}{2}$, je nachdem (a^2-4) durch n theilbar oder Rest oder Nichtrest von n ist; bei den Substitutionen U giebt in entsprechender Weise (a^2-2) den Ausschlag u. s. w. Als eine erste Besonderheit gegenüber der Modulgruppe haben wir zu nennen, dass in einigen Fällen auch Substitutionen der Periode vier und sechs Fixpunkte besitzen. Wir müssen in diesem Betracht einem leicht entstehenden Bedenken begegnen. Man nehme z. B. den Fall $q = 3$, $r = 1$, wo auf der geschlossenen Fläche drei Arten von Eckpunkten auftreten. Die Eckpunkte der ersten Art sind von vier, die der zweiten Art von acht, diejenigen der dritten endlich von zwölf Elementardreiecken umlagert. Da diese Anzahlen immer durch vier theilbar sind, so könnte man annehmen, dass es in der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ drei verschiedene Arten von Substitutionen der

*) Dass die in Rede stehende Fläche sogar eine regulär-symmetrische Theilung in $n(n^2-1)$ Bereiche trägt, verfolgen wir nicht weiter.

Periode *zwei* giebt, was doch im Widerspruch gegen die bekannte Structur der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ steht. In der That aber wird die Sachlage die sein, dass eine einzelne Substitution der Periode zwei unter ihren Fixpunkten immer zugleich alle drei Arten von Eckpunkten der Theilung aufweisen wird. So z. B. muss für $n = 24h - 1$ die einzelne Substitution fraglicher Periode immer $22h$ Fixpunkte haben, die sich bez. zu $12h$, $6h$ und $4h$ auf die genannten drei Arten von Eckpunkten vertheilen. Man wird diess sogleich noch unmittelbar bestätigt sehen.

Neben den Eckpunkten der Theilung der Fläche $F_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ nehmen die Symmetrielinien derselben besondere Aufmerksamkeit in Anspruch; man wird insbesondere die Diedergruppe aufsuchen wollen, welche die einzelne Symmetrielinie in sich transformirt. Um auch hier gleich wieder den Fall $q = 3$, $r = 1$ heranzuziehen, so unterscheiden wir *drei* Arten von Symmetriekreisen. Von der ω-Halbebene her entnehmen wir als Beispiele dieser drei Arten die imaginäre Axe, den Einheitskreis und den nächst grösseren mit letzterem concentrischen Kreis der ursprünglichen Halbebenentheilung. Zu diesen drei Kreisen gehören cyklische Gruppen hyperbolischer Substitutionen, als deren Erzeugende ich der Reihe nach die folgenden drei berechne:

$$(1) \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3}, & 0 \\ 0, & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}, & \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Da 2 und also auch 2^{-1} Rest von n ist, so erkennt man sofort, dass die Periode aller drei Substitutionen (1) die Zahl $\frac{n-1}{2}$ theilt. Setze man nun z. B. $n = 23$, so muss eine einzelne Substitution der Periode 11 immer zugleich Symmetrielinien aller drei Arten in sich transformiren. Ueberdies muss offenbar jede Symmetrielinie aus $2 \,.\, 11$ Elementardreiecksseiten bestehen, und dies hat für die Substitutionen von der Periode 2 interessante Folgen. Wir wollen die Eckpunkte der Theilung in der oben charakterisirten Folge als Punkte a, b, c bezeichnen. Durch den einzelnen Punkt 0 gehen zwei Symmetrielinien, und die beiden jenem Punkte a auf diesen Linien diametral gegenüberliegenden Punkte (gleichfalls Fixpunkte der zu a gehörenden Substitution) sind bez. ein Punkt b und ein Punkt c. In demselben Sinne weist man einem Punkte b als (auf den in Betracht kommenden Symmetrielinien) diametral gegenüberliegend zwei Punkte a und zwei Punkte c nach,

sowie endlich jedem Punkte c drei a und drei b. Indem man bemerkt, dass mit dem einzelnen Eckpunkte auch jeder gegenüberliegende ein Fixpunkt der zugehörigen Substitution der Periode zwei ist, entspringen die obigen Anzahlen 12, 6, 4 der Fixpunkte sofort auf's Neue.

Für die Anwendungen, die wir weiterhin entwickeln wollen, sind diejenigen $(n+1)$ gleichberechtigten Congruenzgruppen Γ_{n+1} des Index $(n+1)$ besonders wichtig, welche den halbmetacyklischen Untergruppen der $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ entsprechen. Wie in der Theorie der Modulfunctionen bevorzuge ich auch hier diejenige unter ihnen, welche durch die Bedingung $\gamma \equiv 0$, (mod. n) charakterisirt ist. Diese Untergruppe gestattet noch eine etwas andere, den vorliegenden Verhältnissen mehr entsprechende Definition. Man nehme an, dass sich die Zahl $\left(\frac{-1}{n}\right)n$ in das Product zweier complexen Primfactoren:

$$(2) \qquad \left(\frac{-1}{n}\right)n = (e_1 + e_2\sqrt{q})(e_1 - e_2\sqrt{q})$$

mit ganzzahligen e_1, e_2 zerlegen lässt, Factoren, die ich auch wohl kurz e und $\bar{e}$ nenne.*) Braucht man $\sqrt{q}$ (mod. n) in der schon genannten Bedeutung und denkt das Vorzeichen fest fixirt, so wird einer der beiden Factoren e, $\bar{e} \equiv 0$ (mod. n) sein, aber nicht beide. Man denke das Vorzeichen von e_2 so gewählt, dass

$$(3) \qquad \bar{e} = e_1 - e_2\sqrt{q} \equiv 0 \text{ (mod. } n)$$

zutrifft. *Ist umgekehrt die ganze complexe Zahl* $(a - b\sqrt{q})$ *des Körpers* $(1, \sqrt{q})$, *modulo n betrachtet*, $\equiv 0$, *so enthält sie den Theiler* $\bar{e}$. Ist nämlich a bereits durch n theilbar, so gilt dies auch von b, und der Satz ist bewiesen. Ist aber a und also auch b prim gegen n, so definire man zwei ganze Zahlen μ, ν durch $a \equiv e_1\mu$, $b \equiv e_2\nu$, (mod. n). Es folgt dann aus $a - b\sqrt{q} \equiv \mu(e_1 - e_2\nu\mu^{-1}\sqrt{q}) \equiv 0$ sofort $\mu \equiv \nu$; schreibt man also $a = e_1\nu + f_1 n$, $b = e_2\nu + f_2 n$, wo f_i ganze rationale Zahlen sind, so kommt, wie behauptet wurde:

$$a - b\sqrt{q} = \nu(e_1 - e_2\sqrt{q}) + (f_1 - f_2\sqrt{q})\,n.$$

*) Hierzu ist zu bemerken, dass in einigen Fällen q (nämlich immer dann, wenn es nur *eine* Classe von ganzzahligen binären quadratischen Formen der positiven Determinante q giebt) die gekennzeichnete Zerlegung unter den für uns gültigen Voraussetzungen stets möglich ist. In den übrigen Fällen trifft dies freilich nicht mehr durchweg zu; aber es giebt alsdann noch unendlich viele Primzahlen n, welche die fragliche Zerlegung gestatten, ein Satz, der (in anderer Form) von Dirichlet aufgestellt und von Hrn. H. Weber ausführlich begründet ist (cf. *„Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist,"* Math. Ann. Bd. 20 (1882)). Der Einfachheit wegen beziehen wir die Entwicklung des Textes nur auf diese zerlegbaren n; in den übrigen Fällen hat man zu entsprechenden Entwicklungen die Begriffsbestimmungen der Idealtheorie heranzuziehen.

Alle Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$, bei denen im Zähler des zweiten Coefficienten eine durch $e = e_1 + e_2\sqrt{q}$ theilbare ganze Zahl steht, und also im Zähler des dritten Coefficienten eine durch $\bar{e} = e_1 - e_2\sqrt{q}$ theilbare ganze complexe Zahl des Körpers $(1, \sqrt{q})$, bilden eine Untergruppe Γ_{n+1}, welche jene oben besonders herausgegriffene Congruenzgruppe ist.

Das Fundamentalpolygon F_{n+1} dieser Γ_{n+1} benennen wir aus im folgenden Artikel ersichtlich werdenden Gründen als *Transformationspolygon n^{ter} Ordnung.* Da die zur imaginären ω-Axe gehörenden hyperbolischen Substitutionen stets der Γ_{n+1} angehören, so werden wir F_{n+1} zwischen dem Einheitskreise und dem übernächst grösseren, mit ihm concentrischen Symmetriekreise einlagern können (cf. die Figuren). Auch im übrigen bietet es nicht besondere Schwierigkeit, gegebenen Falls das Transformationspolygon zu construiren. Man wolle bemerken, dass ein Repräsentantensystem der Γ_{n+1} modulo n auf die $(n+1)$ Substitutionen $1, \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & \nu \end{pmatrix}$ mit $\nu \equiv 0, 1, \ldots, n-1$ zurückkommt. Reducirt sich aber eine einzelne Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$ modulo n auf $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ mit einem gegen n primen γ, so giebt es eine mit $\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ 0, & \delta' \end{pmatrix}$ congruente Substitution in $\Gamma^{(q,r)}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ 0, & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & \nu \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } n)$$

zutrifft. Hier ist $\delta' \equiv \gamma^{-1}$ und also $\nu \equiv \gamma^{-1}\delta$, (mod. n); so ordnet man jeder Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$, die nicht schon selbst der Γ_{n+1} angehört, sehr leicht ein ν zu, welches wir sogleich auch als Nummer dem zur Substitution gehörigen Bereich der Halbebene zuertheilen. An den Ausgangsbereich, der die Nummer ∞ bekommt, reihe man jetzt weiter ν Bereiche mit den Nummern $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Diese Arbeit wird bedeutend erleichtert, wenn man zugleich auf die *Verzweigung* des Transformationspolygons Bedacht nimmt. In manchen Fällen lässt sich dieselbe ohne Weiteres angeben. So z. B. verfolge man in dem oft herangezogenen Beispiele $(3, 1)$ die Transformationsgrade $n = 24h - 1$. Die halbmetacyklischen $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ enthalten dann weder cyklische G_2 noch G_3; sagen wir also gleich: *Die $(n+1)$-blättrige Fläche über der Ebene ist nur an drei Stellen verzweigt; und zwar finden sich an der ersten Stelle $\frac{n+1}{2}$ Verzweigungspunkte zu je zwei, an der zweiten $\frac{n+1}{4}$ Verzweigungspunkte zu je vier, endlich an der dritten $\frac{n+1}{6}$ Verzweigungspunkte zu je sechs Blättern.*

Für den Fall $n = 23$ habe ich bei $q = 3$, $r = 1$ das Transformationspolygon F_{24} wirklich construirt und in Figur 4 der Tafel aufgezeichnet, und zwar unter gleichzeitiger Angabe der Zusammengehörigkeit der Randcurven. Dass sich die Verzweigung dieses Polygons unter das soeben angegebene allgemeine Resultat subsumirt, wird man leicht überblicken. Zu einer weiteren Bestätigung für die Richtigkeit der Figur habe ich die erzeugenden Substitutionen der Γ_{24} alle berechnet. Es sind in der in der Figur angegebenen Folge die sieben Substitutionen:

$$(4)\qquad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & 0 \\ 0, & \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{2}}, & \frac{5+4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-5+4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{7+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{7-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{3}, & -5-4\sqrt{3} \\ -5+4\sqrt{3}, & -5+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{3}, & 5+4\sqrt{3} \\ 5-4\sqrt{3}, & -5+\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$v_6 = \begin{pmatrix} \frac{2+4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{-7-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{7-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{2-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_7 = \begin{pmatrix} \frac{2+4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{7+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-7+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, & \frac{2-4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Formel (2) lautet im gegenwärtigen Falle

$$-23 = (2-3\sqrt{3})(2+3\sqrt{3}),$$

und nun finden wir für die Mittelcoefficienten der Substitutionen (4):

$$5+4\sqrt{3} = -(2+\sqrt{3})(2-3\sqrt{3}), \quad 7+\sqrt{3} = -(1+\sqrt{3})(2-3\sqrt{3}),$$

womit sich der obige allgemeine Satz über die Definition der Γ_{n+1} bestätigt. Uebrigens geht das Transformationspolygon F_{n+1} durch Spiegelung an der imaginären Axe in sich selbst über, während durch Spiegelung an dem mitten durch dasselbe hindurchziehenden Kreise um $\omega = 0$ aus F_{n+1} das Polygon der durch $\beta \equiv 0$, (mod. n) zu charakterisirenden Γ'_{n+1} entspringt. — Weit einfacher als das hiermit durchgeführte Beispiel ist übrigens $n = 7$, $(q, r) = (11, 1)$, wo sich das Transformationspolygon aus $2 . 8$ Elementarvierecken aufbaut; es ist hier leider nicht Raum, dasselbe ausführlich zu beschreiben. Für $n = 8h + 3$ tritt eine Γ_{2n+2} an Stelle der bisher betrachteten Gruppe; die hierher gehörigen einfachsten Beispiele sind $n = 3$, $q = 7$, $r = 1$; $n = 3$, $q = 19$, $r = 1$; $n = 5$, $q = 11$, $r = 1$ u. s. w.

3.

Die Transformation n^{ter} Ordnung und die zugehörige Hypermodulargleichung.

Es fand sich am Schlusse des Artikels I, 3, dass die Gruppen $\Gamma^{(q,r)}$ für die gesammten, von uns überhaupt zugelassenen Werthe q, r zum Geschlechte Null gehören. Es hat das ohne Weiteres den Fundamentalsatz zur Folge:

Alle zur Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ gehörenden automorphen Functionen sind rational in einer unter ihnen darstellbar, welch' letztere wir $J(\omega)$ nennen und dadurch fixiren, dass sie in drei vorgeschriebenen Ecken des Ausgangsraums die Werthe $J = 0, 1, \infty$ annimmt; beispielsweise sollen diese Werthe bei $q = 3$, $r = 1$ in den drei Ecken a, b, c des Ausgangsraumes stattfinden.

Jetzt verstehe man unter $w(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ eine Substitution, welche ihrer äusseren Gestalt nach mit einer der acht Substitutionsarten der $\Gamma^{(q,r)}$ übereinstimmt, nur dass ihre Determinante $(ad - bc)$ nicht 1 sondern n sein soll, die Zahl n in der bisherigen Bedeutung gebraucht. *Den Uebergang von $J(\omega)$ zu $J'(\omega) = J\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$ bezeichnen wir als Transformation n^{ter} Ordnung von $J(\omega)$,* wie auch im Einzelfall die Substitution w gewählt sein mag.*)

Um zu untersuchen, zu welcher Untergruppe von $\Gamma^{(q,r)}$ die Function $J'(\omega) = J\big(w(\omega)\big)$ gehört, sei v irgend eine Substitution der $\Gamma^{(q,r)}$. Es ist dann $J'\big(v(\omega)\big) = J'(\omega)$ stets und nur erfüllt, wenn $wvw^{-1} = v'$ wieder eine Substitution der Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ ist. Bei der Discussion dieser Bedingung schreibe man $w^{-1} = \begin{pmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{pmatrix}$ und bemerke überdies, dass die vier ganzen rationalen Zahlen in den Zählern der Coefficienten von w modulo 2 eben jenen Bedingungen genügen, die wir in I, 1 für die Substitutionen der $\Gamma^{(q,r)}$ namhaft zu machen hatten. Es folgt, dass auch v' eine der oft genannten acht Substitutionsgestalten zeigt, wogegen freilich v' die Determinante n^2 besitzt. Soll hiernach v' der $\Gamma^{(q,r)}$ angehören, so ist dafür hinreichend und nothwendig, dass die Zähler in den Coefficienten von v' durch n theilbar sind. Nennt man die Coefficienten von v kurz $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so kleidet sich diese Bedingung in die vier Congruenzen ein:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} ad\alpha - ac\beta + bd\gamma - bc\delta &\equiv 0, \\ ab\alpha - a^2\beta + b^2\gamma - ab\delta &\equiv 0, \\ cd\alpha - c^2\beta + d^2\gamma - cd\delta &\equiv 0, \\ bc\alpha - ac\beta + bd\gamma - ad\delta &\equiv 0, \end{aligned}\right\} \pmod{n},$$

*) Vergl. auch Poincaré l. c.

von denen übrigens keine entbehrlich ist. Dies sind gerade die nämlichen Congruenzen, welche an analoger Stelle in der Theorie der elliptischen Functionen bei Transformation n^{ter} Ordnung der absoluten Invariante $J(\omega)$ auftraten. Die Congruenzen (1) definirten damals eine der $(n+1)$ gleichberechtigten Γ_{n+1} der Modulgruppe. Da nun die Operationen unserer jetzigen $\Gamma_{(n)}^{(q,r)}$ offenbar *alle* den Bedingungen (1) genügen, so werden bei dem oben begründeten holoedrischen Isomorphismus der jetzigen $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ auf die $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ der Modulfunctionen die Congruenzen (1) innerhalb $\Gamma^{(q,r)}$ eine mit der Γ_{n+1} der vorigen Nummer gleichberechtigte Congruenzgruppe n^{ter} Stufe des Index $(n+1)$ definiren.

Zufolge dieses Resultats giebt es eine mit $J'(\omega)$ gleichberechtigte Function, die zur Γ_{n+1} des vorigen Artikels gehört. Indem wir offenbar diese letzte Function gleich selbst wieder $J\big(w(\omega)\big)$ nennen dürfen, wollen wir die hier insbesondere eintretenden Transformationen näher betrachten. Soll aber die einzige Bedingung $\gamma \equiv 0$ zur Befriedigung der vier Congruenzen (1) schon ausreichen, so muss bei dem willkürlich bleibenden β offenbar $a \equiv c \equiv 0$, (mod. n) sein, womit denn auch alle Congruenzen (1) erfüllt sind. Es sind also die in den Zählern von a und c auftretenden ganzen complexen Zahlen Multipla der Zahl $(e_1 - e_2\sqrt{q})$, so dass sich weiter in b, sowie d der Factor $(e_1 + e_2\sqrt{q})$ findet. Schreiben wir hiernach

$$\omega = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1 - e_2\sqrt{q}), & 0 \\ 0, & \left(\frac{-1}{n}\right)(e_1 + e_2\sqrt{q}) \end{pmatrix},$$

so hat offenbar $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ eine der acht oft genannten Gestalten und ist zudem von der Determinante 1; diese Substitution gehört also der $\Gamma^{(q,r)}$ an. Die gesuchte mit J' gleichberechtigte Function ist demnach

$$(2) \qquad J\left(\left(\frac{-1}{n}\right) \cdot \frac{e_1 - e_2\sqrt{q}}{e_1 + e_2\sqrt{q}} \cdot \omega\right).$$

Das hiermit gewonnene merkwürdige Resultat kleiden wir in den Satz: *Durch Transformation n^{ter} Ordnung von $J(\omega)$ entspringen insgesammt nur $(n+1)$ unterschiedene Grössen $J'(\omega)$, die alle mit (2) gleichberechtigt sind. Diese Grössen sind die Wurzeln einer irreducibeln algebraischen Relation:*

$$(3) \qquad f(J', J) = 0,$$

in welcher J' und J bis auf den Grad $(n+1)$ ansteigen, und die ich mit Hrn. Bianchi als die zur n^{ten} Ordnung gehörende Hypermodulargleichung bezeichne. Unter Gebrauch des gleich zu nennenden Haupt-

repräsentanten erkennt man gerade wie in der Theorie der elliptischen Functionen, dass die linke Seite der Hypermodulargleichung, als ganze Function ihrer beiden Argumente J', J geschrieben, in ihnen *symmetrisch* ausfällt. Die Gleichung (3) stimmt demnach mit der Modulargleichung in Grad, Vertauschbarkeit der Argumente und Monodromiegruppe überein; sie sind aber von einander verschieden in Geschlecht und Verzweigung. Im Anschluss an die hiermit befürwortete Terminologie werde ich übrigens die automorphe Function $J(\omega)$ gelegentlich als einen *Hypermodul* bezeichnen.

Nichts hindert, dass wir die Transformationstheorie der zur $\Gamma^{(q,r)}$ gehörenden automorphen Functionen in derselben Weise ausbauen, wie die Transformation der Modulfunctionen. Die gesammten Transformationen n^{ter} Ordnung wird man nach wohlbekanntem Princip in $(n+1)$ Classen theilen und jegliche Classe durch eine zweckmässig ausgewählte Transformation repräsentiren. Für die Γ_{n+1} des vorigen Artikels wählen wir etwas verschieden von Formel (2):

$$R_0(\omega) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{e_1 + e_2\sqrt{q}}{(e_1 - e_2\sqrt{q})\,\omega} \tag{4}$$

und benennen R_0 als *Hauptrepräsentant*. Für die übrigen Repräsentanten haben wir dann $R_i = R_0 v_i$, wo v_i ein Repräsentantensystem der Γ_{n+1} durchläuft; weiter sind alle Transformationen der $(i+1)^{\text{ten}}$ Classe $v R_i$, wo v die $\Gamma^{(q,r)}$ zu beschreiben hat.

Die Auswahl des Hauptrepräsentanten (4) ist deshalb besonders günstig, weil $\omega' = R_0(\omega)$ eine Substitution der Periode *zwei* darstellt, und weil andrerseits durch R_0 die Gruppe Γ_{n+1} direct in sich transformirt wird. Dies hat auch geometrisch einige wichtige Folgen: Man übe auf die ω-Halbebene die Substitution $\omega' = R_0(\omega)$ aus und bringe die so entstehende neue Gestalt der Halbebene mit der ursprünglichen zur Coincidenz. Da die Kreisbogentheilung durch $\omega' = R_0(\omega)$ nicht in sich übergeht, so wird die Halbebene nunmehr von einer doppelten Theilung überlagert sein, die wir offenbar als ω-Theilung und ω'-Theilung unterscheiden können. Die letztere wird durch die Substitutionen der Gruppe $\Gamma' = R_0 \Gamma R_0^{-1}$ in sich übergeführt, und nun wolle man beachten, dass Γ_{n+1} die gemeinsame Untergruppe von Γ und Γ' vorstellt. Schneidet man also aus der ω-Theilung ein Transformationspolygon F_{n+1} aus, so wird dasselbe gerade auch aus $(n+1)$ ω'-Bereichen zusammengesetzt sein (die freilich am Rande zerstückt erscheinen) und wird solcherweise zugleich für Γ' ein Transformationspolygon F'_{n+1} vorstellen.

Legen wir das Polygon zur geschlossenen Fläche zusammen, so wird uns dieselbe vermöge ihrer zweifachen Eintheilung in je $(n+1)$ Bereiche das anschauliche Bild für die Correspondenz ihrer beiden

algebraischen Functionen J', J liefern, die durch die Hypermodulargleichung an einander gebunden sind. Für die geschlossene Fläche F_{n+1} aber bedeutet R_0 eine Transformation (erster Art) von der Periode *zwei* in sich. Diese Transformation der Fläche in sich permutirt die beiden Eintheilungen mit einander und stellt sich analytisch einfach durch Vertauschung von J und J' dar. — In welch' inniger Beziehung die doppelt-getheilte Fläche oder auch gleich das doppelt getheilte Polygon der Halbebene zur Theorie der binären quadratischen Formen des vorigen Abschnitts steht, haben wir nun zu erörtern.

IV.

Smith'sche Curven und singuläre Hypermoduln.

1.

Die zur n^{ten} Ordnung gehörende Smith'sche Curve und ihre Beziehung zu den Formen positiver Determinante.

Bevor wir die Anwendung der Transformationstheorie auf die in Abschnitt II betrachteten Formen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ auseinandersetzen, ist es zweckmässig, eine kleine Ergänzung betreffs der Schreibweise dieser Formen hier vorauszuschicken. Man erinnere sich der vier Fälle, welche wir in II, 3 zu unterscheiden hatten; in den drei letzten Fällen wies $(\varkappa, \lambda, \mu)$ die Factoren $\sqrt{q}$ bez. $\sqrt{r}$, $\sqrt{qr}$ auf. Wir wollen uns entschliessen, diese Factoren fortzuheben; und das kommt darauf hinaus, dass wir in den vier Fällen die nachfolgende, sofort verständliche Bezeichnungsweise gebrauchen:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} \varkappa = \varkappa_0,\ \lambda = \lambda_0,\ \mu = \mu_0;\quad D_0 = \varkappa_0^2 - q\lambda_0^2 + r\mu_0^2, \\ (\varkappa_0, \lambda_0, \mu_0) = (\varkappa_0 + \lambda_0\sqrt{q})\omega^2 + 2\mu_0\sqrt{r}\,\omega - (\varkappa_0 - \lambda_0\sqrt{q}); \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \varkappa = q\varkappa_1,\ \lambda = \lambda_1,\ \mu = q\mu_1;\quad D_1 = q\varkappa_1^2 - \lambda_1^2 + qr\mu_1^2, \\ (\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1) = (\lambda_1 + \varkappa_1\sqrt{q})\omega^2 + 2\mu_1\sqrt{qr}\,\omega + (\lambda_1 - \varkappa_1\sqrt{q}) \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \varkappa = r\varkappa_2,\ \lambda = r\lambda_2,\ \mu = \mu_2;\quad D_2 = r\varkappa_2^2 - qr\lambda_2^2 + \mu_2^2, \\ (\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2) = (\varkappa_2 + \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r}\,\omega^2 + 2\mu_2\,\omega - (\varkappa_2 - \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r}; \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \varkappa = qr\varkappa_3,\ \lambda = r\lambda_3,\ \mu = q\mu_3;\quad D_3 = qr\varkappa_3^2 - r\lambda_3^2 + q\mu_3^2, \\ (\varkappa_3, \lambda_3, \mu_3) = (\lambda_3 + \varkappa_3\sqrt{q})\sqrt{r}\,\omega^2 + 2\mu_3\sqrt{q}\,\omega + (\lambda_3 - \varkappa_3\sqrt{q})\sqrt{r}. \end{cases}$$

Die Entwicklungen des Abschnitts II über Transformation der Formen in sich oder in gleichartige Formen sind offenbar von Factoren, die wir den Formen anhängen oder nehmen, ganz unabhängig. Insbesondere folgt, dass die ternären Substitutionen von $(\varkappa_0, \lambda_0, \mu_0)$, auf eines der drei anderen Variabelensysteme $(\varkappa_i, \lambda_i, \mu_i)$ umgerechnet,

wiederum ganzzahlig ausfallen müssen. In ihrer ersten Gestalt werden also die ternären Substitutionen die Bedingungen

$$a_{12} \equiv a_{32} \equiv 0, \text{ (mod. } q), \quad a_{13} \equiv a_{23} \equiv 0, \text{ (mod. } r)$$

befriedigen müssen, was auch ein Blick auf (5) in II, 1 sofort bestätigt. Infolge unserer Massnahme haben wir bei der einzelnen Determinante D jetzt immer vier Formarten zu unterscheiden, und es ist sofort evident, dass eine einzelne Form immer nur wieder mit einer gleichartigen Form äquivalent sein kann; natürlich brauchen keineswegs beim einzelnen D alle vier Arten aufzutreten.

Die Eckpunkte des Ausgangsraums, in welchen wir für die automorphe Function $J(\omega)$ die Werthe $0, 1, \infty$ vorschrieben, sollen jedenfalls durchgehends Schnittpunkte von Symmetriekreisen der $\Gamma^{(q,r)}$ sein. Es wird alsdann $J(\omega)$ auf der imaginären Axe, wie überhaupt auf allen Symmetriekreisen allenthalben reell sein, und also müssen die numerischen Coefficienten der Hypermodulargleichung durchgängig reell sein. In dieser Gleichung führe man jetzt die Transformation aus:

$$(1) \qquad J = X + iY, \quad J' = X - iY,$$

wodurch die Hypermodulargleichung übergeht in:

$$(2) \qquad f(X - iY, X + iY) = F(X, Y) = 0.$$

Da f seine beiden Argumente vertauschungsfähig enthielt, so weist $F(X, Y)$ nur gerade Potenzen von Y auf und hat demnach gleichfalls ausschliesslich reelle Coefficienten. Deutet man J', J als Cartesische Coordinaten, so benenne man die durch $f(J', J) = 0$ dargestellte Curve als Hypermodularcurve; andererseits benennen wir die in den Coordinaten X, Y durch $F(X, Y) = 0$ dargestellte Curve als *Smith'sche Curve**). Diese beiden beim n^{ten} Transformationsgrad auftretenden Curven sind durch (1) collinear auf einander bezogen; die zur n^{ten} Ordnung gehörende Smith'sche Curve ist sonach irreducibel und *besitzt also insbesondere keine doppelt zählende Curvenzüge.*

Es sind nun vor allen Dingen die *reellen* Punkte der Smith'schen Curve, denen unsere Untersuchung gilt. Wir denken uns diese Punkte in der XY-Ebene, d. i. in der Ebene der Variabelen J wirklich markirt, wo sie dann gewisse reelle Curvenzüge oder auch isolirte Punkte vorstellen mögen. Man sieht aber sofort: *Die so gezeichneten Punkte der J-Ebene sind gerade alle diejenigen, für welche wenigstens eine der zugehörigen Wurzeln J' der Hypermodulargleichung einen zu J conjugirt complexen Werth aufweist.* An diesen Umstand knüpft die

---

*) Die hier im Texte zu gebende Ideenentwicklung ist im Bereich der Modulfunctionen und also der ganzzahligen quadratischen Formen von Stephen Smith angegeben worden, was die im Texte gebrauchte Bezeichnung rechtfertigen mag; man vergl. übrigens die bezüglichen im Bande II der „Modulfunctionen" zu gebenden Citate.

nachfolgende arithmetische Betrachtung, zu deren Einleitung wir die J-Ebene vermöge $\omega(J)$ auf den Ausgangsraum der $\Gamma^{(q,r)}$ conform abbilden. Dabei geht der reelle Theil der Smith'schen Curve in gewisse Linienstücke (oder auch Punkte) des Ausgangsraumes über, und die Bedeutung der letzteren wollen wir jetzt allererst erklären.

Greifen wir die einzelne Wurzel $J\big(w(\omega)\big)$ der Hypermodulargleichung auf, so hat dieselbe im Punkte ω des Ausgangsraumes stets und nur dann einen mit $J(\omega)$ conjugirt complexen Werth, falls sich eine der Bedingung $v\,w(\omega) = -\bar{\omega}$ genügende Substitution v in der Gruppe $\Gamma^{(q,r)}$ auffinden lässt. Fassen wir vw zur Transformation n^{ter} Ordnung $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ zusammen, so schreibt sich die ausgesprochene Bedingung explicite:

$$C\omega\bar{\omega} + D\bar{\omega} + A\omega + B = 0.$$

Da A, B, C, D reelle Zahlen sind, so kann diese Gleichung für einen Punkt ω des Ausgangsraumes nur dann bestehen, wenn $A = D$ ist; sie ist dann aber sogleich für alle Punkte des Kreisbogens:

$$C(x^2 + y^2) + 2Ax + B = 0 \tag{3}$$

erfüllt. Man nehme nun an, vw habe die Gestalt S; dann ist unter den vier ganzen rationalen Zahlen a, b, c, d dieser Substitution die zweite Null, und also sind die drei übrigen gerade. Setzen wir also:

$$c = -2\varkappa_2, \quad d = 2\lambda_2, \quad a = 2\mu_2,$$

so geht die Gleichung (3) in die folgende über:

$$(\varkappa_2 + \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r}\,(x^2 + y^2) + 2\mu_2 x - (\varkappa_2 - \lambda_2\sqrt{q})\sqrt{r} = 0. \tag{4}$$

Ersichtlich haben wir hier den repräsentirenden Halbkreis einer Form $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ gewonnen; dieselbe hat die positive Determinante n und ist reducirt, insofern ja der Halbkreis (4) den Ausgangsraum durchsetzen soll. Hat des weiteren vw die Gestalt einer Substitution T, S', T', so kommen wir zu einem völlig gleichlautenden Resultate, nur dass jetzt die reducirte Form der Determinante n bez. der vierten, ersten oder zweiten Art (p. 95) angehört. Zieht man jetzt auch die Gestalten U', V', U, V heran, so entspringen wieder reducirte Formen der vier Arten, nun jedoch der positiven Determinante $2n$.

Das erhaltene Resultat ist sofort der Umkehrung fähig. Jede reducirte Form der Determinante n oder $2n$ liefert eine Transformation n^{ten} Grades w, welche der Gleichung $w(\omega) = -\bar{\omega}$ genügende Punkte ω des Ausgangsraumes ergiebt. So z. B. gewinnen wir von einer Form $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ der Determinante $2n$ aus die Transformation n^{ter} Ordnung:

$$w(\omega) = \frac{\dfrac{\mu_2}{\sqrt{2}}\,\omega + \dfrac{-\varkappa_2\sqrt{r} + \lambda_2\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\varkappa_2\sqrt{r} + \lambda_2\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}\,\omega + \dfrac{\mu_2}{\sqrt{2}}}, \tag{5}$$

welche die Gestalt einer Substitution U besitzt. *Die Gesammtheit aller reellen Punkte der zur* n^{ten} *Ordnung gehörenden Smith'schen Curve stellt also, auf den Ausgangsraum übertragen, dortselbst das System aller zu den reducirten Formen der Determinanten* n *und* $2n$ *gehörenden Kreissegmente vor.* Indem wir uns aber an die Zusammenordnung dieser Kreissegmente zu den geschlossenen Ketten erinnern, entspringt bei Rückgang vom Ausgangsraume zur complexen J-Ebene (unter Vorbehalt einer gleich folgenden Ergänzung) der nachfolgende Hauptsatz: *Die Smith'sche Curve* $F = 0$ *weist soviele geschlossene, allenthalben stetig gekrümmte reelle Züge auf, als es Formclassen der positiven Determinanten* n *und* $2n$ *giebt.* Zerschneidet man die reelle J-Axe längs derjenigen Stücke, welche beim Fortgang zum Ausgangsraum offene Randcurven desselben werden, *so wird dadurch jeder reelle Zug in soviele Stücke geschnitten, als die zugehörige Formenperiode reducirte Formen enthält.*

Die Ergänzung, welche noch nöthig ist, betrifft die sich selbst inversen Classen. Da die Smith'sche Curve keine doppelt zählenden Curvenzüge aufweist, so kommt in dem soeben ausgesprochenen Hauptsatze unter zwei inversen Formen immer nur eine zur Geltung. Ist nun eine Classe sich selbst invers, so war die zugehörige Kette der Kreisbogen nur erst dadurch zu einer geschlossenen geworden, dass jedes einzelne Segment zweimal (in entgegengesetzter Richtung) durchlaufen wurde. Der betreffende Zug von $F = 0$, für sich betrachtet, wird also nicht geschlossen sein; Anfangs- und Endpunkt werden vielmehr in zwei singulären*) Stellen J liegen, und wenn sie ja coincidiren sollten, so würde doch der betrachtete Curvenzug dortselbst eine stetige Krümmung im allgemeinen nicht aufweisen. Inzwischen bemerkt man doch aus dem Bisherigen leicht, dass sich der in Rede stehende Curvenzug über jeden singulären Punkt hinaus unter *stetiger* Krümmung weiter fortsetzt. Indem wir also noch betonen, dass die hier zur Geltung kommenden singulären Punkte J diejenigen sind, deren zugehörige elliptische Substitutionen eine *gerade* Periode aufweisen, haben wir das ergänzende Resultat auszusprechen: *Sollte ein reeller Zug der Smith'schen Curve durch singuläre Punkte fraglicher Art gehen, so entspricht jedem zwischen zwei aufeinanderfolgenden solchen Punkten liegenden Theile dieses Curvenzuges eine sich selbst inverse Classe.*

Durch Rückgang zur ω-Halbebene entspringt der nachfolgende Satz: Zieht der repräsentirende Halbkreis einer Form der Determinante n oder $2n$ durch den Fixpunkt einer elliptischen Substitution der Periode 2ν, und man construirt denjenigen zur reellen Axe orthogonalen

*) Es seien damit für den Augenblick kurz diejenigen Punkte J bezeichnet, welche Fixpunkten elliptischer Substitutionen der ω-Halbebene entsprechen.

Halbkreis, welcher jenen ersten im fraglichen Fixpunkt unter dem Winkel $\frac{\pi}{2\nu}$ schneidet, so repräsentirt auch dieser neue Halbkreis eine Form der Determinante n oder $2n$, die übrigens im allgemeinen mit jener ersten Form nicht äquivalent ist.

2.

Uebertragung der Smith'schen Curve auf das Transformationspolygon.

Eine viel allgemeinere Auffassung der Entwicklungen des vorigen Paragraphen gewinnen wir durch Benutzung des Transformationspolygons n^{ter} Ordnung F_{n+1}. Den Uebergang zu demselben findet man in folgender Art: Wenn wir vorhin die $(n+1)$ Wurzeln der Hypermodulargleichung mit dem ursprünglichen J im Ausgangsbereich verglichen, so erreichen wir dasselbe, falls wir die eine zum Hauptrepräsentanten gehörende Wurzel $J'(\omega) = J\big(R_0(\omega)\big)$ in allen $(n+1)$ Bereichen des Transformationspolygons vergleichen. Jedes beim ersten Vergleich gefundene Kreissegment des Ausgangsbereichs wird sich dann in einem und nur einem bestimmten jener $(n+1)$ Bereiche von F_{n+1} wiederfinden; was also vorher in einem einzelnen Bereich über einander geschichtet war, finden wir jetzt in $(n+1)$ Bereichen auseinandergelegt.

Wenn wir F_{n+1} zur geschlossenen Fläche umgestalten, werden sich die Punkte conjugirt complexer J, J' zu einer reellen Curve zusammenlegen, welche auf die reelle Smith'sche Curve der J-Ebene wechselweise eindeutig bezogen ist. Indem wir sie als „die auf der Fläche F_{n+1} gelegene Smith'sche Curve“ bezeichnen, besitzen wir in der doppelten Eintheilung der Fläche F_{n+1} ein anschauliches Hilfsmittel, den Verlauf der Curve unmittelbar zu erblicken. Die ω-Bereiche sind zur Hälfte schraffirt zur Hälfte frei, und es wird immer die schraffirte Hälfte die eine, etwa positive J-Halbebene abbilden, die freie Hälfte aber die negative*). Indem ein Gleiches für die ω'-Theilung stattfindet, wird die doppelt getheilte F_{n+1} sehr viel kleinere Bereiche aufweisen, die theils frei, theils einfach, theils doppelt schraffirt sind. Die Smith'sche Curve wird immer nur durch einfach schraffirte Bereiche hindurchziehen können; wo sie eine Grenzlinie**) der einen Theilung schneidet, muss sie immer zugleich auch eine der andern Theilung kreuzen. Wofern also beide fraglichen Linien nicht coincidiren (was vereinzelt auftritt, nämlich für die reellen Züge der Hypermodularcurve), wird die Smith'sche Curve durch die Kreuzungspunkte der beiderlei

*) Man überzeugt sich leicht, dass diese Verhältnisse auch bei denjenigen $\Gamma^{(q,r)}$ zutreffen, die nicht mehr allein aus Spiegelungen erzeugbar sind.

**) Diese Linien sind im allgemeinen keine Symmetrielinien der Theilung.

Grenzlinien hindurchgehen; sie setzt sich also, allgemein zu reden, aus einer Reihe von Diagonalen solcher einfach schraffirten Bereiche zusammen, welche durch die Doppeltheilung der Oberfläche entspringen.

Eine besonders elegante Deutung für die auf der geschlossenen Fläche F_{n+1} gelegene Smith'sche Curve gewinnen wir dadurch, dass wir die Transformationen der F_{n+1} in sich analytisch durch das zugehörige Functionssystem J, J' darstellen. Wir bemerkten schon wiederholt, dass F_{n+1} neben der Identität noch drei Transformationen in sich zulässt, von denen zwei von den ω-Substitutionen R_0 und A herrühren $\left(\text{letztere in der gewohnten Bedeutung } A(\omega) = -\bar{\omega} \text{ gebraucht}\right)$. Vor allem wichtig ist nun für uns die dritte Transformation $R_0 A$, und indem wir die transformirten J, J' durch untere Indices auszeichnen, haben wir für dieselbe die Darstellung

$$(1) \qquad (R_0 A) \qquad J_1 = \bar{J}', \quad J_1' = \bar{J}.$$

$R_0 A$ stellt nun eine symmetrische Umformung der F_{n+1} in sich dar und weist als solche eine Reihe von Symmetrielinien auf der Fläche auf, die wir aus (1) einfach dadurch ableiten, dass wir das transformirte Functionssystem J_1, J_1' mit dem ursprünglichen J, J' identisch setzen*). Hier ist nun bei der Gestalt von (1) ohne weiteres evident: *Die auf F_{n+1} übertragene Smith'sche Curve stellt das System der Symmetrielinien dar, welche F_{n+1} bei ihrer symmetrischen Umformung $R_0 A$ aufweist; die Zahl dieser Symmetrielinien giebt uns also die Classenzahl der Formen der positiven Determinanten n und $2n$.* — Die Uebertragung aller dieser Sätze auf das ursprüngliche Polygon F_{n+1}, wo wir die Smith'sche Curve als eine Reihe dasselbe durchsetzender Kreisbogen wiederfinden, bietet sich von selbst dar. Insbesondere wolle man bemerken, dass die im Polygon F_{n+1} gezeichnete Smith'sche Curve nur dann durch einen Eckpunkt der ω-Theilung hindurchziehen kann, wenn eben dortselbst auch ein gleichartiger Eckpunkt der ω'-Theilung gelegen ist. Eine solche Stelle wird leicht ersichtlich auf der geschlossenen F_{n+1} nur von je *zwei* Elementarbereichen der einzelnen Theilung umlagert sein, und also folgt der Satz: *Soll es bei den Determinanten n oder $2n$ sich selbst inverse Classen geben, so müssen*

*) Zur Sicherstellung dieses Schlussverfahrens mag man sich übrigens die Verhältnisse veranschaulichen, die bei einer Transformation erster Art der F_{n+1} in sich eintreten. Die Fixpunkte einer solchen werden wir sicher alle erhalten, indem wir das transformirte Functionssystem mit den ursprünglichen identisch setzen. Aber dabei können wir auch noch solche fremde Punkte erhalten, deren zugehörige Werthsysteme J, J' zu jenen particulären gehören, welche mehr als einmal auf der Fläche vorkommen. Weil indessen solche Punkte eben nur vereinzelt vorkommen, so werden wir die besondere Rücksichtnahme auf sie im Texte ausser Acht lassen können, wo es sich doch immer um ganze festbleibende Linienzüge handelt.

auf dem Rande des Polygons F_{n+1} Fixpunkte elliptischer Substitutionen gerader Periode zu finden sein, die der Γ_{n+1} angehören; so z. B. werden bei $(q, r) = (3, 1)$ und $n = 24h - 1$ sich selbst inverse Classen überhaupt nicht auftreten.

Statt übrigens der analytischen Formulirung der geschilderten geometrischen Verhältnisse die $(n+1)$-werthige Function J der Fläche F_{n+1} zu Grunde zu legen, können wir zu diesem Zweck auch eine geringer werthige Function z verwenden. Nur werden wir dieselbe so wählen, dass sie auf der imaginären ω-Axe durchgehends reelle Werthe aufweist und jedenfalls nicht durch die Substitution R_0 in sich transformirt wird. Es hat dies einerseits den Vortheil, dass wir z und $z'(\omega) = z\left(R_0(\omega)\right)$ zu einem vollen Functionssystem der Fläche F_{n+1} wählen können, welche beiden Grössen alsdann durch eine algebraische Relation:

$$(2) \qquad g(z', z) = 0$$

mit ausschliesslich reellen Coefficienten an einander gebunden sind; auf der anderen Seite stellt sich die Umformung $R_0 A$ wieder in der Gestalt: $z_1 = \bar{z}'$, $z_1' = \bar{z}$ dar, *so dass unter der Substitution $z = \xi + i\eta$ die auf die $\xi\eta$-Ebene übertragene Smith'sche Curve direct durch die Gleichung:*

$$(3) \qquad g(\xi - i\eta,\ \xi + i\eta) = G(\xi, \eta) = 0$$

gegeben ist. Ist z. B. $p = 0$, so wähle man z als Hauptfunction; alsdann wird (3) einen Kreis darstellen, und es giebt demnach in diesem Falle im Bereich der Determinanten n, $2n$ entweder nur *eine* Formclasse oder mehrere, die dann jedoch alle sich selbst invers sind und im Sinne des vorigen Artikels zu *einem* System gehören. Die eindeutige Beziehung zwischen den beiden Curven $G(\xi, \eta) = 0$, $F(X, Y) = 0$ entwickelt man übrigens analytisch sehr leicht aus den Formeln

$$(4) \qquad z = R'(J', J),\ z' = R'(J, J');\quad J = R(z', z),\ J' = R(z, z').$$

3.

Die singulären Hypermoduln und ihre Beziehung zu den quadratischen Formen negativer Determinante.

Letzten Endes bleibt noch übrig, die Anwendung der Hypermodulargleichung auf die quadratischen Formen negativer Determinante zu skizziren, wobei gleichfalls wieder volle Analogie zu den betreffenden Entwicklungen in der Theorie der elliptischen Functionen vorliegt. Indem wir in der Hypermodulargleichung $J' = J$ setzen, entspringt eine algebraische Gleichung $f(J, J) = 0$ mit ausschliesslich numerischen Coefficienten, deren Wurzeln wir als *die zur Ordnung n gehörenden singulären Hypermoduln* bezeichnen. Die reellen Wurzeln von $f(J, J) = 0$

könnte man auch als die Werthe X in den Schnittpunkten der reellen Züge der Smith'schen Curve $F(X, Y) = 0$ mit der X-Axe definiren. Die Beziehung der singulären Hypermoduln zu den quadratischen Formen wird durch folgende arithmetische Ueberlegung klargelegt.

Soll der zum Punkte ω des Ausgangsraums gehörende Werth J singulärer Hypermodul n^{ter} Ordnung sein, so ist dazu hinreichend und nothwendig, dass es eine Transformation n^{ter} Ordnung $w = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ giebt, für welche die Gleichung

$$(1) \qquad C\omega^2 + (D - A)\omega - B = 0$$

erfüllt ist. Hier stellt offenbar die linke Seite von (1) eine reducirte quadratische Form negativer Determinante vor; und wir müssen, um des genaueren Art und Determinante von (1) zu gewinnen, für w wieder die oft genannte achtfache Fallunterscheidung durchführen.

Hat w eine der Gestalten S, T, S', T', so nehme man überdies in die linke Seite von (1) den Factor 2 auf und findet alsdann bez. eine Form der 4^{ten}, 3^{ten}, 2^{ten}, ersten Art (cf. p. 95); für die zugehörigen Determinanten $D = -\Delta$ findet man bez. die Zahlwerthe:

$$(2) \quad \Delta_4 = 4n - a^2, \ \Delta_3 = 4n - qb^2, \ \Delta_2 = 4n - rc^2, \ \Delta_1 = 4n - qrd^2,$$

wo a die im Zähler von A stehende ganze Zahl ist, falls w die Gestalt S hat u. s. w. Hat zweitens w eine der Gestalten U, V, U', V', so nehme man den Factor $\sqrt{2}$ in die linke Seite von (1) auf und erhält alsdann wieder eine Form der 4^{ten} bez. 3^{ten}, 2^{ten}, ersten Art, jetzt jedoch der Determinante:

$$(3) \quad \Delta_4 = 2n - a^2, \ \Delta_3 = 2n - qb^2, \ \Delta_2 = 2n - rc^2, \ \Delta_1 = 2n - qrd^2.$$

Die Entwicklung ist nun wieder sofort der Umkehrung fähig. Liegt z. B. für irgend eine ganze Zahl c, für welche $\Delta_2 = 2n - rc^2 > 0$ wird, eine reducirte Form $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ zweiter Art der Determinante $-\Delta_2$ vor, so gewinnen wir von ihr aus in

$$(4) \qquad w = \begin{pmatrix} \dfrac{c\sqrt{r} + \mu_1\sqrt{qr}}{\sqrt{2}}, & \dfrac{\lambda_1 - \varkappa_1\sqrt{q}}{\sqrt{2}} \\[2ex] -\dfrac{\lambda_1 + \varkappa_1\sqrt{q}}{\sqrt{2}}, & \dfrac{c\sqrt{r} - \mu_1\sqrt{qr}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine Transformation n^{ter} Ordnung der Gestalt U'. In derselben Weise gestaltet sich die Umkehrung auch in den übrigen Fällen. Die genauere Untersuchung der in Rede stehenden Verhältnisse erledigt sich in derselben Weise, wie in der Theorie der elliptischen Functionen. Wir finden, dass jeder reducirten Form und also jeder Formclasse einer Determinante $-\Delta_i = -2n$ oder $-4n$ immer ein einfacher Nullpunkt von $f(J, J)$ wechselweise eindeutig zugeordnet ist, jeder Formclasse einer grösseren Determinante (2), (3) jedoch ein Paar coincidirender

Nullpunkte; haben wir z. B. eine Classe vierter Art der Determinante $-\Delta_4 = -(2n - a^2)$, so entspricht der eine Nullpunkt dem positiven Zeichen von a, der andere dem negativen u. s. w. Hierbei ist jedoch noch hinzuzusetzen, dass die Formclassen, deren repräsentirende Punkte im Fixpunkte einer elliptischen Substitution der Periode ν coincidiren, nur erst zu ν *ein* Paar coincidirender Nullpunkte von $f(J, J')$ ergeben.

Die Anzahl einfacher Nullpunkte von $f(J, J')$ im Ausgangsraum, d. i. der Grad der Gleichung $f(J, J') = 0$ ist hiernach sofort durch eine Summe von Classenanzahlen ausdrückbar. Bezeichnen wir durch $\mathsf{H}_i(\Delta)$ die Classenanzahl quadratischer Formen i^{ter} Art der Determinante $-\Delta$, wobei jedoch die Classen, deren repräsentirende Punkte Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode ν sind, nur mit $\frac{1}{\nu}$ in Anrechnung kommen sollen, so berechnet sich der Grad m der Gleichung $f(J, J') = 0$ offenbar zu:

$$(5) \qquad m = \sum_{d=0,\pm 1,\cdots} \mathsf{H}_1(2n - qrd^2) + \cdots + \sum_{a=0,\pm 1,\cdots} \mathsf{H}_4(2n - a^2)$$
$$+ \sum_{d=0,\pm 1,\cdots} \mathsf{H}_1(4n - qrd^2) + \cdots + \sum_{a=0,\pm 1,\cdots} \mathsf{H}_4(4n - a^2).$$

In der einzelnen dieser acht Classenzahlsummen soll der Summationsbuchstabe d, c, ... jedesmal alle ganzzahligen Werthe durchlaufen, für welche das Argument des betreffenden H_i positiv ausfällt.

Andrerseits können wir m auch als Anzahl einfacher Unstetigkeitspunkte von $f(J, J')$ im Ausgangsraum definiren, wobei dann durch Abzählung dieser Zahl und Identischsetzen derselben mit (5) eine *Classenzahlrelation* entspringen würde. Die Bestimmung von m auf diesem neuen Wege würde bei primzahligen n nicht schwer sein; im Falle $n = 12h - 1$ ist sie sogar besonders einfach. In diesem Falle werden sich auf der geschlossenen Fläche F_{n+1} die Bereiche um die Eckpunkte der Eintheilung gerade so gruppiren, wie in der ursprünglichen Eintheilung der ω-Halbebene, weil in Γ_{n+1} für diesen Fall elliptische Substitutionen nicht enthalten sein können. In den Ecken einer gewissen Art von F_{n+1} liegen die Unstetigkeitspunkte der Function J. Sollte in einem dieser Punkte auch $J' = \infty$ werden, so würde in der Umgebung dieser Stelle J, J' ein *mehr*werthiges Functionssystem darstellen, was unmöglich ist. Der höchste Term der Hypermodulargleichung ist also $J'^{n+1} . J^{n+1}$, so dass wir auf diesem functionentheoretischen Wege für m den Werth $(2n+2)$ gewinnen.

Es ist kaum fraglich, dass man auf Grundlage der bisherigen Entwicklungen der Theorie der singulären Hypermoduln eine analoge Ausbildung verleihen kann, wie sie diejenige der singulären Moduln der elliptischen Functionen erfahren hat. Diejenige Gleichung, deren

Wurzeln die „eigentlich" zur Determinante $-\Delta$ gehörenden singulären Hypermoduln sind*), dürfte in algebraischer wie arithmetischer Rücksicht eine ähnliche Rolle spielen, wie die entsprechende Gleichung der elliptischen Functionen. Wenn übrigens die Hypermodulargleichung gegenüber der Modulargleichung nicht wesentlich neu war, insofern sie mit jener Grad und Monodromiegruppe gemein hat, so gestaltet sich dies ganz anders, wenn wir die Substitution $J' = J$ ausführen und die beiderseits entspringenden Gleichungen mit rein numerischen Coefficienten betrachten. In der That scheint's, dass die Gleichungen der singulären Hypermoduln gegenüber denjenigen der singulären Moduln, wenn auch von analogem Charakter, so doch wesentlich neu sind.

Endlich mögen wir noch überlegen, welche Ausgestaltung die bisherige Entwicklung durch consequente Heranziehung des Transformationspolygons F_{n+1} erfährt. Zur Einführung von F_{n+1} benutzen wir wieder denselben Gedankengang wie oben bei den positiven Determinanten: Statt alle $(n+1)$ Wurzeln J' im Ausgangsraum in Bezug auf ihr Identischwerden mit J zu untersuchen, betrachten wir nur die dem Hauptrepräsentanten entsprechende Wurzel J', diese jedoch in allen $(n+1)$ Bereichen von F_{n+1}. Die Nullpunkte von $f(J, J)$, welche wir vordem alle im Ausgangsraum aufsuchten, sind jetzt auf die $(n+1)$ Bereiche von F_{n+1} vertheilt, und man erhärtet durch eine leichte Zwischenbetrachtung, dass auf der geschlossenen F_{n+1} keine zwei von diesen Nullpunkten mehr coincidiren. Wo der reelle Zug der auf F_{n+1} gelegenen Smith'schen Curve die Linien der beiderlei Eintheilungen kreuzt, ist jedesmal ein Nullpunkt mit reellem singulären Hypermodul J zu finden, dem eine *ambige* Formclasse im Bereich der Determinanten (2), (3) entspricht. Sonstige Nullpunkte liegen im Innern freier oder doppelt-schraffirter Bereiche der Doppeltheilung und ergeben nichtambige Classen.

Für die Berechnung der singulären Hypermoduln scheint es stets unbequem zu sein, direct die Werthe von J selbst in Erfahrung bringen zu wollen**). Das ist durchaus verständlich, da J eine $(n+1)$-, d. i. verhältnissmässig viel-werthige Function der F_{n+1} ist. Zweckmässiger Weise wird man in den soeben auf der F_{n+1} markirten singulären Punkten die Zahlwerthe einer möglichst einfachen Function z der F_{n+1} bestimmen und sich bezüglich der singulären Werthe J auf die Darstellung $J = R(z', z)$ berufen (vergl. die Formeln des vorigen Artikels).

*) Die betreffenden Entwicklungen kommen für die elliptischen Functionen ausführlich im zweiten Bande der „Modulfunctionen" zur Darstellung.

**) Diese Bemerkung scheint im elliptischen Gebiete z. B. auch Hr. Weber bei seinen Untersuchungen über die singulären Moduln gemacht zu haben; doch benutzt derselbe zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit eine andere Massregel, als die, welche ich im Texte befürworte.

Die fraglichen Werthe z werden wir aber einfach durch Auflösung des Gleichungssystems

$$(6)\qquad R(z', z) - R(z, z') = 0, \quad g(z', z) = 0$$

gewinnen.

Die Mehrzahl der in Rede stehenden singulären Hypermoduln J ergiebt solche Punkte der complexen J-Ebene, welche mehrfache Punkte der Hypermodularcurve $f(J', J) = 0$ sind; einzig die zu den Determinanten $-2n$ und $-4n$ gehörenden J bilden hiervon eine Ausnahme. Es lässt sich nun stets der Ausdruck $R'(J', J)$ der Function z derart wählen, dass R' an den Stellen der letzteren Art nicht unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint; es folgt: Wie wir auch die Function z auswählen mögen, an den zu den Determinanten $-2n$ und $-4n$ gehörenden singulären Stellen von F_{n+1} ist stets $z = z'$. Bei der Unbestimmtheit von z ist dies nur dann möglich, wenn bei der Transformation R_0 der F_{n+1} eine Stelle fraglicher Art in sich selbst übergeht. Umgekehrt gehört zu jedem Fixpunkte der Transformation R_0 von F_{n+1} nicht nur $J' = J$, sondern man kann überdies leicht zeigen, dass die zugehörige quadratische Form eine durch n theilbare Determinante hat, was für die in Betracht kommenden Determinanten nur bei $\Delta = 2n$, $4n$ eintritt. Es ergiebt sich so das Resultat: *Die zu den Formclassen der Determinanten $-2n$ und $-4n$ gehörenden singulären Stellen der F_{n+1} sind die Fixpunkte, welche diese Fläche bei der Transformation R_0 in sich aufweist*, ein Satz, der dem im vorigen Artikel bei den positiven Determinanten gewonnenen Hauptresultate bis ins einzelne entspricht.

Alle diese Entwicklungen der letzten beiden Abschnitte wird man wünschen durch zweckmässige Einzelbeispiele illustrirt zu sehen. Ich kann in dieser Beziehung nur erst anführen, dass ich neuerdings im elliptischen Gebiete sowohl den Gebrauch der doppelt-getheilten Polygone zur Aufstellung der Formclassen, als auch die Berechnung der singulären Moduln nach der gekennzeichneten Methode in den Fällen $n = 5$ und $n = 7$ ohne jede Mühe zu Ende geführt habe. Aber es ist wohl kaum fraglich, dass sich im Gebiete der Gruppen $\Gamma^{(q,r)}$ namentlich, wenn man unter q, r auch zusammengesetzte Zahlen verstehen will, eine grössere Reihe von Einzelbeispielen auffinden lässt, bei denen die volle Durchführung unserer allgemeinen Entwicklungen keinen erheblichen Schwierigkeiten begegnet; und ich hoffe bald in diesem Betracht meiner gegenwärtigen Arbeit eine Ergänzung folgen lassen zu können. Andrerseits wollte ich noch auf die offen zu Tage liegende Möglichkeit der Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate hinweisen. In der That wird man ja auch bei denjenigen automorphen Gruppen,

denen Zahlkörper von einem höheren als zweiten Grade zu Grunde liegen, auf ganz analogem Wege eine Theorie der Formen, der Congruenzgruppen etc. construiren können. Als ein Beispiel erwähne ich nur die zur s-Function mit der Verzweigung $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}\right)$ gehörende Gruppe, welcher der durch $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ definirte Zahlkörper vierten Grades zu Grunde liegt; mit gleicher Leichtigkeit, wie oben sehen wir auch hier, dass die Reduction modulo n auf die bekannte $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ zurückführt, sofern $x^4 - 2x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$ reelle Wurzeln x besitzt u. s. w. Zum Schluss mag noch die Ueberzeugung Ausdruck finden, dass die interessante Gebietserweiterung der überkommenen Zahlentheorie, auf welche wir im Verlauf unserer Entwicklungen gestossen sind, am leichtesten unter consequentem Gebrauch *der algebraischen Zahlen* durchführbar ist, dass aber auf der anderen Seite diese Durchführung in *den geometrischen Anschauungen*, die wir überall zu Grunde legen, ihr wichtigstes Hilfsmittel zur behenden Erledigung der entspringenden Probleme findet.

Berlin, den 19. März 1891.

Ueber das Axiom des Archimedes.

Von

O. Stolz in Innsbruck.

1. Herr P. Veronese, welcher erkannte, dass das Axiom des Archimedes nicht Folge der Stetigkeit sei, hat mich darauf aufmerksam gemacht*), dass aus den Eigenschaften des *zusammenhängenden Grössensystemes* Π, welches ich in meinen Vorlesungen üb. allg. Arithmetik I, benutze, schon hervorgehen müsse, dass *für die Grössen desselben das Axiom des Archimedes Geltung hat.* Das lässt sich in der That in folgender Weise zeigen.

Ich erinnere zunächst an die Voraussetzungen über die Grössen des Systemes Π.

I) Je zwei Grössen des Systemes Π können entweder als gleich oder ungleich und im letzteren Falle kann die eine von ihnen als die grössere bezeichnet werden.

II) die Grössen lassen sich *genau so* addiren, wie die natürlichen Zahlen.

III) Falls $A < B$ ist, so giebt es im Systeme Π eine (und zwar zufolge II) nur eine) Grösse X, so dass $A + X = B$ ist.

IV) Zwischen je zwei ungleichen Grössen liegt immer noch eine Grösse des Systemes und es giebt neben jeder Grösse noch eine kleinere, somit keine kleinste.

Ich nenne eine *Lücke des Systemes* Π jede Theilung der ihm angehörigen Grössen P in zwei Gruppen P_1, P_2 von den folgenden Eigenschaften: 1) Jede Grösse P gehört einer und nur einer Gruppe an. 2) Wenn P_1 eine Grösse der ersten Gruppe ist, so auch jede Grösse, welche kleiner als P_1 — und wenn P_2 eine Grösse der zweiten Gruppe ist, so auch jede Grösse, welche grösser als P_2 ist. 3) Es gehört zur ersten Gruppe neben P_1 eine Grösse, welche grösser als P_1

*) Hrn. Veronese's Ausführungen liegen jetzt gedruckt vor in der Abhandlung; „Il continuo rettilineo et l'Assioma V d'Archimede" (Memorie d. Acc. dei Lincei ser. 4, Vol. VI, p. 603).

und zur zweiten Gruppe neben P_2 eine Grösse, welche kleiner als P_2 ist.

Ausserdem ist dem System Π noch die Eigenschaft beigelegt:

V) Findet sich in demselben eine Lücke (P_1, P_2), so kann man zu jeder Grösse D von Π Grössen $P_1 P_2$ in der Art bestimmen, dass $P_2 - P_1 < D$ ist.

Die Eigenschaft V) ist nun völlig gleichbedeutend damit, dass die Grössen von Π dem Axiome des Archimedes genügen*) d. h.

V*) „*Sind A und B zwei Grössen des Systemes Π, und ist B die kleinere darunter, so giebt es ein Vielfaches von B, welches grösser als A ist.*"

In der That folgt nicht allein aus der Annahme V*), dass jede Lücke des Systemes Π die in V) ausgesprochene Beschaffenheit haben muss, sondern auch umgekehrt, dass wenn die Grössen von Π der Eigenschaft V) genügen, sie auch den Satz V*) erfüllen.

Den ersten Theil dieser Behauptung habe ich bereits in meinen Vorlesungen über allg. Arithmetik (I. p. 81) bewiesen; der zweite ergiebt sich gleichfalls durch einen indirecten Beweis.

Wir bemerken zunächst, dass wenn einer Grösse R von Π eine kleinere S desselben Systemes Π sich so zuordnen lässt, dass jedes Vielfache nS von S kleiner als R ist, $R - nS$ für jeden Werth von n grösser als S ist. — Denn was n für eine natürliche Zahl auch sein mag, so soll ja auch $(n + 1) S < R$ sein.

Sodann ergiebt sich der folgende Satz: „Lässt sich einer Grösse A von Π eine kleinere dieses Systemes B so zuordnen, dass jedes Vielfache von B kleiner als A ist, so weist das System Π eine Lücke (P_1, P_2) auf, *man hätte jedoch, was P_1 für eine Grösse der ersten, P_2 der zweiten Gruppe auch sein mag, stets $P_2 - P_1 > B$.*" Ich theile die Grössen von Π in die Gruppen P_1 und P_2, wovon die erstere eine jede Grösse enthält, die kleiner ist als irgend ein Vielfaches von B, die letztere eine jede, welcher grösser ist als jedes Vielfache von B. Diese beiden Classen entsprechen in der That den oben angegebenen drei Bedingungen, was bezüglich der beiden ersten unmittelbar klar ist, bezüglich der dritten auf folgende Art gezeigt wird. Ist P_1 eine Grösse der ersten Gruppe, so ist P_1 kleiner als ein gewisses Vielfache von $B : kB$. Bedeutet nun Q irgend eine kleinere Grösse als B, so hat man $P_1 + Q < (k + 1) B$; also gehört $P_1 + Q$ auch noch zur ersten Gruppe. Gehört dagegen P_2 in die zweite Gruppe, so hat man für jeden Werth der natürlichen Zahl n $P_2 - nB > B$ d. i. $P_2 - B > nB$,

*) Nach Vollendung dieser Note fand ich, dass die nämliche Bemerkung schon von Hrn. R. Bettazzi in seiner von der Acc. dei Lincei gekrönten Preisschrift: „Teoria delle grandezze" (Pisa 1890) p. 43 gemacht worden ist.

also ist $P_2 - B$ noch zur zweiten Gruppe zu rechnen. — Ist endlich $P_1 < kB$, so ist jedenfalls $P_2 > (k+1)B$, also $P_2 - P_1 > B$.

Zufolge der Annahme V) darf das System Π keine Lücke von der Beschaffenheit aufweisen, wie die soeben betrachtete. Die in dem letzten Satze gemachte Voraussetzung ist mithin unzulässig. D. i. es besteht für das System Π das Axiom des Archimedes V*). Damit wird aber der von mir in Math. Ann. XXII p. 511 vorgeführte Beweis des Satzes, dass für ein stetiges Grössensystem das in Rede stehende Axiom gilt, — welcher als besonderen Fall den gleichlautenden Satz über das System Π enthält — überflüssig und hat zu entfallen.

Hingegen folgt aus den Annahmen I)—V) *keineswegs die unbegrenzte Theilbarkeit einer jeden zu* Π *gehörigen Grösse in untereinander gleiche Theile, welche ebenfalls im Systeme* Π *vorkommen.* Dass dies nicht der Fall sein könne, zeigt schon das System der endlichen Decimalzahlen d. h. der absoluten ganzen Zahlen und echten, sowie unechten *endlichen* Decimalbrüche. Obwohl es die Bedingungen I)—V) offenbar erfüllt, so giebt es in demselben dennoch keine Zahl, deren dreifaches gleich 1 wäre.

Durch Ausfüllung der Lücken eines zusammenhängenden Grössensystemes Π gelangt man nach Dedekind*) zu einem stetigen Grössensystem**). Dass alle Grössen des letzteren Systemes dem Axiom des Archimedes genügen, ist nunmehr leicht zu zeigen (s. u.). Mithin liegt dieses Axiom für die stetigen Grössen in der Eigenschaft V) des zu ihrer Definition benutzten zusammenhängenden Systemes d. h. im Grunde darin, dass die Grössen von Π ihm genügen. So gilt es für die reellen Zahlen allgemein, weil es für die rationalen Zahlen besteht.

2. *Aufstellung des gemeinen stetigen Grössensystems.* Nach Hrn. Veronese hat man unter den stetigen Grössensystemen solche zu unterscheiden, wofür unser Axiom gilt und solche, wofür es nicht gilt. Eines von der ersten Art möge nach Veronese „gemeines stetiges" System heissen. Nun wollen wir noch in Kürze darlegen, wie die Aufstellung eines derartigen Grössensystemes vor sich geht bei Benutzung der von Dedekind herrührenden Methode der „Lücken"***) *eines bestimmten bloss mit den Eigenschaften I)—IV) ausgestatteten Grössensystemes* Π.

---

*) Stetigkeit und irrationale Zahlen 1870, § 4.

**) Vgl. diese Ann. XXII, p. 508.

***) Dedekind selbst bezeichnet a. a. O. die „Lücken" des Systemes der rationalen Zahlen als „Schnitte". Der letztere Begriff ist allgemeiner, indem dieses System z. B. auch so zerschnitten werden kann, dass man aus ihm als erste Gruppe alle Zahlen, die kleiner sind als eine gegebene rationale Zahl *und diese selbst* heraushebt.

Annahme V). „Jeder Lücke (P_1, P_2) des gegebenen Grössensystems Π entspricht *eine und nur eine Grösse* S, welche grösser als jede Grösse P_1 der zur Lücke gehörigen ersten Gruppe von Π, kleiner als jede Grösse P_2 der zweiten heissen soll. Das aus den Grössen Π und den neu hinzugefügten Grössen S *und nur aus diesen* bestehende System sei mit Σ bezeichnet."

Es frägt sich nun, in wie weit die Grössen des soeben gebildeten Systemes Σ den obigen Annahmen I)—IV) genügen.*)

Was zunächst die Vergleichung der Grössen von Σ (Ann. I) betrifft, so lassen sich die Definitionen von Dedekind**) unmittelbar verwenden.

1. *Def.* Zwei Grössen S, S', die erste durch die Lücke (P_1, P_2), die zweite durch die Lücke (P_1', P_2') definirt, sind einander gleich, wenn jede Grösse der zu S gehörigen ersten Gruppe P_1 auch in der zu S' gehörigen ersten Gruppe P_1' vorkommt und *umgekehrt.*

Die Definition ist zulässig, weil nach ihr die Gleichungen $S = S'$, $S = S''$ die Gl. $S' = S''$ nach sich ziehen.

Unter Beibehaltung der soeben benutzten Bezeichnungen setzt man weiter fest: 2. *Def.* „Kommen in der Gruppe P_1 Grössen vor, welche in der Gruppe P_1' nicht erscheinen (oder fehlen in P_2 Grössen von P_2'), so heisst S *grösser* als S'. — Fehlen in der Gruppe P_1 Grössen, welche in der Gruppe P_1' erscheinen (oder kommen in P_2 Grössen vor, welche in P_2' fehlen), so heisst S *kleiner* als S'".

Auch hier sind die bekannten formalen Bedingungen erfüllt.

Nun zeigt sich sofort das Bestehen der *Annahme IV*):

1. *Satz.* „Ist $S > S'$ ($S < S'$), so liegen zwischen S und S' Grössen, welche den Gruppen P_1 und P_2' (P_2 und P_1') gemeinsam sind." — Denn falls $S > S'$ ist, so giebt es *unzählige* Grössen Q in der Gruppe P_1, welche zur Gruppe P_2' gehören, also hat man nach V) $S > Q$, $Q > S'$.

2. *Satz.* „Im Systeme Σ giebt es keine kleinste Grösse."

3. *Satz.* „Es ist nicht möglich, die Grössen des Systemes Σ in zwei Gruppen $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$ von ähnlichen Eigenschaften, wie sie in Nr. 1 der zu einer Lücke gehörigen Gruppen $P_1\,P_2$ beigelegt sind, zu zerlegen. *Das System Σ hat keine Lücken mehr.*"***)

---

*) Bei den Betrachtungen, welche dazu dienen, um die Vergleichung der neu eingeführten Grössen S und die Rechnungsoperationen mit denselben zu begründen, ist der in der Note pag. 109 erwähnte Dedekind'sche Begriff „Schnitt" dem unserer „Lücke" vorzuziehen, weil unter ihn sowohl die Grössen von Π als auch die neuen Grössen S gebracht werden können.

**) Dedekind a. a. O. p. 22.

***) Dedekind a. a. O. p. 25. Hier lautet der Beweis folgendermassen: Angenommen es sei eine Theilung von Σ in zwei solche Gruppen $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$ möglich,

Versucht man nun weiter die Summe zweier Grössen von Σ zu definiren und die den Annahmen II) und III) entsprechenden Sätze zu erweisen, so wird man des als Axiom des Archimedes bezeichneten Satzes *für die Grössen von* Π bedürfen.

Annahme VI). „Bedeuten A und B *zwei Grössen des Systemes* Π, wovon B die kleinere ist, so giebt es ein Vielfaches von B, welches grösser als A ist."

Nunmehr kann man ohne Anstand beweisen, dass die Annahmen II) und III) auch für das System Σ bestehen*) Man hat ferner den folgenden Satz:

a) „Der in der Annahme VI) niedergelegte Satz gilt auch, *wenn* AB *irgend zwei Grössen des Systemes* Σ *bedeuten*, wovon B die kleinere ist."

1. Beweis (indirect). Es wird auf dieselbe Art wie in Nr. 1 gezeigt, dass wenn jedes Vielfache von B grösser als A wäre, das System Σ eine Lücke darbieten würde, was gegen den 3. Satz verstösst. — 2. Beweis. Im Systeme Π giebt es solche Grössen P_2, Q_1, so dass $Q_1 < B$ $A < P_2$ ist. Nach der Annahme VI) lassen sich aber ganze Zahlen m so bestimmen, dass $mQ_1 > P_2$ ist. Da $mB > mQ_1$ $P_2 > A$ ist, so ist $mB > A$.

Ein System Σ von Grössen, welche den Annahmen I—V und dem im Satze *a*) ausgesprochenen Satze des Archimedes genügen, heisst *gemein-stetig*. Dafür gelten noch weiter die Sätze:

b) „Zu jeder Grösse A von Σ und jeder natürlichen Zahl n giebt es im Systeme Σ eine Grösse X von der Art, dass $nX = A$ ist."**)

c) Bedeutet E eine beliebige Grösse von Σ, so lässt sich jede Grösse des Systemes Σ in der Form αE darstellen, wobei α eine absolute rationale oder irrationale Zahl ist.

---

so sind dadurch auch die Grössen von Π in zwei Gruppen $P_1 P_2$ getheilt. Dieser Lücke von Π entspreche die Grösse S. Da wir nun zeigen können, dass S weder zu $\mathfrak{P}_1$ noch zu $\mathfrak{P}_2$ gehören kann, so ist es überhaupt nicht möglich das System Σ derart zu zerschneiden. Gehörte nämlich S zur Gruppe $\mathfrak{P}_1$, so käme darin auch eine Grösse $S' > S$ vor. S' kann nicht Grösse von Π d. i. der Gruppe P_1 sein (Ann. V), aber auch nicht eine neue Grösse, denn es müssten Grössen von P_2 zwischen S und S' liegen (1. Satz).

*) Die Addition und Subtraction der Grössen des Systemes Σ wird nun gerade so durchgeführt, wie bei Dedekind (a. a. O. p. 27), J. Tannery (Introduction à la theorie d. fonctions p. 9), Pasch (Einleitung in die Diff.- u. Integralrechnung p. 4). Das archimedische Axiom für die Grössen von Π wird nach der Darstellung der beiden ersteren zu der Definition der Summe $S + S'$ benöthigt, nach Pasch zum Beweise des Satzes: „Ist $S' > S''$, so ist $S + S' > S + S''$", wobei der folgende Satz zu benutzen ist: Ist eine Grösse ε von Π und eine Strecke A gegeben, so kann man stets eine Grösse x von Π angeben, welche zur Strecke A gehört, während die Grösse $x + \varepsilon$ weder zur Strecke A gehört, noch sie begrenzt.

**) Beweis in Math. Annalen XXII, p. 510.

3. Ob ein bereits irgendwie vollständig definirtes Grössensystem Σ' z. B. die geradlinigen Strecken im absoluten Sinne als stetig in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes zu bezeichnen ist, hängt natürlich davon ab, ob es die soeben angegebenen Eigenschaften besitzt. Kann man aus den Grössen von Σ' ein System Π' bilden, welches die Voraussetzungen I—IV) *und VI*) erfüllt und *enthält das System Σ' neben den Grössen von Π' keine anderen als die durch die Definition V) gegebenen*, so erscheint das Axiom des Archimedes für die Grössen von Σ' als eine Folgerung. Was nun die geradlinigen Strecken betrifft, so giebt die Euklid'sche Geometrie durch Vervielfältigen und Theilen einer gegebenen Strecke E die Mittel an die Hand, ein System Π' aus ihnen zu bilden. Um aber zu zeigen, dass jede in der Geometrie denkbare Strecke aus Π' mittelst der Definition V) abgeleitet werden kann, bedarf man des Archimedischen Axiomes für alle Strecken. Es ist mithin nicht zulässig, wie ich früher behauptete*), dieses Axiom für die Strecken als eine Folge der Stetigkeit anzusehen oder mittelst des Begriffes der Grenze zu beweisen.

Innsbruck, 18. März 1891.

*) Math. Ann. XXII, p. 512.

Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie.

Von

Friedrich Schur in Dorpat.

Die Ergänzungen, welche Herr F. Klein im 37. Bande dieser Annalen*) zu seinen früheren Abhandlungen über Nicht-Euklidische Geometrie gegeben hat, veranlassen mich auf einen Punkt zurückzukommen, den Herr F. Klein dort nicht besonders berührt hat, der mir aber desshalb nicht ohne Interesse zu sein scheint, weil er auf die wichtige und vielleicht nicht von allen Seiten vollkommen verstandene Thatsache Bezug hat, dass die projective Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom begründet werden kann. Bekanntlich verdankt man diese Entdeckung Herrn F. Klein, welcher im 6. Bande dieser Annalen**) alle zur Durchführung seines Gedankens nöthigen Elemente angegeben hat. Da indessen Vieles nur angedeutet ist, so dass ein vollkommenes Verständniss nicht ganz leicht war, so war ein ausführlicherer Beweis dieses fundamentalen Theorems ein Bedürfniss. Demselben wurde zuerst durch Herrn Pasch***) in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie abgeholfen. Hierbei zeigte Herr Pasch zugleich, dass die Einführung der idealen Elemente zur Vervollständigung des zunächst als begrenzt vorausgesetzten Raumes unabhängig von einem gewissen zur Begründung des Fundamentalsatzes der projectiven Geometrie, wie es scheint, unentbehrlichen Axioms†) geschehen kann,

---

*) F. Klein, Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, Ann. Bd. 37, S. 544.

**) F. Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Annalen Bd. 6, S. 132.

***) Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, Teubner 1882. S. 33—64.

†) F. Klein, a. a. O. S. 140, Pasch, a. a. O. S. 126, Thomae, Ebene geometrische Gebilde 1. und 2. Ordnung, Halle, Nebert 1873, S. 12. Von einem solchen Axiome gehen auch die metrischen Beweise des Fundamentalsatzes aus, insofern dieselben auf der Proportionslehre beruhen.

welches entweder nach Herrn F. Klein in der Adjunction von Grenzelementen besteht oder nach Herrn Pasch dem Bereiche der Congruenzaxiome zu entnehmen ist oder endlich nach Herrn Thomae auf dem Bewegungsbegriffe beruht. Indessen verlangen die scharfsinnigen Beweise des Herrn Pasch das Hineindenken in ungemein complicirte Figuren, entfernen sich auch erheblich von dem Gedankengange des Herrn Klein. Eine zweite Ausführung gab Herr Lindemann*) in den vor Kurzem erschienenen Vorlesungen über Geometrie des Raumes. Dieselbe macht jedoch die Einführung der idealen Elemente nicht von dem erwähnten Axiome unabhängig, sodass eine ausführlichere Darstellung der Idee des Herrn Klein, welche sich seinem Gedankengange anschliesst, zugleich aber das Axiom vermeidet und auf einfacheren Figuren beruht, vielleicht nicht unwillkommen sein mag. Im Folgenden glaube ich dies Ziel erreicht zu haben durch das Studium der perspectiven Beziehung zweier Strahlenbündel vermittelst einer Ebene innerhalb eines begrenzten Raumstückes, wobei die harmonischen Elemente zur Vervollständigung dieser Beziehung und damit zur Einführung der idealen Punkte und Geraden dienen. Die perspective Beziehung zweier Ebenen vermittelst eines idealen Punktes führt dann bei Ausführung fast derselben Schlüsse zu den idealen Ebenen.

§ 1.

Ueber die harmonischen Elemente.

Als *erreichbar* bezeichnen wir alles, was innerhalb eines irgendwie begrenzten geschlossenen Raumes liegt, z. B. innerhalb eines Tetraeders. In unsern Zeichnungen sind demnach nur solche Elemente als die Bilder wirklicher oder angeschauter Raumelemente zu betrachten, die innerhalb dieses Raumes liegen; wenn wir auch andre Elemente in gewöhnlicher Weise abbilden, so geschieht dies nur um der Vorstellung zu Hülfe zu kommen, wir werden sie stets von den erreichbaren Elementen durch punktirte Linien abgrenzen. Wir stützen uns im Folgenden nur auf diese Axiome:

I. *Durch je zwei erreichbare Punkte ist eine erreichbare Gerade bestimmt.*

II. *Durch je drei erreichbare Punkte ist eine erreichbare Ebene bestimmt, in welcher jede Gerade enthalten ist, welche zwei erreichbare Punkte mit ihr gemein hat.*

III. *Jede erreichbare Ebene theilt den erreichbaren Raum in zwei*

*) Vorlesungen über Geometrie u. s. w. II. Bd. 1. Theil, Leipzig, Teubner 1891, S. 433ff.

Theile derart, dass jede Gerade, welche einen erreichbaren Punkt des einen Theiles mit einem erreichbaren Punkte des andern Theiles verbindet, die Ebene in einem zwischen diesen beiden Punkten gelegenen erreichbaren Punkte trifft.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Satz 1. *Jede erreichbare Gerade theilt eine sie enthaltende Ebene derart in zwei Theile, dass jede Gerade, welche einen erreichbaren Punkt des einen Theiles mit einem des andern Theiles verbindet, die Gerade in einem zwischen diesen beiden Punkten gelegenen erreichbaren Punkte trifft.*

Ferner ist klar, dass zwei Ebenen, die einen erreichbaren Punkt gemein haben, sich in einer erreichbaren Geraden schneiden müssen. Ist nämlich (Fig. 1) S der gemeinsame Punkt der beiden Ebenen α und β und sind A und B zwei erreichbare Punkte einer durch S gehenden und in α enthaltenen Geraden auf verschiedenen Seiten von S, so liegen A und B auch auf verschiedenen Seiten von β. Ist daher C irgend ein nicht auf der Geraden AB gelegener erreichbarer Punkt von α, so wird derselbe entweder mit A oder mit B auf derselben Seite von β liegen, nehmen wir an mit A. Alsdann liegen B und C auf verschiedenen Seiten von β, sodass die Gerade BC die Ebene β in einem erreichbaren Punkte D trifft, welcher mit S verbunden die gemeinsame erreichbare Gerade der beiden Ebenen α und β liefert.

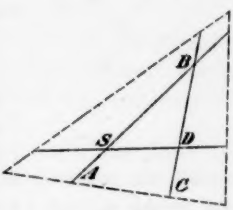


Fig. 1.

Wir erhalten daher den Satz:

Satz 2. *Im Strahlenbündel mit einem erreichbaren Centrum ist ausnahmslos durch zwei Strahlen eine Ebene und durch zwei Ebenen ein Strahl bestimmt.*

Im Strahlenbündel ist es daher unnöthig die Elemente durch das Attribut „erreichbar“ zu kennzeichnen.

Wir beweisen nunmehr den folgenden Fundamentalsatz:

Satz 3. *Sind in einem Bündel durch S drei Strahlen a, b, d einer Ebene gegeben, nimmt man dann einen willkürlichen Strahl e des Bündels ausserhalb dieser Ebene und durch d eine willkürliche Ebene ε an, welche die Ebenen (ea) und (eb) in den Strahlen f und g schneiden mag, verbindet endlich den Schnittstrahl h der Ebenen (ag) und (bf) mit e durch eine Ebene, so schneidet dieselbe die Ebene (ab) in einem Strahle c, welcher von den beiden willkürlichen Elementen e und ε unserer Figur unabhängig ist und der von d durch a und b harmonisch getrennte Strahl heisst.*

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir zunächst (Fig. 2) auf b und d die Punkte B und D auf verschiedenen Seiten von a an, sodass BD den Strahl a in einem zwischen B und D gelegenen Punkte A treffen wird. Nehmen wir dann noch auf e den Punkt E so an, dass er auf der entgegengesetzten Seite von g liegt wie B, sodass BE den Strahl g in einem zwischen B und E gelegenen Punkte G trifft, so liegen B und G auf derselben, B und D dagegen auf verschiedenen Seiten von AE; es trifft daher GD die AE in einem zwischen G und D gelegenen Punkte F, welcher auf dem Strahle f liegt. Da A und B auf derselben, B und E hingegen auf verschiedenen Seiten von GD liegen, so liegt F auch zwischen A und E. Ebenso beweist man, dass AG und BF sich in einem zwischen A und G sowohl wie zwischen B und F gelegenen Punkte H treffen, der auf dem Strahle h liegt. Da endlich B und G auf derselben, A und G hingegen auf verschiedenen Seiten von EH liegen, so schneidet AB die EH in einem zwischen A und B gelegenen Punkte C, welcher auf c liegt; da B und C auf derselben, B und E dagegen auf verschiedenen Seiten von AG liegen, so gilt dasselbe von E und C, oder H liegt zwischen E und C. Wir erhalten so unsere räumliche Figur als Projection einer ebenen aus lauter erreichbaren Elementen bestehenden und sehen, dass jedenfalls C und D durch a und b, also auch c von d durch a und b getrennt ist.

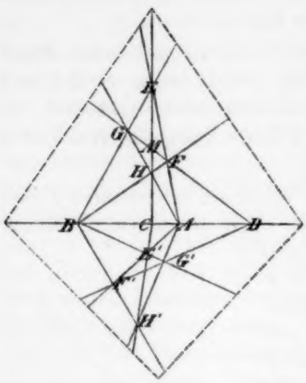


Fig. 2.

Mögen nun die willkürlichen Elemente e und ε irgend welche andre Lagen haben, die wir mit e' und ε' bezeichnen wollen und entsprechend die übrigen aus ihnen entstehenden Strahlen mit f', g', h', c', so nehmen wir auf h' den Punkt H' in einer von den Ebenen ε' und ABE verschiedenen Ebene so an, dass A und H' auf verschiedenen Seiten von g' liegen; es schneidet daher AH' den Strahl g' in einem zwischen a' und h' gelegenen Punkte G'. Man beweist nun wie oben, dass BH' die DG' in einem zwischen B und H' gelegenen Punkte F' auf f' schneidet, ebenso AF' die BG' in einem zwischen A und F' sowohl wie zwischen B und G' auf e' gelegenen Punkte E' und endlich $E'H'$ die AB in einem zwischen A und B auf c' so gelegenen Punkte C', dass E' zwischen C' und H' fällt. Nun ist leicht zu sehen, dass sich in je einem erreichbaren Punkte schneiden EE' und FF', FF' und GG', GG' und EE'. Weil aber die Punkte EFG

und $E'F'G'$ nicht in derselben Ebene liegen, so müssen sich die drei Geraden EE', FF', GG' in demselben Punkte T schneiden. Ebenso beweist man, dass HH', FF' und GG' sich in demselben, also ebenfalls im Punkte T schneiden. Es liegen demnach EE' und HH' in derselben Ebene, sodass C und C', mithin auch c und c' zusammenfallen müssen. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen*).

Da man in unserer Figur bei Festhaltung der Strahlen a und b den Strahlen c, g, h, e, f die Rolle der Strahlen d, e, f, g, h ertheilen kann, und hierbei c in d übergeht, so sieht man, dass auch d der von c durch a und b harmonisch getrennte Strahl ist. Wir erhalten mithin den Satz:

Satz 4. *Ist c von d durch a und b harmonisch getrennt, so ist auch d von c durch a und b harmonisch getrennt.*

Wir wollen vier solche Strahlen kürzer *vier harmonische Strahlen* nennen; dieselben bilden zwei durch einander getrennte Paare, welche hier nicht als gleichberechtigt erscheinen, während die Strahlen jedes Paares mit einander vertauscht werden können**).

Da in unserer Figur die Strahlen $f, g, d, e, a\, b, h$ die Rolle der Strahlen a, b, d, e, f, g, h erhalten können, so schneiden sich die Ebenen (eh) und (fg) in einem Strahle m, welcher von d durch f und g harmonisch getrennt ist. Die vier Ebenen (ea), (eb), (ec), (ed) werden daher von jeder Ebene durch d in vier harmonischen Strahlen geschnitten; da weiter von jeder Ebene durch m dasselbe gilt, so werden diese vier Ebenen überhaupt von jeder Ebene des Bündels in vier harmonischen Strahlen geschnitten. Projicirt man endlich unsere Figur in der Ebene ABE von irgend einem Punkte S' der Geraden ES aus, sodass $S'A$, $S'B$, $S'C$, $S'D$ vier harmonische Strahlen des Bündels durch S' sind, so sieht man, dass die vier Ebenen überhaupt durch jede Ebene, welche ihre Axe in einem erreichbaren Punkte trifft, in vier harmonischen Strahlen geschnitten werden. Nennen wir daher die Ebenen, welche vier harmonische Strahlen projiciren, *vier harmonische Ebenen*, so können wir den Satz aussprechen:

Satz 5. *Vier harmonische Strahlen werden aus jedem Punkte durch vier harmonische Ebenen projicirt und vier harmonische Ebenen durch jede Ebene, welche ihre Axe in einem erreichbaren Punkte trifft, in vier harmonischen Strahlen geschnitten.*

Hieraus ergiebt sich auf Grund von Satz 3 das Corollar:

Satz 6. *Sind die Ebenen γ und δ harmonisch getrennt durch α*

*) Vergl. wegen dieses Beweises: Pasch, a. a. O. S. 33 und Reyes y Prósper, Sur la géométrie non-Euclidienne, Ann. Bd. 29, S. 154.

**) Dass auch a von b durch c und d harmonisch getrennt ist, kommt für das Folgende nicht in Betracht und braucht daher hier nicht bewiesen zu werden.

und β und es enthalten α, β, γ drei von den vier harmonischen Strahlen a, b, c, d, nämlich a, b, c resp., so geht auch δ durch d.

Schliesslich heben wir noch den Satz hervor:

Satz 7. *Werden die Ebenen γ und δ durch α und β harmonisch getrennt, und es trifft die zwei erreichbaren Punkte A und B von resp. α und β verbindende Gerade δ entweder überhaupt in keinem erreichbaren Punkte oder in einem solchen, welcher ausserhalb der Strecke AB liegt, so trifft γ die AB in einem zwischen A und B gelegenen erreichbaren Punkte.*

Der Voraussetzung gemäss liegen nämlich A und B sicher auf derselben Seite von δ; da aber γ von δ durch α und β getrennt ist, so liegen A und B auf verschiedenen Seiten von γ.

§ 2.

Ueber die perspective Beziehung zweier Strahlenbündel und die idealen Punkte und Geraden.

Wir denken uns gegeben irgend zwei Strahlenbündel mit den erreichbaren Centren S und S' und eine erreichbare Ebene η, welche weder durch S noch durch S' geht, und die beiden Strahlenbündel so auf einander bezogen, dass jedem Strahle e und jeder Ebene α durch S, welche η in einem erreichbaren Punkte E und einer erreichbaren Geraden $\mathfrak{a}$ schneiden, der Strahl $S'E$ und die Ebene $S'\mathfrak{a}$ entsprechen und umgekehrt. Dann ist das Folgende unmittelbar klar.

Drei Strahlen durch S einer Ebene, welche η in erreichbaren Punkten treffen, entsprechen durch S' wiederum drei Strahlen einer Ebene.

Drei Ebenen durch denselben Strahl von S, welcher η in einem erreichbaren Punkte trifft, entsprechen durch S' drei Ebenen, welche ebenfalls durch denselben Strahl gehen.

Weiter ergiebt sich aus Satz 5:

Vier harmonischen Strahlen von S, welche η in vier erreichbaren Punkten schneiden, entsprechen vier harmonische Strahlen von S'.

Nun folgt weiter:

Gehen drei Ebenen von S, welche η in erreichbaren Geraden treffen, durch denselben Strahl, so gilt dasselbe für die entsprechenden Ebenen durch S'.

Sind nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ die drei Geraden von η, welche mit dem Strahle e durch S in je einer Ebene liegen mögen, so bedarf der Satz natürlich nur für den Fall eines Beweises, dass sich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ nicht in einem erreichbaren Punkte E treffen (Fig. 3, s. folgende Seite). Dann werden die erreichbaren Punkte einer der drei Geraden ganz zwischen den beiden andern liegen; wir wollen annehmen, dass $\mathfrak{a}$ zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ liege.

Sind demnach B und D irgend zwei Punkte auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$, so wird BD die $\mathfrak{a}$ in einem zwischen B und D gelegenen Punkte A treffen. Derjenige Strahl, welcher von SD durch SA und SB harmonisch getrennt ist, trifft demnach nach Satz 7 die η in einem zwischen A und B gelegenen Punkte C und es sind (eA), (eB), (eC), (eD) vier harmonische Ebenen. Legen wir nun durch SD eine Ebene, welche $\mathfrak{b}$ in dem erreichbaren Punkte G schneiden mag, so trifft sie auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c} = \big(\eta, (eC)\big)$ in den erreichbaren Punkten F und M so, dass SF, SG, SM, SD vier harmonische Strahlen sind (Satz 5). Nunmehr entsprechen den zweimal vier harmonischen Strahlen SA, SB, SC, SD und SF, SG, SM, SD die zweimal vier harmonischen Strahlen $S'A$, $S'B$, $S'C$, $S'D$ und $S'F$, $S'G$, $S'M$, $S'D$. Schneiden sich daher die Ebenen $(S'\mathfrak{a})$ und $(S'\mathfrak{b})$ in e', so sind $(e'A)$, $(e'B)$, $(e'C)$, $(e'D)$ vier harmonische Ebenen, müssen also nach Satz 5 die Ebene $S'DG$ in vier harmonischen Strahlen schneiden. Da drei von ihnen mit $S'F$, $S'G$, $S'D$ zusammenfallen, so muss der vierte nach Satz 6 mit $S'M$ übereinstimmen, d. h. $(e'C)$ geht durch M oder die Ebenen $(S'\mathfrak{a})$, $(S'\mathfrak{b})$, $(S'\mathfrak{c})$ gehen durch denselben Strahl e'.

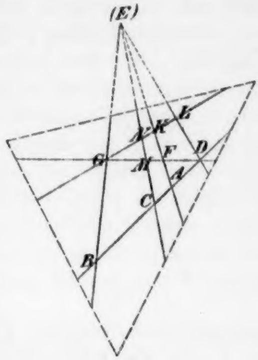


Fig. 3.

Schneidet ferner irgend eine durch SG gehende Ebene die Gerade $\mathfrak{b}$ in einem erreichbaren Punkte L, sodass dieselbe Ebene auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ in erreichbaren Punkten K und N schneiden wird, so sind die Strahlen SN und SL harmonisch getrennt durch SG und SK, und es entsprechen ihnen in S' ebenfalls vier harmonische Strahlen $S'G$, $S'K$, $S'N$, $S'L$. Da nun von den vier harmonischen Ebenen $(e'A)$, $(e'B)$, $(e'C)$, $(e'D)$ drei durch K, G, N resp. gehen, so muss auch $(e'D)$ den Punkt L enthalten oder es geht auch die Ebene $(S'\mathfrak{b})$ durch e' w. z. b. w. Aus dem Beweise ergiebt sich zugleich:

Vier harmonischen Ebenen durch S, welche η in erreichbaren Geraden schneiden, entsprechen durch S' wieder vier harmonische Ebenen.

Hiernach entspricht jedem Strahle e durch S eindeutig ein gewisser Strahl e' durch S' und umgekehrt, und zwar entsprechen drei Strahlen durch S einer Ebene, welche η in einer erreichbaren Geraden trifft, drei Strahlen durch S' von derselben Beschaffenheit.

Nunmehr lässt sich auch beweisen:

Irgend drei Strahlen durch S, welche in einer Ebene liegen, entsprechen durch S' drei ebensolche Strahlen.

Sind nämlich a, b, d die drei Strahlen durch S, und c von d durch a und b harmonisch getrennt, so projiciren wir dieselben von einem Strahle e durch S, welcher η in dem erreichbaren Punkte E (Fig. 4) trifft, durch die vier harmonischen Ebenen (ea), (eb), (ec), (ed), ebenso von einem Strahle h durch S der Ebene (ec) aus, welcher η in dem erreichbaren Punkte H trifft, durch die vier harmonischen Ebenen (ha), (hb), (hc), (hd). Ihnen entsprechen, wie wir soeben sahen, durch S' die zweimal vier harmonischen Ebenen $(e'a')$, $(e'b')$, $(e'c')$, $(e'd')$ und $(h'a')$, $(h'b')$, $(h'c')$, $(h'd')$. Es schneidet demnach die Ebene $(a'b')$ jedes dieser Quadrupel harmonischer Ebenen in vier harmonischen Strahlen. Da je drei von diesen coincidiren, nämlich a', b' und die Schnittlinie mit $(e'c') = (h'c')$, so müssen sich auch $(e'd')$ und $(h'd')$ auf $(a'b')$ schneiden w. z. b. w.

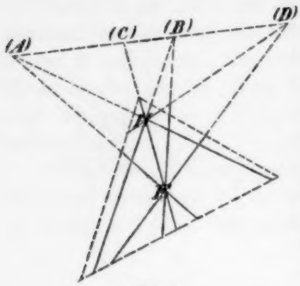


Fig. 4.

Hiernach entspricht jeder Ebene α durch S eine Ebene α' durch S' und umgekehrt, und zwar entsprechen drei Ebenen von S durch denselben Strahl drei Ebenen durch S' von derselben Beschaffenheit. Da nunmehr jeder zur Construction von vier harmonischen Strahlen gehörigen Figur eine analoge im andern Bündel entspricht, so entsprechen je vier harmonischen Strahlen oder Ebenen vier harmonische Strahlen oder Ebenen.

Da endlich jede Ebene durch SS', welche η in einer erreichbaren Geraden trifft, sich selbst entspricht, so gilt dasselbe von jeder Ebene δ durch SS'. Denn sind α und β irgend zwei Ebenen durch SS', welche η in erreichbaren Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ treffen, so wird die Ebene γ, welche von δ durch α und β harmonisch getrennt ist, η ebenfalls in einer zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegenden erreichbaren Geraden treffen (Satz 7). Da nun von den zweimal vier harmonischen Ebenen α, β, γ, δ und α', β', γ', δ' die Ebenen α, β, γ mit α', β', γ' zusammenfallen, so ist auch δ identisch mit δ'.

Wir können so schiesslich das folgende Resultat aussprechen:

Satz 8. *Werden zwei Strahlenbündel mit den erreichbaren Centren S und S' derart auf einander bezogen, dass jedem Strahle durch S, welcher eine feste erreichbare Ebene η in einem erreichbaren Punkte E trifft, der Strahl $S'E$ zugewiesen wird, so ist dadurch jedem Strahle durch S eindeutig ein entsprechender Strahl durch S' derart zugewiesen, dass je drei Strahlen einer Ebene wieder drei Strahlen einer Ebene entsprechen, und jede gemeinsame Ebene der beiden Bündel sich selbst entspricht.*

Dieser Satz lehrt uns, wie durch zwei erreichbare Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben Ebene η stets ein aus erreichbaren Strahlen bestehendes Bündel bestimmt ist von der Beschaffenheit, dass je zwei Geraden des Bündels durch eine Ebene verbunden werden können. In der That erhalten wir den durch irgend einen Punkt S gehenden Strahl e des Bündels als Schnittlinie der beiden Ebenen $(S\mathfrak{a})$ und $(S\mathfrak{b})$, und nach dem Satze liegt derselbe mit der Schnittlinie e' der Ebenen $(S'\mathfrak{a})$ und $(S'\mathfrak{b})$, wo S' ganz beliebig, in derselben Ebene. Ist ferner $\mathfrak{c}$ eine Gerade von η, welche mit e in derselben Ebene liegt, so liegt sie nach dem Satze auch mit e' in einer Ebene. Wir wollen daher auch in dem Falle, dass wir über den etwaigen Schnittpunkt der Strahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nichts wissen, von einem *idealen* Centrum des Bündels reden, dessen in jedem Falle erreichbares Substrat eben die erreichbaren Strahlen des zugehörigen Bündels sind. Dann können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 9. *Jede erreichbare Gerade bestimmt mit jeder erreichbaren Ebene, oder je zwei erreichbare Geraden derselben Ebene bestimmen das Centrum eines Bündels erreichbarer Strahlen derart, dass durch jeden erreichbaren Punkt einer hindurchgeht, und je zwei Strahlen in derselben Ebene liegen. Ist das Centrum unerreichbar, so wollen wir dasselbe einen idealen Punkt nennen.*

Sind zwei ideale Punkte mit den zugehörigen Bündeln gegeben, so ist unmittelbar klar, dass durch jeden erreichbaren Punkt S eine gemeinsame Ebene der beiden Bündel geht; sie ist bestimmt durch die Strahlen, welche die beiden Bündel durch den Punkt S schicken, und es liegen in ihr noch einfach unendlich viel Strahlen aus jedem Bündel. Es bestimmen also die beiden idealen Punkte ein Ebenenbüschel, dessen Axe wir in jedem Falle eine *ideale Gerade* nennen können. Denken wir uns, was immer möglich ist, die beiden idealen Punkte bestimmt durch eine gemeinsame Ebene η ihrer Bündel und durch zwei Strahlen a und b von S, so wird jeder Strahl c der Ebene (ab) durch S einen idealen Punkt bestimmen, den wir als der idealen Geraden angehörig betrachten können. Denn schicken die drei idealen Punkte $[a, \eta]$, $[b, \eta]$, $[c, \eta]$ durch irgend einen erreichbaren Punkt S' die Strahlen a', b', c', so liegen dieselben nach Satz 8 ebenfalls in einer Ebene, welche unserem Büschel angehört und zugleich jedem der zu den drei idealen Punkten gehörigen Bündel. Wir erhalten daher den Satz:

Satz 10. *Je zwei ideale Punkte oder je zwei erreichbare Ebenen bestimmen ein Büschel idealer Punkte und erreichbarer Ebenen derart, dass durch jeden erreichbaren Punkt eine Ebene desselben geht, welche zugleich allen zu den idealen Punkten gehörigen Bündeln gemeinsam*

ist; ist die Axe des Büschels unerreichbar, so wird sie eine ideale Gerade genannt.

Das Büschel der erreichbaren Ebenen ist das erreichbare Substrat der idealen Geraden. Nun ist der Satz evident:

Satz 11. *Je drei erreichbare Ebenen oder jede ideale Gerade und eine erreichbare Ebene haben einen erreichbaren oder idealen Punkt gemein.*

Sind nämlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die drei Ebenen, so schicken die Büschel $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{C}, \mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ durch jeden erreichbaren Punkt S je eine Ebene, α, β, γ, welche sich in demselben Strahle e schneiden müssen. Denn schneiden sich β und γ in e, so gehören die Ebenen β und γ dem durch e und $\mathfrak{A}$ bestimmten Bündel an. Da ferner $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ den Büscheln $(\mathfrak{A}, \gamma)$ und $(\mathfrak{A}, \beta)$ resp. angehören, so gehören sie auch zum Bündel $[e, \mathfrak{A}]$ und in Folge dessen auch α, welche dem Büschel $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ angehört, d. h. e liegt auch in α.

§ 3.

Ueber die perspective Beziehung zweier erreichbarer Ebenen und die ideale Ebene.

Nach der Einführung der idealen Punkte und Geraden steht jetzt auch in der Ebene dem Satze, dass je zwei Punkte eine Gerade bestimmen, ausnahmslos der Satz gegenüber, dass je zwei Geraden einen Punkt bestimmen. Hierbei mag bemerkt werden, dass das erreichbare Substrat einer idealen Geraden innerhalb der Ebene eine perspective Beziehung je zweier erreichbarer Strahlenbüschel ist, zu deren Bestimmung irgend ein ausserhalb gelegener Punkt S dient. Ebenso ergiebt sich aus dem für Strahlenbündel erwiesenen Satze 3 über harmonische Strahlen durch Projection ein entsprechender Satz über harmonische Punkte; wir brauchen im Satze nur Strahl durch Punkt und Ebene durch Gerade zu ersetzen. Dann ist klar, dass je vier harmonische Punkte von jedem Punkte der Ebene aus durch vier harmonische Strahlen projicirt werden, und dass je vier harmonische Strahlen durch jede Gerade der Ebene in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Um diesem Satze eine allgemeinere Ausdehnung geben zu können, studiren wir diejenige Beziehung zwischen zwei erreichbaren Ebenen η und η', welche jedem Punkte von η denjenigen Punkt von η' zuweist, welcher mit ihm und einem idealen Punkte (X)*) auf einer Geraden liegt. Hierbei entsprechen offenbar drei Punkten von η, welche in einer erreichbaren Geraden liegen, drei Punkte von η', welche in

*) Wir wollen die Punkte, die entweder nur ideal sind oder es sein könnten, durch Klammern kennzeichnen.

einer erreichbaren oder idealen Geraden liegen. Vier harmonischen Strahlen von η durch einen erreichbaren Punkt E entsprechen ebenfalls vier harmonische Strahlen von η', wie sofort einleuchtet, wenn der Hilfspunkt S auf der Geraden $E(X)$ angenommen wird. Nunmehr ist leicht zu sehen, dass drei Punkten irgend einer Geraden von η drei Punkte einer Geraden von η' entsprechen. Seien nämlich (A), (B), (D) die drei Punkte, ferner (C) von (D) durch (A) und (B) harmonisch getrennt und E und H irgend zwei erreichbare Punkte auf einer Geraden von η durch (C), so entsprechen den zweimal vier harmonischen Strahlen, welche E und H mit (A), (B), (C), (D) verbinden in η' zweimal vier harmonische Strahlen, welche (E') und (H') mit (A'), (B'), (C'), (D') verbinden und die Gerade $(A')(B')$ in zweimal vier harmonischen Punkten treffen müssen; da von diesen je drei, nämlich (A'), (B') und der Schnittpunkt von $(A')(B')$ mit $(E')(C') = (H')(D')$ coincidiren, so treffen auch $(E')(D')$ und $(H')(D')$ die $(A')(B')$ in einem und demselben Punkte D' oder (A'), (B'), (D') liegen in einer Geraden. Wir erhalten mithin den Satz:

Satz 12. *Sind zwei erreichbare Ebenen so auf einander bezogen, dass je zwei Punkte einander entsprechen, welche mit einem idealen Punkte in je einer erreichbaren oder idealen Geraden liegen, so entsprechen je drei Punkten einer Geraden der einen Ebene auf der andern wieder drei Punkte einer Geraden.*

Wir können diesen Satz offenbar auch dahin aussprechen, dass der Ort der idealen Geraden, welche ein idealer Punkt mit den Punkten einer idealen Geraden bestimmt, durch jede erreichbare Ebene in einer idealen Geraden getroffen wird. Wir werden daher diesen Ort eine *ideale Ebene* nennen können. In der That muss jede ideale Gerade, welche zwei ihrer Punkte enthält, ganz in ihr enthalten sein; denn nach der zweiten Form unseres Satzes schneidet irgend eine erreichbare Ebene durch die beiden idealen Punkte die durch diese bestimmte ideale Gerade aus dem Orte aus. Wir können daher unsern Satz auch so formuliren:

Satz 13. *Der Ort der idealen Geraden, welche einen idealen Punkt mit allen Punkten einer idealen Geraden verbinden, ist eine ideale Ebene, welche jede ideale Gerade enthält, die zwei Punkte mit ihr gemein hat.*

Da jede ideale Gerade durch zwei erreichbare Ebenen bestimmt wird, und jede erreichbare Ebene mit einer idealen Ebene eine ideale Gerade gemein hat, so wird nach Satz 11 jede ideale Ebene von jeder idealen Geraden in einem idealen Punkte getroffen und nach Satz 13, wenn die Gerade nicht in der Ebene enthalten ist, nur in einem Punkte. Hieraus geht hervor, dass je zwei ideale Ebenen eine ideale Gerade

gemein haben, welche durch die Schnittpunkte irgend zweier idealen Geraden der einen Ebene mit der andern bestimmt ist. Daraus folgt endlich, dass je drei ideale Ebenen einen idealen Punkt oder eine ideale Gerade gemein haben. Wir erhalten daher zum Schlusse den Satz:

Satz 14. *Je zwei ideale Ebenen haben eine ideale Gerade gemein und je drei ideale Ebenen einen idealen Punkt oder eine ideale Gerade.*

Das erreichbare Substrat einer idealen Ebene ist offenbar eine perspective Beziehung je zweier erreichbarer Strahlenbündel.

Hiermit ist nun in aller Vollständigkeit bewiesen, dass, wenn man sich auf die Betrachtung eines endlichen Raumstückes beschränkt, bei Adjunction der idealen Elemente die Fundamente der projectiven Geometrie denselben allgemeinen Charakter erhalten, wie bei Voraussetzung des Parallelenaxioms durch Adjunction der sogenannten unendlich fernen Elemente.

Dorpat, im April 1891.

Zur Theorie der sogenannten Convergenz-Kriterien zweiter Art.

(Nachtrag zu dem Aufsatze: *„Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern“* — im 35. Bande d. Ztschr.).

Von

Alfred Pringsheim in München.

Bedeutet Σa_ν eine beliebig vorgelegte Reihe mit positiven Gliedern, $\frac{1}{D_\nu}$ bezw. $\frac{1}{C_\nu}$ das allgemeine Glied einer bereits als *divergent* bezw. *convergent* erkannten Reihe, so ergeben sich zunächst ohne weiteres die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} &\leqq \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} \\ \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} &\geqq \frac{C_{\nu+1}}{C_\nu} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für alle } \nu \geqq n, \\ &(p \text{ eine feste ganze Zahl } \geqq 0), \end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$D_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} \leqq 0, \tag{1}$$

$$C_\nu \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - C_{\nu+1} \geqq 0 \tag{2}$$

als *hinreichend* für die *Divergenz* bezw. *Convergenz* von Σa_ν. Um nun das auf diese Weise hergeleitete *Con*vergenz-Kriterium *„zweiter Art“* so umzuformen, dass dessen linke Seite mit derjenigen des entsprechenden *Di*vergenz-Kriteriums identisch wird, habe ich in der oben citirten Abhandlung behufs Elimination von C_ν den Ausdruck

$$C_\nu^{-1} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{e^{\varrho M_{\nu+1}}} = D_\nu^{-1}\, e^{-\varrho M_{\nu+1}} \qquad (\varrho > 0)$$

eingeführt*), und zwar durch den Umstand bewogen, dass gerade *diese* „typische Form“ des allgemeinen Gliedes zur Ableitung des *allgemeinsten*

---

*) a. a. O. p. 360.

Convergenz-Kriteriums *erster* Art sich als besonders zweckmässig erwiesen hatte*). Inzwischen habe ich nun aber erkannt, dass gerade die Einführung des *allereinfachsten* Typus**) für C_ν^{-1}, nämlich:

$$C_\nu^{-1} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu} \quad \begin{array}{l}(M_\nu \text{ eine positive monotone Function} \\ \text{von } \nu \text{ mit dem Grenzwerthe } \infty)\end{array}$$

etwas schneller zu dem gewünschten Resultate führt. Man erhält nämlich auf diese Weise aus (2) nach Weglassung des gemeinsamen Factors $M_{\nu+1}$ zunächst:

$$\frac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - \frac{M_{\nu+2}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}} \geqq 0$$

oder, wenn man beachtet, dass:

$$\frac{M_{\nu+2}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}} = 1 + \frac{M_{\nu+1}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}}$$

und ausserdem die ganze Relation mit einer beliebig klein anzunehmenden positiven Grösse ϱ multiplicirt:

$$\varrho \cdot \frac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - \varrho \cdot \frac{M_{\nu+1}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}} \geqq \varrho.$$

Da aber das allgemeine Glied D_ν^{-1} *jeder* divergenten Reihe (ohne irgendwelche Einschränkung) auf die Form:

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$$

gebracht werden kann***), so lässt sich die letzte Beziehung auch folgendermaassen schreiben:

$$(3) \qquad D_\nu \cdot \frac{a_{\nu+p}}{a_{\nu+p+1}} - D_{\nu+1} \geqq \varrho$$

und das Bestehen derselben giebt also stets eine hinreichende Bedingung für die Convergenz von Σa_ν.

Durch Vereinigung von (1) und (3) und Uebergang zur Grenze $n = \infty$ ergiebt sich alsdann ohne weiteres das disjunctive Haupt-Kriterium zweiter Art:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \left(D_n \frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}} - D_{n+1} \right) \begin{cases} < 0: & \textit{Divergenz}, \\ > 0: & \textit{Convergenz}, \end{cases}$$

während die Verbindung von (2) mit (3) — wenn man berücksichtigt dass *jede* Reihe positiver Grössen $\varphi(\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ entweder der Classe der Zahlen C_ν oder derjenigen der Zahlen D_ν angehören muss —

---

*) a. a. O. p. 339 ff.

**) a. a. O. p. 327, Gl. (11).

***) a. a. O. p. 320.

das nach dem Vorgange des Herrn Dini*) von jeder Nebenbedingung befreite Kummer'sche Kriterium liefert:

$$(5)\qquad \lim_{n=\infty}\left(\varphi(n)\,\frac{a_{n+p}}{a_{n+p+1}}-\varphi(n+1)\right)>0:\textit{Convergenz},$$

wo also $\varphi(\nu)$ keiner weiteren Beschränkung unterliegt als *der*, positiv zu sein.

Zu vorstehender Mittheilung wurde ich angeregt durch die Lectüre eines Aufsatzes, welchen Herr Giudice jüngst in den *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo***) veröffentlicht hat. Dort wird nach Erwähnung meiner hier citirten Abhandlung über Convergenztheorie folgendes gesagt:

„Nichts desto weniger scheint es mir, dass *kein neues* Kriterium aufgestellt wurde, welches sich von den wichtigen Untersuchungen Cauchy's und Abel's und der fundamentalen Arbeit Kummer's *merklich unterschiede.* Dagegen ist vielleicht das Kriterium, welches ich jetzt mittheilen will, wegen der völligen Unbeschränktheit der dabei auftretenden Functionen der *besonderen Beachtung werth.* Dasselbe lautet:

Für die Convergenz der Reihe mit positiven Gliedern

$$u_1+u_2+u_3+\cdots$$

ist nothwendig und hinreichend, dass sich eine Function a_n bestimmen lässt, für welche bei allen Werthen n:

$$a_n>0\qquad \frac{u_n}{u_{n+1}}\geqq a_n\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right).\text{—“}$$

Hierzu möchte ich mir nun erlauben, folgendes zu bemerken. Es war gerade ein Hauptziel meiner ganzen Convergenzuntersuchung, das Dini-Kummer'sche Kriterium, welches in seiner schier verblüffenden Allgemeinheit als ausschliessliches Kriterium **zweiter** Art neben allen übrigen Kriterien *erster* wie *zweiter* Art bisher völlig *isolirt* dastand, aus dieser förmlich räthselhaft erscheinenden Sonderstellung zu befreien. Und in der That ist es mir denn auch gelungen, ein meines Wissens bisher nicht bekanntes Kriterium **erster** Art von ganz ähnlich allgemeinen Charakter aufzustellen, nämlich: ***)

$$\lim_{n=\infty}\frac{\lg\dfrac{1}{\varphi(n)\cdot a_{n+p}}}{\displaystyle\sum_0^n{}_\nu\,\frac{1}{\varphi(\nu)}}>0:\textit{Convergenz}$$

---

*) a. a. O. p. 362, zweite Fussnote.

**) T. IV, p. 278: *Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi.*

***) a. a. O. p. 342, (H).

wo wiederum $\varphi(\nu)$ an keinerlei andere Beschränkung gebunden ist, als *die*, wesentlich positiv zu sein.

Sodann habe ich auch gezeigt, dass ausser dem gewöhnlichen Dini-Kummer'schen Kriterium *zweiter* Art auch noch *andere von gleicher formaler Allgemeinheit und gleicher Tragweite* existiren, die sich sämmtlich aus einer gemeinsamen Quelle nach einer einfachen, genau präcisirten *Methode* ableiten lassen, wie z. B. das folgende:*)

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n+1) \lg \frac{\varphi(n) \cdot a_{n+p}}{\varphi(n+1)\, a_{n+p+1}} > 0 : \textit{Convergenz}.$$

Mag man nun aber auch das Neue, was etwa in diesen Kriterien enthalten sein mag, *noch so gering* anschlagen, so muss auf der andern Seite bezüglich des angeblich neuen, von Herrn Giudice aufgestellten Kriteriums gesagt werden, dass dasselbe doch wohl *gar keinen* Anspruch auf Neuheit machen kann, vielmehr mit dem Dini-Kummer'schen Kriterium *schlechthin identisch* ist.

Bringt man nämlich die betreffende Ungleichung auf die Form:

$$\frac{1}{a_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \geqq 1$$

und vergleicht damit das Dini-Kummer'sche Kriterium (s. oben: (5)):

$$\varphi(n) \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1) \geqq \varrho \quad (\varrho > 0),$$

so ergiebt sich sofort die Identität beider Kriterien, wenn

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varrho} \cdot \varphi(n)$$

gesetzt wird — was ohne Weiteres gestattet ist, da den Grössen $\frac{1}{a_n}$ einerseits und $\frac{1}{\varrho} \cdot \varphi(n)$ andererseits genau das gleiche Maass von Willkürlichkeit zukommt. Das einzig Neue bei dem Kriterium des Herrn Giudice liegt also in einem geringfügigen und an sich völlig bedeutungslosen *Unterschiede der Bezeichnung.*

München, im März 1891.

*) a. a. O. p. 372, (P).

Ueber Functionen von zwei Veränderlichen und einen Satz des Herrn Nöther.

Von

A. Brill in Tübingen.

Die Untersuchungen von Herrn Weierstrass „Zur Theorie der Functionen von mehr Veränderlichen“ in dessen „Abhandlungen zur Functionenlehre“ (1886, S. 107) beruhen auf einem auch sonst grundlegenden Satz, der im Wesentlichen auf die Umwandlung einer Function, die in der Umgebung einer ihrer Nullstellen als Potenzreihe darstellbar ist, in eine einfachere und zwar nothwendige Form abzielt. Die vereinfachte Gestalt der Function stimmt mit der ursprünglichen in der nächsten Umgebung jener Stelle überein, und unterscheidet sich von ihr weiterhin durch einen Factor, dem man die Form einer mit 1 beginnenden gewöhnlichen Potenzreihe geben kann.

Diesem Satz lässt sich ein analoger an die Seite stellen, in welchem mehrere Functionen mit gemeinsamer Verschwindungsstelle auftreten, und der für den hier zu betrachtenden Fall von zwei Veränderlichen folgendermassen lautet:

Sind drei gewöhnliche Potenzreihen (oder auch ganze Functionen) F, Φ, Ψ von $x - x_0$, $y - y_0$ gegeben, die für $x = x_0$, $y = y_0$ so verschwinden, dass sich zwei ganze Functionen A, B von x, y bestimmen lassen, welche die Gleichung:

$$F = A\Phi + B\Psi$$

hinsichtlich der Glieder niedrigster bis zu beliebig hoher (vorgegebener) Dimension in $x - x_0$, $y - y_0$ hin erfüllen, so lassen sich die Functionen A, B in solche unendliche Reihen A', B' verwandeln, dass die Gleichung:

$$F = A'\Phi + B'\Psi$$

formal befriedigt wird hinsichtlich aller Glieder von beliebig hoher Dimension, während zugleich den Reihen A', B' ein endlicher Convergenzbereich in der Umgebung von x_0, y_0 zukommt.

Die Aufgabe, diese Reihen zu bestimmen, steht in engem Bezug zu einem bekannten Satz, den Herr Nöther im 6. Bande der Math. Ann. aufgestellt hat. Zwar fordert der von dem Urheber selbst gegebene Beweis des Satzes die Lösung jener Aufgabe nicht. Denn damit zwischen drei ganzen Functionen F, Φ, Ψ die identische Gleichung:

$$F = M\Phi + N\Psi$$

bestehe, wo M und N ganze Functionen sind, wird von Herrn Nöther *im Grunde genommen nur das Folgende verlangt:*

Für jede gemeinsame Verschwindungsstelle x_0, y_0 von Φ und Ψ muss auch F verschwinden und zwar so, dass zwei ganze Functionen A, B gefunden werden können derart, dass die Function:

$$A\Phi + B\Psi,$$

nach Dimensionen von $x - x_0$, $y - y_0$ geordnet, hinsichtlich der Glieder nullter, erster u. s. w. bis $(k-1)^{\text{ter}}$ Dimension mit denen der ebenso geordneten Function F übereinstimmt, *wo die Zahl k von dem gegenseitigen Verhalten der Functionen Φ, Ψ in der Nähe der Stelle $x_0 y_0$ abhängt, höchstens aber gleich der Vielfachheit des Factors $x - x_0$ (bezw. $y - y_0$) in der Resultante von Φ und Ψ ist**).

Auf die Beschaffenheit der Glieder höherer Ordnung in A, B recurrirt diese Forderung — die „Schnittpunktbedingung", wie ich sie kurz nennen will — nicht.

Anders aber verhält sich die von Herrn Voss (Math. Ann. Bd. 27, S. 527, § 1) gegebene modificirte Form des Nöther'schen Satzes. Sie *fordert* für jeden gemeinsamen Schnittpunkt x_0, y_0 von $F = 0$, $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ die Existenz von zwei (hinsichtlich y nur bis zu einem endlichen Grad ansteigenden) *Potenzreihen* A', B' von $x - x_0$, $y - y_0$, die in der Umgebung von x_0, y_0 die Gleichung erfüllen:

$$F = A'\Phi + A'\Psi.$$

Nun lassen sich zwar, wie Herr Nöther im 30. Bande S. 415 dieser

---

*) Den letzteren Werth nimmt k wirklich an, wenn die Curven $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ in x_0, y_0 längs eines Zweiges k consecutive Punkte gemeinsam haben. Berühren sich dagegen diese Curven nicht, haben aber in x_0, y_0 einen p-, bezw. q-fachen Punkt, so ist (Noether a. a. O.; Voss, Math. Ann. Bd. 27, S. 532) k nicht $= pq$, sondern bloss $= p + q - 1$, und jene Forderung bestimmt nur die Glieder von der nullten bis zur $(q-2)^{\text{ten}}$ Dimension (incl.) in A, die bis zur $(p-2)^{\text{ten}}$ in B.

Annalen gezeigt hat, solche Reihen A', B' formal wirklich herstellen, wenn die (Nöther'sche) Schnittpunktbedingung in x_0, y_0 erfüllt ist — freilich auf beschwerlichem Weg, indem die verlangte Eindeutigkeit ein abwechselndes Vergleichen von Gliedergruppen gleicher Dimension und von solchen gleich hoher Potenzen von $x - x_0$ nöthig macht. Auch würde die Kürze des Voss'schen Beweises diesem einen Vorzug sichern. Aber die später erforderlichen Operationen an den Potenzreihen sind an die Existenz eines gemeinsamen Convergenzbereiches für sie in der Umgebung von x_0, y_0 gebunden, wie er zwar vermuthet werden muss, aber in expliciter Form meines Wissens noch nicht nachgewiesen ist.

Auch die neue Wendung, die Herr Stickelberger (Math. Ann. Bd. 30) dem Voss'schen Beweise giebt, durch welche jene Coefficientenvergleichung umgangen werden kann, setzt die Convergenz der Reihen A', B' voraus und fordert insofern gleichfalls mehr, als die Nöther'sche Schnittpunktbedingung.

Diese Lücke auszufüllen beabsichtige ich mit der nachstehenden Erörterung der eingangs bezeichneten Aufgabe. Sie knüpft an ganz elementare Betrachtungen an, die mit den bekannten Cauchy'schen Existenzbeweisen nur die Grundlagen gemeinsam haben und ist, wie ich an einer anderen Stelle zu zeigen gedenke, da sie nur rationaler Processe sich bedient, auch auf andere Fragen der beregten Art anwendbar.

§ 1 enthält zwei Hülfssätze, in den §§ 2, 3 wird die Aufgabe unter einer vereinfachenden Voraussetzung gelöst, in den §§ 4, 5 allgemein.

1.

Ich stütze mich auf den eingangs erwähnten Satz des Herrn Weierstrass, der in dem Umfang, in dem ich ihn hier verwende, lautet wie folgt:

I. Zu einer nach positiven ganzen Potenzen der Variabeln x, y fortschreitenden Potenzreihe Φ, deren Glieder niedrigster Dimension Φ_p $(p > 0)$ den von x freien Term y^p enthalten, kann man immer und nur auf eine Weise eine gewöhnliche Potenzreihe α, die für $x = 0$, $y = 0$ sich auf 1 reducirt und in der Umgebung dieser Stelle convergirt, bestimmen derart, dass das Product $\alpha\Phi$ in eine Potenzreihe φ (die „reducirte" Form) übergeht, die — abgesehen von dem Term y^p — hinsichtlich y nur bis zur Ordnung $p - 1$ ansteigt.

Ist also die Reihe gegeben:

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_{p+1} + \Phi_{p+2} + \cdots,$$

wo hier wie in der Folge der untere Index die Dimension des betreffen-

den Polynoms in x, y anzeigt, so lassen sich durch Vergleichen der Glieder der Identität:

$$\alpha \Phi = \varphi$$

immer und nur auf eine Weise zwei Reihen α, φ von der Form:

$$\alpha = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots,$$
$$\varphi = \Phi_p + x^2 \varphi_{p-1} + x^3 \varphi'_{p-1} + x^4 \varphi''_{p-1} + \cdots$$

ermitteln, die mit Φ einen Convergenzbereich in der Umgebung von von $x = 0$, $y = 0$ gemeinsam haben. — Bekanntlich giebt es dann auch einen solchen für die Reihe α', wenn

$$\Phi = \alpha' \varphi$$

gesetzt wird.

Wir bedürfen im Folgenden noch des bekannten Satzes aus der Theorie der algebraischen Functionen:

II. Sind drei ganze *homogene* Functionen von zwei Veränderlichen gegeben: Φ_p, Ψ_q, F_{p+q-1}, so lassen sich immer und nur auf eine Weise zwei ganze Functionen A_{q-1}, B_{p-1} bestimmen, so dass identisch

$$F_{p+q-1} = \frac{A_{q-1}}{R} \Phi_p + \frac{B_{p-1}}{R} \Psi_q$$

wird, wo R die Resultante aus Φ_p, Ψ_q ist, die Coefficienten von A und B ganze Functionen der Coefficienten von F_{p+q-1}, Φ_p, Ψ_q sind. Und zwar sind sie hinsichtlich derer von F linear und homogen, also jeder Coefficient der Functionen A, B in der Form darstellbar:

$$R_{1k} F^{(1)} + R_{2k} F^{(2)} + \cdots + R_{p+q,k} F^{(p+q)},$$

wo die $F^{(i)}$ die Coefficienten in F_{p+q-1} sind, die R_{ik} Unterdeterminanten der als $(p+q)$-reihige Determinante geschriebenen Resultante R von Φ_p und Ψ_q. Wenn man von den Grössen R_{ik} die absolut genommen grösste mit r bezeichnet, von den $|F^{(i)}|$ die grösste mit F, so liegt somit der absolute Werth jedes der Coefficienten a, b der Polynome A_{q-1}, B_{p-1} unterhalb des Werthes:

$$\left.\begin{matrix} |a| \\ |b| \end{matrix}\right\} < (p+q)\,|rF|.$$

2.

Die zu betrachtende gemeinsame Verschwindungsstelle der Functionen F, Φ, Ψ von x und y sei $x = 0$, $y = 0$. Wir beschränken uns fürs Erste auf die Annahme (den „einfachen Fall“), dass an der

Stelle $x = y = 0$ die p Zweige der Curve $\Phi = 0$ von den q der $\Psi = 0$ verschieden seien, dass also die Resultante aus den Gliedern niederster Dimension Φ_p und Ψ_q in den nach Dimensionen von x, y angeordneten Entwicklungen:

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_{p+1} + \Phi_{p+2} + \cdots,$$
$$\Psi = \Psi_q + \Psi_{q+1} + \Psi_{q+2} + \cdots$$

nicht verschwindet. Sei $p \geqq q$. Die Function F erfülle an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die in der Einleitung aufgestellte Schnittpunktbedingung, dass nämlich die Anfangsglieder der Entwicklung:

$$F = F_q + F_{q+1} + F_{q+2} + \cdots$$

bis zur $(p + q - 2)^{\text{ten}}$ Dimension (incl.) mit einer Function:

$$A\Phi + B\Psi$$

übereinstimmen, wenn:

$$A = A_0 + A_1 + \cdots + A_{q-2},$$
$$B = B_0 + B_1 + \cdots + B_{p-2}$$

ganze Functionen sind. — Es steht nichts im Weg, *die Functionen* F, Φ, Ψ *als Potenzreihen in* x, y aufzufassen, deren Coefficienten dem absoluten Betrag nach eine endliche Grenze nicht überschreiten. Sie besitzen dann bekanntlich in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ einen gemeinsamen Convergenzbereich.

Es sind nun zwei *Potenzreihen* A' B' so zu bestimmen, dass in der Umgebung jener Stelle die identische Gleichung:

$$F = A'\Phi + B'\Psi$$

besteht, oder auch, wenn das Polynom (die Reihe)

$$A\Phi + B\Psi = F'$$

gesetzt wird, und also:

$$F - F' = \mathsf{F} = \mathsf{F}_{p+q-1} + \mathsf{F}_{p+q} + \mathsf{F}_{p+q+1} + \cdots$$

wird, dass zwei Reihen A, B gefunden werden können, die in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ der Gleichung genügen:

$$\mathsf{F} = \mathsf{A}\Phi + \mathsf{B}\Psi.$$

Zu dem Zwecke bestimme man zunächst drei Potenzreihen α, β, γ (mit dem Anfangsgliede 1) so, dass die Producte $\alpha\mathsf{F}$, $\beta\Phi$, $\gamma\Psi$ die „reducirte" Form (§ 1) annehmen:

$$\alpha \mathrm{F} = f = \mathrm{F}_{p+q-1} + x^2 f'_{p+q-2} + x^3 f''_{p+q-2} + \cdots,$$
$$\beta \Phi = \varphi = \Phi_p + x^2 \varphi'_{p-1} + x^3 \varphi''_{p-1} + \cdots,$$
$$\gamma \Psi = \psi = \Psi_q + x^2 \psi'_{q-1} + x^3 \psi''_{q-1} + \cdots.$$

Alsdann lassen sich zwei Reihen:

$$a = a'_{q-1} + x a''_{q-1} + x^2 a'''_{q-1} + \cdots,$$
$$b = b'_{p-1} + x b''_{p-1} + x^2 b'''_{p-1} + \cdots,$$

die in y bloss bis zur $(q-1)^{\text{ten}}$, bezw. $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz ansteigen, so bestimmen, dass eindeutig und Glied für Glied die Gleichung erfüllt ist:

$$f = a\varphi + b\psi.$$

Denn durch Gleichsetzen je der Glieder gleichhoher Dimension erhält man, vom untersten aufsteigend,

$$\mathrm{F}_{p+q-1} = a'_{q-1}\Phi_p + b'_{p-1}\Psi_q,$$
$$-x(a'_{q-1}\varphi'_{p-1} + b'_{p-1}\psi'_{q-1} - f'_{p+q-2}) = a''_{q-1}\Phi_p + b''_{p-1}\Psi_q,$$
$$-x(a''_{q-1}\varphi'_{p-1} + b''_{p-1}\psi'_{q-1} + a'_{q-1}\varphi''_{p-1} + b'_{p-1}\psi''_{q-1} - f''_{p+q-2})$$
$$= a'''_{q-1}\Phi_p + b'''_{p-1}\Psi_q$$

. . . .

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nach Hilfssatz II (§ 1) eindeutig der Reihe nach die Binärformen

$$a'_{q-1},\ b'_{p-1};\ a''_{q-1},\ b''_{p-1}.\ \ldots$$

Kann man für die Reihen a, b einen Convergenzbereich in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ nachweisen, wie dies in § 3 geschehen soll, so resultirt auch ein solcher für die Reihen $A'B'$, weil wegen

$$\mathrm{F} = \frac{a\beta}{\alpha}\Phi + \frac{b\gamma}{\alpha}\Psi = \mathsf{A}\Phi + \mathsf{B}\Psi$$

und

$$F = \mathrm{F} + F' = (\mathsf{A} + A)\Phi + (\mathsf{B} + B)\Psi$$
$$= A'\Phi + B'\Psi$$

die Reihen:

$$A' = A + \frac{a\beta}{\alpha},\quad B' = B + \frac{b\gamma}{\alpha}$$

denselben Convergenzbereich haben, der den Reihen F, Φ, Ψ, a, b, $\frac{1}{\alpha}$, β, γ gemeinsam ist, und der nach den getroffenen Bestimmungen für jede von ihnen um $x=0$, $y=0$ herum von endlicher Ausdehnung ist.

3.

Um nunmehr einen Convergenzbereich für die Reihen a, b zu finden, transformire man (sofern dies nöthig ist), damit die Coefficienten der Reihen f, φ, ψ sämmtlich dem absoluten Betrage nach eine endliche Grösse nicht überschreiten, bevor man die Relation ansetzt:

$$f = a\varphi + b\psi,$$

f, φ, ψ durch die Gleichungen:

$$x = \varrho x', \quad y = \varrho y',$$

wo ϱ kleiner als der kleinste Radius des um den Punkt 0, 0 gelegenen den drei Reihen gemeinschaftlichen Convergenzbereichs ist. Die transformirten Reihen haben dann die gewünschte Eigenschaft, und durch Division jener Relation mit einer endlichen Constanten lassen sich die Coefficienten der drei Reihen weiterhin noch dem absoluten Betrage nach auf oder unter die Grösse 1 herabdrücken.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen auch für die transformirte Gleichung und deren Coefficienten recurrire ich nun auf diejenigen Formeln des § 2, aus denen sich die einzelnen Glieder a', b', a'', b'', ... der Reihen a, b bestimmen.

Sie sind von der Form:

$$G^{(\nu)}_{p+q-1} = a^{(\nu)}_{q-1}\Phi_p + b^{(\nu)}_{p-1}\Psi_q \tag{1}$$

wo:

$$G^{(\nu)}_{p+q-1} = -x\left(a^{(\nu-1)}_{q-1}\varphi'_{p-1} + b^{(\nu-1)}_{p-1}\psi'_{q-1} + a^{(\nu-2)}_{q-1}\varphi''_{p-1} + b^{(\nu-2)}_{p-1}\psi''_{q-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + a'_{q-1}\varphi^{(\nu-1)} + b'_{p-1}\psi^{(\nu-1)}_{q-1} - f^{(\nu-1)}_{p+q-2}\right)$$

ist.

Nach § 1, a. E. liegen die absoluten Werthe der Coefficienten der Binärformen $a^{(\nu)}_{q-1}$, $b^{(\nu)}_{p-1}$ unterhalb der Grösse:

$$\left.\begin{matrix}|a^{(\nu)}|\\|b^{(\nu)}|\end{matrix}\right\} < (p+q)\frac{|rG^{(\nu)}|}{|R|},$$

wo r, R die frühere Bedeutung (§ 1) haben, $G^{(\nu)}$ der dem absoluten Betrag nach grösste der Coefficienten in $G^{(\nu)}_{p+q-1}$ ist. Setzt man zur Abkürzung

$$(p+q)\frac{|r|}{|R|} = \frac{1}{2}\varrho,$$

so ist auch

$$\left.\begin{array}{l}|a^{(\nu)}| \\ |b^{(\nu)}|\end{array}\right\} < \frac{1}{2}\varrho\,|G^{(\nu)}|.$$

Sei $\overline{G}^{(\nu)}_{p+q-1}$ das Polynom $G^{(\nu)}_{p+q-1}$, geschrieben in den absoluten Beträgen der Coefficienten der Einzelfactoren statt in diesen selbst. Dann wird der Werth des Coefficienten $|G^{(\nu)}|$ noch weiter erhöht, wenn man:

1. Statt $G^{(\nu)}_{p+q-1} \ldots \overline{G}^{(\nu)}_{p+q-1}$ einführt.

2. Die Coefficienten der Polynome $f^{(\nu-1)}_{p+q-2}$, $\varphi', \ldots, \varphi^{(\nu-1)}$, $\psi', \ldots, \psi^{(\nu-1)}$ durch 1 ersetzt.

3. Statt der Coefficienten in a'_{q-1}, b'_{p-1}; ...; $a^{(\nu-1)}_{q-1}$, $b^{(\nu-1)}_{p-1}$ jedem oberen Index (i) entsprechend einen anderen noch näher festzustellenden höheren Werth $\frac{1}{2}\lambda^{(i)}$ einträgt.

4. Statt des Factors $x \ldots (x+y)$ setzt.

So erhält man die Ungleichung:

$$\overline{G}^{(\nu)} < (x+y)^{p+q-1}(\lambda^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu-2)} + \cdots + \lambda' + 1),$$

wo sich das Zeichen $<$ auf die *Coefficienten* bezieht; und weiter wird:

$$\left.\begin{array}{l}|a^{(\nu)}| \\ |b^{(\nu)}|\end{array}\right\} < \frac{1}{2}\varrho(\lambda^{(\nu-1)} + \lambda^{(\nu-2)} + \cdots + \lambda' + 1).$$

Fixirt man den noch unbestimmt gelassenen höheren Werth $\frac{1}{2}\lambda^{(i)}$ für die Coefficienten in

$$a^{(i)}_{q-1},\; b^{(i)}_{p-1} \quad (i < \nu)$$

vermöge der *Gleichung:*

$$\frac{1}{2}\lambda^{(i)} = \frac{1}{2}\varrho(\lambda^{(i-1)} + \lambda^{(i-2)} + \cdots + \lambda' + 1),$$

so wird, weil sich hieraus sofort

$$\lambda^{(i)} = \varrho(1+\varrho)^{i-1}$$

ergiebt, auch

$$\left.\begin{array}{l}|a^{(\nu)}| \\ |b^{(\nu)}|\end{array}\right\} < \frac{1}{2}\varrho(1+\varrho)^{\nu-1}.$$

Die Reihen a, b convergiren also für solche absolute Beträge der Veränderlichen x, die der Ungleichung genügen:

$$|x| \leqq \frac{1}{1+\varrho}.$$

Hieraus folgt zunächst die Existenz eines Convergenzbereiches für die *rücktransformirten* Reihen a, b und wegen § 2, a. E., auch die eines solchen für die Reihen $A'B'$ in

$$F = A'\Phi + B'\Psi.$$

4.

Es bleibt noch übrig, den bewiesenen Satz auf den Fall auszudehnen, dass die Functionen Φ, Ψ in dem betrachteten Nullpunkt ein *beliebiges* gegenseitiges Verhalten zeigen.

Wenn Φ, Ψ endliche Polynome sind, so kann man an das von Herrn Nöther im 30. Bd. der Math. Ann. gegebene Verfahren anknüpfen, nach welchem der allgemeine Fall mit Hilfe des Ausdrucks, den man der Resultante von Φ, Ψ als linearer Function dieser Grösse geben kann, auf den „einfachen Fall" der §§ 2, 3 zurückkommt. Wenn aber, wie wir dies hier voraussetzen, an die Stelle der ganzen Functionen Φ, Ψ auch *unendliche Potenzreihen von zwei Veränderlichen* treten können, so steht man vor der Frage, ob für solche überhaupt *ein Analogon zu dem Resultantenbegriff* existirt.

Es seien Φ, Ψ Reihen, die nach Potenzen von x, y aufsteigen mit gemeinsamem Convergenzbereich um die Stelle $x = 0$, $y = 0$, die für einen unbestimmten Werth von x theilerfremd sind (eine Forderung, die sogleich erläutert werden wird), und für welche die Anfangsglieder Φ_p, Ψ_q (p^{ter} bezw. q^{ter} Dimension) so beschaffen sind, dass sie für $x = 0$ nicht verschwinden.*)

Man bringe nun zunächst die Reihen Φ, Ψ durch Multiplication mit den Reihen α, β (§ 1), die mit 1 beginnen, in die „reducirte Form" φ, ψ:

$$\begin{aligned}\alpha\Phi = \varphi &= \varphi_p + x^2\varphi_{p-1} + x^3\varphi'_{p-1} + \cdots \\ &= y^p + y^{p-1}x\,\mathfrak{P}(x) + \cdots + x^p\,\mathfrak{P}^{(p-1)}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\Psi = \psi &= \psi_q + x^2\psi_{q-1} + x^3\psi'_{q-1} + \cdots \\ &= y^q + y^{q-1}x\,\mathfrak{Q}(x) + \cdots + x^q\,\mathfrak{Q}^{(q-1)}(x),\end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ in der Nähe von $x = 0$ convergirende gewöhnliche Potenzreihen in x sind.

Wenn nun die Functionen φ, ψ, die hinsichtlich y bis zu einem endlichen Grad ansteigen, eine nicht identisch verschwindende Resultante R haben — vorhin wurden deshalb auch die nicht reducirten

*) Diese Forderung implicirt unter Umständen die Einführung einer neuen Veränderlichen statt x:

$$x' = ay + x.$$

Functionen Φ, Ψ „theilerfremd“ genannt — so existiren bekanntlich zwei solche ganze Functionen c, d vom Grad $q-1$ bezw. $p-1$ in y, dass

$$(1) \qquad R = c\varphi + d\psi$$

eine identische Gleichung ist. R, c, d sind als ganze Functionen von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ convergente Reihen in x. Daraus folgt weiter

$$(1a) \qquad R = C\Phi + D\Psi$$

wo

$$(1b) \qquad C = \frac{c}{\alpha}; \quad D = \frac{d}{\beta}$$

wieder gewöhnliche Potenzreihen in x, y sind, R eine solche von x allein.

Die so definirte Reihe R ist nun ihrer Entstehung nach und wegen der Gleichung (1), der sie genügt, *als Resultante der unendlichen Potenzreihen* Φ, Ψ *in der Umgebung von* $x=0$, $y=0$ *anzusprechen.*

5.

Ich wende mich jetzt der im Eingang formulirten allgemeinen Aufgabe zu: zwei Potenzreihen a, b anzugeben, welche die Gleichung:

$$F = a\Phi + b\Psi$$

Glied für Glied zu einer identischen machen unter der Voraussetzung, dass die „Schnittpunktbedingung“ erfüllt ist, dass also ein Paar von ganzen Functionen A, B existirt derart, dass die Glieder niedrigster bis aufwärts zu denen $(k-1)^{\text{ter}}$ Dimension in

$$A\Phi + B\Psi$$

mit denen der ebenso geordneten Function F übereinstimmen, wenn x^k das Anfangsglied der in § 4 als Resultante definirten Reihe R ist.

Giebt man dieser Annahme die Form:

$$F \equiv A\Phi + B\Psi,$$

was also bedeuten soll, dass die Gleichung richtig ist bis zu den Gliedern einer endlichen, hier der $(k-1)^{\text{ten}}$, Dimension hin, so wird sie, wenn man beiderseits mit der oben (§ 4) definirten Function C multiplicirt, die mit Gliedern $(q-1)^{\text{ter}}$ Dimension von x, y beginnt, richtig bleiben bis zu den Gliedern $(k+q-2)^{\text{ter}}$ Dimension (incl.). In diesem Umfang besteht also die Beziehung:

$$(2)\qquad \begin{aligned} CF &\equiv AC\Phi + BC\Psi \\ &\equiv A(R - D\Psi) + BC\Psi \\ &\equiv AR + (BC - AD)\Psi. \end{aligned}$$

Die Reihen R und Ψ, von denen die erste mit x^k beginnt, die andere das Anfangsglied Ψ_q hat, das nach Annahme für $x = 0$ nicht verschwindet, erfüllen die im Anfang des § 2 gemachte Voraussetzung, und weil CF auch der Schnittpunktbedingung gegenüber R und Ψ genügt, indem CF in $q + k - 2$ Gliedern mit dem Ausdruck rechts in (2) übereinstimmt, so lassen sich nach Massgabe jenes Verfahrens zwei convergente Reihen A', B' angeben derart, dass

$$CF = A'R + B'\Psi$$

befriedigt wird. Schreibt man statt dessen

$$\begin{aligned} CF &= A'(C\Phi + D\Psi) + B'\Psi \\ &= A'C\Phi + (B' + A'D)\Psi, \end{aligned}$$

so besteht also in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ die Gleichung:

$$F = A'\Phi + \frac{B' + A'D}{C}\Psi.$$

Man kann dem letzten Glied derselben (§ 4, 1 b) die Form geben:

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{B' + A'D}{c}\,\psi,$$

wo $\frac{\alpha}{\beta}$ als gewöhnliche Potenzreihe darstellbar ist. Die Functionen q^{ten} und $(q-1)^{\text{ten}}$ Grades ψ und c können nur einen Theiler gemeinsam haben, der, wegen § 4, (1), auch solcher von R, also eine Function von x allein ist, eine Function, die aber jedenfalls durch x selbst nicht theilbar sein kann, weil ψ dies nicht ist. — Der reciproke Werth derselben ist eine gewöhnliche Potenzreihe. Führt man nun — eventuell nach vorgängiger Transformation mittelst $x' = x + ay$ — die drei Reihen $B' + A'D = \Pi$, Ψ und C durch Multiplication mit je einer Reihe, deren reciproker Werth eine gewöhnliche Potenzreihe ist, in die reducirten Formen bezw. π, ψ, c über, so werden in dem angedeuteten Sinne ψ und c theilerfremd sein. Weil aber die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit von:

$$F - A'\Phi = \frac{B' + A'D}{C}\Psi$$

durch eine in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ giltige Potenzreihe

nach Herrn Weierstrass (Abhandl. Seite 118) die ist, dass die reducirte Form des Nenners in der des Zählers, hier also dem Product $\psi\pi$ enthalten ist, so muss c in π enthalten sein. Hieraus folgt, dass sich:

$$b = \frac{B' + A'D}{C}$$

in eine gewöhnliche Potenzreihe entwickeln lassen muss.

Es existiren also in allen Fällen zwei in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ *convergente Potenzreihen:*

$$a = A',$$

$$b = \frac{B' + A'D}{C},$$

welche die Gleichung:

$$F = a\Phi + b\Psi$$

erfüllen, sofern die Reihen F, Φ, Ψ *nur selbst einen um jene Stelle gelegenen Convergenzbereich gemeinsam haben, und die Anfangsglieder der Entwicklungen von* F, Φ, Ψ *nach* x, y *die in der Einleitung definirte Schnittpunktbedingung erfüllen.*

Sind insbesondere F, Φ, Ψ abbrechende Potenzreihen, oder steigen sie hinsichtlich y nur bis zu endlichen Graden an: Ψ bis zum n^{ten} (sowohl allgemein wie auch für $x = 0$), Φ bis zum m^{ten} Grad, erfüllen sie ferner die Schnittpunktbedingung in $x = 0$, $y = 0$, so kann man der im Vorstehenden nachgewiesenen Identität, die in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ besteht:

$$F = a\Phi + b\Psi$$

die Form:

$$F = \Phi(a - \lambda\Psi) + \Psi(b + \lambda\Phi)$$

geben, und die Grösse λ sowie eine andere a' als convergente Potenzreihen von x, y aus der Gleichung:

$$a = \lambda\Psi + a'$$

so bestimmen, dass a' hinsichtlich y nur bis höchstens zum $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ansteigt (Stickelberger, Math. Annalen Bd. 30, S. 404). Dann muss, wenn y in F nur bis zum Grad $n + m - 1$ vorkommt, — nach der früheren Schlussweise — auch die Reihe:

$$b + \lambda\Phi = b'$$

convergiren, und weil sie y nur im Grad $m - 1$ enthalten kann, so ist damit die Function F auf die in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $y = 0$ von Herrn Voss als möglich angenommene Form:

$$F = a'\Phi + b'\Psi$$

gebracht.

Tübingen, 8. Juni 1891.

Sur les formes quadratiques à indéterminées conjuguées.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein).

Par

Emile Picard à Paris.

Le très intéressant article que M. Bianchi vient de publier dans les Mathematische Annalen me remet en mémoire le point de vue auquel je me suis placé autrefois dans l'étude des transformations employées par M. Poincaré pour les points de l'espace situés du même côté d'un plan. Dans un petit travail inséré au bulletin de la Société Mathématique (*Mars*, 1884) et intitulé: *Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan*, j'ai considéré la forme quadratique à indéterminées conjuguées X, Y, X_0, Y_0

$$(1) \qquad XX_0 + xXY_0 + x_0X_0Y + (xx_0 + y^2)YY_0$$

x représentant une quantité complexe arbitraire, et y une quantité réelle positive.

Effectuons sur cette forme la substitution

$$(X,\ Y,\ dX + bY,\ cX + aY) \qquad [ad - bc = 1]$$

où a, b, c, d sont des quantités complexes. Cette substitution transforme la forme (1) en la suivante

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B_0'X_0Y + C'YY_0$$

en posant

$$\begin{aligned} A' &= cc_0\,(xx_0 + y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0, \\ B' &= ca_0\,(xx_0 + y^2) + a_0dx + cb_0x_0 + db_0, \\ C' &= aa_0(xx_0 + y^2) + ba_0x + b_0ax_0 + bb_0. \end{aligned}$$

On est ainsi conduit à une transformation relative à la variable complexe x et à la somme $xx_0 + y^2$, substitution qui peut s'écrire

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{ca_0(xx_0+y^2) + a_0dx + cb_0x_0 + db_0}{cc_0(xx_0+y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0}, \\[2ex] x'x_0' + y^2 = \dfrac{aa_0(xx_0+y^2) + ba_0x + b_0ax_0 + bb_0}{cc_0(xx_0+y^2) + dc_0x + d_0cx_0 + dd_0}. \end{cases}$$

A un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y correspond par ces formules un système parfaitement déterminé de x' et y' (y' étant positive comme y). Ce mode de transformation forme d'ailleurs évidemment un groupe.

On peut donner une forme, géométrique à ce résultat. Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ un système d'axes de coordonnées rectangulaires et considérons le demi-espace situé au dessus du plan des $\xi\eta$; à chaque point (ξ, η, ζ) correspond un système de valeurs de la quantité complexe x et de la quantité positive y, si l'on pose

$$x = \xi + i\eta, \quad y = \zeta$$

On est ainsi conduit, par des considérations algébriques, au mode de transformation des figures dans un demi espace, dont M. Poincaré a fait usage dans son mémoire sur les groupes kleinéens et auquel il a été amené par des considérations géométriques.

J'ai considéré particulièrement, dans le travail cité, le cas où a, b, c, d sont des entiers complexes. Les substitutions (S) forment alors un groupe discontinu. Pour trouver son *polyèdre fondamental,* il suffit de faire usage du théorème de M. Hermite relatif à la réduction des formes quadratiques binaires *définies* à indéterminées conjuguées. Etant donnée une telle forme

$$AXX_0 + BXY_0 + B_0X_0Y + CYY_0$$
$$(BB_0 - AC < 0, \ A > 0, \ C > 0)$$

dont les coefficients sont quelconques, on peut trouver une substitution, de déterminant *un*, à coefficients entiers complexes, telle que dans la forme transformée

$$A'XX_0 + B'XY_0 + B_0'X_0Y + C'YY_0$$

on ait

$$A' \leq C', \quad -A' \leq 2m' \leq A', \quad -A' \leq 2n' \leq A'$$

en posant

$$B' = m' + n'i.$$

Cette Substitution sera, en général, unique.

Ceci rappelé, soit (x, y) un système de valeurs correspondant à un point arbitraire du demi espace, et prenons la forme (1) correspondante. La réduction de cette forme d'après le théorème précédent, transformera (x, y) en (x', y') par la substitution (S); la partie réelle et le coefficient de i dans x' seront compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ et l'on aura en outre

$$x'x_0' + y'^2 \geq 1.$$

Si l'on revient au point (ξ, η, ζ) et à son transformé (ξ', η', ζ'), on aura

$$-\tfrac{1}{2} \leq \xi' \leq \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leq \eta' \leq \tfrac{1}{2}, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 \geq 1.$$

Nous arrivons donc ainsi au *polyèdre fondamental* du groupe. Il est limité par les quatre plans

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \xi = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2},$$

et est extérieur à la sphère de rayon *un*. Il y a dans ce polyèdre *un seul point* correspondant à un point pris arbitrairement dans le demi espace. Ce résultat est bien d'accord avec le théorème démontré par l'éminent géomètre italien. Ce polyèdre fondamental est entièrement analogue au triangle fondamental dans le demi plan, qui joue un rôle si important dans vos admirables recherches sur les fonctions modulaires.

Paris, le 15. Mai 1891.

Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen.

Abhandlung 1.

Von

L. Kiepert in Hannover.

Bei meinen langjährigen Arbeiten über die Transformation der elliptischen Functionen*) hatte ich ganz besonders den Zweck im Auge, die Herleitung der algebraischen Beziehungen, welche bei der complexen Multiplication auftreten, einfacher und übersichtlicher zu gestalten.

Dass meine Untersuchungen in dieser Hinsicht wirklich mit Nutzen verwendbar sind, hat schon Herr Greenhill in seinen Arbeiten**) durch zahlreiche Beispiele gezeigt. Leider konnte er meine letzten Abhandlungen (Band 32 und 37) noch nicht bei seinen Berechnungen benutzen; es wird sich aber in dem zweiten und in den späteren Theilen der hier folgenden Arbeit zeigen, dass gerade meine neueren Untersuchungen über die Transformation die werthvollsten Hülfsmittel für die Ausführung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen bieten.

Auch die Abhandlung von Herrn H. Weber: „Zur Theorie der elliptischen Functionen (2. Abh.)***) folgte meiner Arbeit in Band 32 so schnell, dass sich Herr Weber nur auf meine Multiplicatorgleichungen (L-Gleichungen) beziehen konnte, von denen er nicht ganz mit Unrecht behauptet, dass sie für die Berechnung der singulären Moduln weniger geeignet seien als die von ihm selbst verwendeten *„Schläfli'schen Modulargleichungen"*. In der vorliegenden Abhandlung will ich aber den Nachweis führen, dass die L-Gleichung für die Be-

---

*) Journal für Mathematik, Band 87, S. 199—216, Band 88, S. 205—212 und Band 95, S. 218—231; ferner Math. Annalen, Band 26, S. 369—454, Band 32, S. 1—135 und Band 37, S. 368—398.

Da die drei letzten Arbeiten in dem Folgenden öfters zu erwähnen sind, so sollen sie der Kürze wegen nur durch die Worte: Band 26, bezw. Band 32 und Band 37 citirt werden.

**) Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XIX, S. 301—364, Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Nr. 86, 1887, S. 119—174, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. XXI, S. 403—422.

***) Acta mathematica, Band 11, S. 333—390. Man vergl. auch das nach Abfassung der vorliegenden Abhandlung von Herrn Weber herausgegebene Werk: „Elliptische Functionen" Braunschweig 1891.

rechnung der singulären Invarianten, bei denen complexe Multiplication stattfindet, doch in weiterem Umfange mit Vortheil verwendet werden kann, als es Herr Weber bemerkt hat. Auch bildete meine Theorie der *L-Gleichungen* (in Band 26) nur die Vorstufe zur Theorie der *Parametergleichungen* (in Band 32), und diese enthalten, wie ich in Band 37 gezeigt habe, auch die *Schläfli'schen Modulargleichungen* als besonderen Fall. Ebenso habe ich einen Fall der *irrationalen Modulargleichungen* schon *vor* Herrn Weber ausgeführt, indem ich (Band 32, S. 93—98) die Transformation 11ten Grades aus der vom Grade 22 herleitete. Die eingehendere Behandlung der irrationalen Modulargleichungen durch Herrn Weber giebt mir die erwünschte Anregung, auf diesen Gegenstand später noch zurückzukommen und die von Herrn Weber angegebene Methode zur Aufstellung irrationaler Modulargleichungen wesentlich zu verallgemeinern.*)

Es soll hierdurch nur hervorgehoben werden, dass meine Bestrebungen mit denen des Herrn Weber in bestem Einklange stehen; namentlich stimme ich ihm darin bei, dass es vortheilhaft ist, die singulären *Invarianten* zu berechnen, während man bisher meist die singulären *Moduln* berechnet hat.**) Diese Ansicht habe ich bereits in einem Vortrage vertreten, den ich im Jahre 1881 auf der Naturforscher-Versammlung in *Salzburg* über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen gehalten und in den Sitzungsberichten (Seite [21] bis [28]) veröffentlicht habe. Die hier folgende Abhandlung 1 umfasst, abgesehen von einigen Beispielen, die ich später hinzugefügt habe, im Wesentlichen den Inhalt jenes Vortrages.

In den folgenden Abhandlungen sollen dann auch die Methoden des Herrn Weber berücksichtigt werden, nach welchen er aus den Hermite'schen Functionen $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ drei Hülfsgrössen $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ durch die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} f(\omega) = \dfrac{\sqrt[6]{2}}{\chi(\omega)} = \dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{k k'}}, \\[2ex] f_1(\omega) = \dfrac{\sqrt[6]{2}\,\psi(\omega)}{\chi(\omega)} = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\dfrac{k'^2}{k}}, \\[2ex] f_2(\omega) = \dfrac{\sqrt[6]{2}\,\varphi(\omega)}{\chi(\omega)} = \sqrt[6]{2}\sqrt[12]{\dfrac{k^2}{k'}} \end{cases}$$

---

*) Man vergleiche auch die Abhandlung von Herrn Klein: „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen" (Math. Annalen, Bd. XVII, S. 62—70), in welcher der Begriff der irrationalen Modulargleichungen ganz allgemein erläutert wird.

**) In den Abhandlungen von Herrn Pick; „Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen" (Math. Annalen, Bd. XXV, S. 433—447 und Bd. XXVI, S. 219—230) werden gleichfalls die singulären Invarianten in Betracht gezogen.

ableitet und zur Berechnung der singulären Invarianten benutzt. Von constanten Factoren abgesehen, sind aber diese drei Hülfsgrössen den Wurzeln der L-Gleichung für die Transformation zweiten Grades gleich, denn es ist

$$(2)\qquad f(\omega) = e^{\frac{\pi i}{8}} \cdot L_1(2),\quad f_1(\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}} \cdot L_0(2),\quad f_2(\omega) = L_\infty(2),$$

und diese drei Grössen $L_\infty(2)$, $L_0(2)$, $L_1(2)$ genügen der Gleichung

$$(3)\qquad L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0.$$

Mit dem gleichen Rechte kann man auch die Hülfsgrössen $L(3)$, $L(4)$, $L(5)$, ... einführen; ob auch mit dem gleichen Nutzen, hängt natürlich von dem Grade der Transformation ab, mit welchem die complexe Multiplication in jedem besonderen Falle in Zusammenhang gebracht wird.

Man kann sogar noch weiter gehen und irgend einen *Parameter* in gleicher Weise als Hülfsgrösse einführen wie vorher die Grössen $L(2)$, $L(3)$, $L(4)$ u. s. w. Ist z. B. der Charakter eines solchen Parameters gleich 1, so ist die Invariante J eine *rationale* Function dieses Parameters. Kennt man also den singulären Werth des Parameters, so ist damit auch der singuläre Werth der Invariante J selbst bekannt.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen.

§ 1.

Begriff der complexen Multiplication.

Bei der *ganzzahligen* Multiplication der elliptischen Functionen handelt es sich bekanntlich darum, die elliptische Function $\sin^2 \mathrm{am}(mu, k)$ als rationale Function von $\sin^2 \mathrm{am}(u, k)$ darzustellen, wobei m eine *ganze* rationale Zahl ist, oder wenn man sich der Bezeichnungen des Herrn Weierstrass bedient, so handelt es sich darum, die elliptische Function $\wp(mu, g_2, g_3)$ als rationale Function von $\wp(u, g_2, g_3)$ darzustellen, was durch die Gleichung

$$(4)\qquad \wp(mu, g_2, g_3) = R[\wp(u, g_2, g_3)]$$

angedeutet werden möge.

Es ist nun die Frage, unter welchen Bedingungen ist eine solche Darstellung noch möglich, wenn *m nicht mehr eine ganze rationale* Zahl ist?

Die Antwort ergiebt sich unmittelbar aus der folgenden Betrachtung.

Bezeichnet man ein primitives Periodenpaar von $\wp(u, g_2, g_3)$ mit 2ω, $2\omega'$, so folgt aus der Gleichung (4), dass auch $2m\omega$ und $2m\omega'$

Perioden von $\wp(u, g_2, g_3)$ sein müssen, d. h. es muss, da es auf das Vorzeichen von m dabei nicht ankommt,

$$(5) \qquad \begin{cases} -m\omega = p'\omega + q'\omega', \\ -m\omega' = p''\omega + q''\omega' \end{cases}$$

sein, wobei p', q', p'', q'' positive oder negative ganze Zahlen sind. Setzt man nun noch

$$(6) \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \tau,$$

so folgt hieraus die Gleichung

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{p''\omega + q''\omega'}{p'\omega + q'\omega'}, \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{p'' + q''\tau}{p' + q'\tau},$$

also

$$(7) \qquad q'\tau^2 + (p' - q'')\tau - p'' = 0.$$

Dabei müssen die Wurzeln dieser ganzzahligen Gleichung complex sein, d. h. es muss

$$(8) \qquad (p' - q'')^2 + 4p''q' = (p' + q'')^2 - 4(p'q'' - p''q')$$

negativ sein, damit die elliptische Function $\wp(u, g_2, g_3)$ doppelt-periodisch ist. Der Multiplicator

$$(9) \qquad m = -(p' + q'\tau) = -\frac{p'' + q''\tau}{\tau}$$

wird, wenn q' gleich 0 ist, eine *ganze* Zahl, so dass in diesem Falle nur *ganzzahlige* Multiplication stattfindet. Ist aber q' von 0 verschieden, so ist auch der Multiplicator m eine *complexe* Zahl, wodurch die Bezeichnung *„complexe Multiplication der elliptischen Functionen"* gerechtfertigt wird.

Möglicher Weise haben die Coefficienten in Gleichung (7) noch einen gemeinsamen Factor f, so dass also

$$(10) \qquad q' = f.A, \quad p' - q'' = f.B, \quad -p'' = f.C$$

wird, dann kann man die Gleichung (7) auf die Form

$$(11) \qquad A\tau^2 + B\tau + C = 0$$

bringen, wo die drei Coefficienten A, B, C keinen Factor mehr gemein haben, und wo die Determinante

$$(12) \qquad D = B^2 - 4AC < 0$$

ist.

Man kann auch umgekehrt von der Gleichung (11) ausgehen, indem man für A, B, C drei beliebige ganze Zahlen ohne gemeinsamen Factor wählt, so dass sie der Ungleichung (12) genügen. Hierbei hat der Fall, wo B eine *ungerade* Zahl ist, dasselbe Interesse wie der Fall, wo B eine *gerade* Zahl ist. Um beide Fälle gleichzeitig zu berücksichtigen, werde die Zahl ε eingeführt, die gleich 0 sein möge, wenn B *gerade*, und die gleich 1 sein möge, wenn B *ungerade* ist, also

$$(13)\quad \begin{cases} \varepsilon = 0 \text{ oder } 1, \text{ jenachdem } B \text{ gerade oder ungerade,} \\ D = B^2 - 4AC = -(4\mathfrak{n} - \varepsilon). \end{cases}$$

Ferner sei

$$(14)\quad \mu = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{4\mathfrak{n} - \varepsilon}}{2},$$

dann wird

$$(15)\quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{-B + \varepsilon + 2\mu}{2A},$$

$$(16)\quad m = -p' - q'\tau = -p' + \frac{B - \varepsilon}{2} f - f\mu,$$

oder, wenn man die ganze Zahl $p' - \frac{B-\varepsilon}{2} f$ mit g bezeichnet,

$$(16a)\quad m = -g - f\mu.$$

Dabei sind f und g noch ganz beliebige, von A, B, C unabhängige ganze Zahlen. Aus diesen 5 beliebigen ganzen Zahlen findet man dann die ganzen Zahlen p', q', p'', q'' durch die Gleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} p' = g + \frac{B-\varepsilon}{2} f, & q' = Af, \\ p'' = -Cf, & q'' = g - \frac{B+\varepsilon}{2} f. \end{cases}$$

Man darf hierbei die Voraussetzung machen, dass p' und q' keinen gemeinsamen Factor α haben, denn wäre

$$p' = \alpha p_1' \quad q' = \alpha q_1',$$

so wäre α auch ein ganzzahliger Factor von m, weil nach Gleichung (16)

$$m = -p' - q'\tau = -\alpha(p_1' + q_1'\tau) = \alpha m_1$$

sein würde. Man könnte daher durch ganzzahlige Multiplication mit dem Factor α zunächst $\wp(\alpha m_1 u, g_2, g_3)$ rational durch $\wp(m_1 u, g_2, g_3)$ darstellen und hätte dann nur noch die complexe Multiplication mit dem Multiplicator m_1 durchzuführen, für welchen die Voraussetzung, dass p_1' und q_1' theilerfremd sind, zutrifft.

Ebenso darf man die Voraussetzung machen, dass q' und q'' theilerfremd sind. Es wird nämlich nach den Gleichungen (10)

$$m = -(p' + q'\tau) = -(q'' + Bf + q'\tau) = -(q'' + q'\tau_1),$$

wobei

$$\tau_1 = \frac{Bf}{q'} + \tau = \frac{B}{A} + \tau = \frac{B + \varepsilon + 2\mu}{2A},$$

so dass τ_1 der Gleichung

$$(18)\quad A\tau_1^2 - B\tau_1 + C = 0$$

genügt. Wäre also

$$q' = \beta q_1', \quad q'' = \beta q_1'',$$

so wäre

$$m = -(q'' + q'\tau_1) = -\beta(q_1'' + q_1'\tau_1) = \beta m_1.$$

Man würde also auch in diesem Falle die *ganzzahlige* Multiplication mit dem Factor β und dann nur noch die *complexe* Multiplication mit dem Multiplicator $m_1 = -(q_1'' + q_1'\tau_1)$ auszuführen haben, wobei man die Zahlen q_1' und q_1'' als theilerfremd voraussetzen darf.

Dabei sind, wie in § 3 gezeigt werden soll, die Werthe der absoluten Invariante J, welche τ und τ_1 entsprechen, entweder einander gleich, oder sie sind doch Wurzeln derselben Gleichung.

Bezeichnet man mit m' die zu m conjugirt complexe Grösse und mit n die Norm der beiden Zahlen m und m', dann folgt aus den Gleichungen (16), (14) und (7)

$$\left\{\begin{array}{l} m' = -q'' + q'\tau, \\ n = mm' = p'q'' - q'[(p'-q'')\tau + q'\tau^2] = p'q'' - p''q', \end{array}\right. \tag{19}$$

oder

$$n = g^2 - \varepsilon fg + f^2 \mathfrak{n}. \tag{19a}$$

§ 2.

Zurückführung der complexen Multiplication mit m auf eine Transformation vom Grade n.

Da q' nach Voraussetzung zu p' und q'' theilerfremd ist, so muss q' nach Gleichung (19) auch theilerfremd zu n sein. Es giebt also zwischen 0 und $n-1$ eine ganze Zahl r, für welche

$$q'r \equiv -q'' \pmod{n} \tag{20}$$

ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es giebt zwei ganze Zahlen q und r, für welche

$$qn + q'r + q'' = 0 \tag{20a}$$

wird. Multiplicirt man diese Gleichung mit p', und beachtet man, dass nach Gleichung (19)

$$p'q'' = n + p''q'$$

wird, so findet man

$$n(1 + p'q) + q'(p'r + p'') = 0. \tag{21}$$

Da q' theilerfremd zu n ist, so muss $p'r + p''$ durch n theilbar sein, d. h. es giebt eine ganze Zahl p, welche der Gleichung

$$pn + p'r + p'' = 0 \tag{22}$$

genügt. Nach Fortlassung des Factors $-n$ geht daher die Gleichung (21) über in

$$pq' - p'q = +1. \tag{23}$$

Dabei kann noch die Beschränkung, dass die Zahl r zwischen 0 und $n-1$ liegt, aufgehoben werden; man kann vielmehr noch ein beliebiges Vielfache von n zu r addiren.

Nach diesen Vorbereitungen kann man ohne Weiteres zeigen,

dass die complexe Multiplication mit dem Multiplicator m auf eine Transformation vom Grade n zurückgeführt werden kann. Es gilt nämlich ganz allgemein, was auch m sein mag, die Formel

$$m^2\wp(mu\,|\,\omega, \omega') = \wp\left(u\,\Big|\,\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right), \tag{24}$$

wobei man auf der rechten Seite das primitive Periodenpaar $\frac{2\omega}{m}$, $\frac{2\omega'}{m}$ noch durch ein anderes, z. B. durch

$$\frac{2p\omega}{m} + \frac{2q\omega'}{m}, \qquad \frac{2p'\omega}{m} + \frac{2q'\omega'}{m}$$

ersetzen kann. Nun ist aber nach den Bestimmungen, die hier über die Grössen $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$, p, q, p', q', m und r getroffen sind,

$$\tag{25} \begin{cases} \dfrac{2p\omega}{m} + \dfrac{2q\omega'}{m} = \dfrac{-2r(p'\omega+q'\omega')-2(p''\omega+q''\omega')}{nm} = \dfrac{2r\omega+2\omega'}{n}, \\ \dfrac{2p'\omega}{m} + \dfrac{2q'\omega'}{m} = -2\omega; \end{cases}$$

folglich geht die Gleichung (24) über in

$$m^2\wp(mu\,|\,\omega, \omega') = \wp\left(u\,\Big|\,\frac{r\omega+\omega'}{n}, -\omega\right), \tag{26}$$

wobei sich $\wp\left(u\,\Big|\,\frac{r\omega+\omega'}{n}, -\omega\right)$ durch Transformation n^{ten} Grades als rationale Function von $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$ darstellen lässt.

Man nennt daher n den *Grad der complexen Multiplication.*

§ 3.

Anzahl der singulären Invarianten, welche demselben Werthe der Determinante $D = B^2 - 4AC = -(4n-\varepsilon)$ entsprechen.

Zu jedem Werthe der negativen Determinante $B^2 - 4AC$ gehören noch *unendlich* viele Werthe von A, B, C; denn zunächst kann man den Werth von B noch ganz beliebig*) annehmen und findet dann aus der Gleichung

$$4AC = B^2 - D$$

noch eine endliche Anzahl von Werthepaaren für A und C. Deshalb ist auch die Anzahl der Werthe, welche τ haben darf, und welche derselben Determinante entsprechen, noch *unendlich* gross. Dagegen ist die Anzahl der entsprechenden Werthe des zugehörigen Moduls k^2 oder der zugehörigen absoluten Invarianten

$$\tag{27} \begin{cases} J = \gamma_2^{\,3} = \dfrac{g_2^{\,3}}{g_2^{\,3} - 27g_3^{\,2}} = \dfrac{4}{27}\cdot\dfrac{(k^4-k^2+1)^3}{k^4(1-k^2)^2}, \\ J - 1 = 27\gamma_3^{\,2} = \dfrac{27g_3^{\,2}}{g_2^{\,3} - 27g_3^{\,2}} = \dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{(-2k^6+3k^4+3k^2-2)^2}{k^4(1-k^2)^2} \end{cases}$$

*) Natürlich muss man für B eine gerade oder ungerade Zahl nehmen, jenachdem $D \equiv 0$ oder $D \equiv 1$ (mod. 4) ist.

eine beschränkte.*) Aus der Bildung der beiden Invarianten

$$g_2 = 60\,\Sigma' \frac{1}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^4}, \quad g_3 = 140\,\Sigma' \frac{1}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^6}\text{**)} \tag{29}$$

geht nämlich hervor, dass sich g_2 und g_3 gar nicht ändern, wenn man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit einem anderen

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \quad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht.

I. Ist nun B *gerade*, so setze man

$$A = a, \quad B = 2b, \quad C = c, \tag{30}$$

also

$$D = B^2 - 4AC = 4(b^2 - ac) = -4\mathfrak{n}. \tag{31}$$

Der Gleichung

$$A\omega'^2 + B\omega\omega' + C\omega^2 = 0$$

entspricht dann eine quadratische Form

$$(a, b, c) = a\omega'^2 + 2b\omega\omega' + c\omega^2 \tag{32}$$

mit der Determinante $-\mathfrak{n}$, welche durch die Vertauschung des primitiven Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ mit 2ϖ, $2\varpi'$ in eine *eigentlich äquivalente* übergeht. Zwei verschiedene Zahlsysteme

$$A = a,\ B = 2b,\ C = c \quad \text{und} \quad A_1 = a_1,\ B_1 = 2b_1,\ C_1 = c_1$$

liefern daher dieselbe absolute Invariante $J = \gamma_2^3$ (oder $J - 1 = 27\gamma_3^2$), wenn die quadratischen Formen (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1) einander eigentlich äquivalent sind.

II. Ist B *ungerade*, so setze man

$$2A = a, \quad B = b, \quad 2C = c, \tag{33}$$

also

$$D = B^2 - 4AC = b^2 - ac = -(4\mathfrak{n} - 1). \tag{34}$$

---

*) Herr **Kronecker** nennt diejenigen Werthe von k^2, für welche complexe Multiplication stattfindet, „*singulär*"; dem entsprechend sollen diejenigen Werthe von γ_2 und γ_3, für welche complexe Multiplication stattfindet, gleichfalls „*singulär*" genannt werden. Die numerische Berechnung der singulären Invarianten ergiebt sich am leichtesten aus der Entwickelung von γ_2 und γ_3 nach steigenden Potenzen von $h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$. Es wird nämlich

$$\begin{cases} 12\gamma_2 = h^{-\frac{2}{3}}(1 + 248h^2 + 4124h^4 + 34752h^6 + 213126h^8 + 1057504h^{10} + \cdots), \\ 216\gamma_3 = h^{-1}(1 - 492h^2 - 22590h^4 - 367400h^6 - 3764865h^8 - 28951452h^{10} + \cdots). \end{cases} \tag{28}$$

Da der absolute Betrag von h in den meisten Fällen sehr klein ist, so genügen fast immer die beiden ersten Glieder dieser Entwickelungen, um eine Annäherung auf mehrere Decimalstellen zu erreichen.

**) Vergl. die Formel-Sammlung von Herrn H. A. Schwarz, S. 6.

Der Gleichung

$$A\omega'^2 + B\omega\omega' + C\omega^2 = 0$$

entspricht dann wieder eine quadratische Form

$$(35)\qquad (a, b, c) = a\omega'^2 + 2b\omega\omega' + c\omega^2,$$

welche aber die Determinante $-(4n-1)$ hat und *uneigentlich primitiv* ist. Auch hier geht die quadratische Form durch eine Vertauschung des primitiven Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ mit einem anderen 2ϖ, $2\varpi'$ in eine *eigentlich äquivalente* über, so dass auch hier zwei verschiedene Zahlsysteme

$$2A = a,\ B = b,\ 2C = c \quad \text{und} \quad 2A_1 = a_1,\ B_1 = b_1,\ 2C_1 = c_1$$

dieselbe absolute Invariante $J = \gamma_2^3$ (oder $J - 1 = 27\gamma_3^2$) liefern, wenn die quadratischen Formen (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1) eigentlich äquivalent sind.

Umgekehrt: Ist

$$J(\tau) = J(\tau_1),$$

wobei τ und τ_1 durch die Gleichungen

$$(36)\qquad A\tau^2 + B\tau + C = 0 \quad \text{und} \quad A_1\tau_1^2 + B_1\tau_1 + C_1 = 0$$

gegeben sind, so kann man durch die beiden primitiven Periodenpaare

$$2\omega,\ 2\omega' = \tau \,.\, 2\omega \quad \text{und} \quad 2\omega_1,\ 2\omega_1' = \tau_1 \,.\, 2\omega_1$$

zwei elliptische Functionen

$$\wp(u\,|\,\omega, \omega') = \wp(u, g_2, g_3) \quad \text{und} \quad \wp(u\,|\,\omega_1, \omega_1') = \wp(u, g_2', g_3')$$

erklären. Da hierbei ω und ω_1 noch ganz beliebig sind, und da aus den Gleichungen (29) folgt, dass

$$g_2 \text{ in } \frac{g_2}{\alpha^4}, \qquad g_3 \text{ in } \frac{g_3}{\alpha^6}$$

übergeht, wenn man ω mit $\alpha\omega$ und deshalb ω' mit $\alpha\omega'$ vertauscht, so kann man ω und ω_1 stets so wählen, dass $g_2' = g_2$ wird. Wäre nämlich g_2' von g_2 verschieden, so müsste man ω_1 mit dem Factor

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{g_2'}{g_2}}$$

multipliciren. Aus der Gleichung

$$J(\tau) = J(\tau_1), \quad \text{oder} \quad \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2'^3}{g_2'^3 - 27g_3'^2}$$

folgt dann zunächst $g_3'^2 = g_3^2$. Da man aber noch über das Vorzeichen von α^2 verfügen kann, so kann man auch

$$g_3' = g_3$$

machen. Die beiden elliptischen Functionen $\wp(u\,|\,\omega, \omega')$ und $\wp(u\,|\,\omega_1, \omega_1')$ haben dann dieselben Invarianten g_2, g_3 und deshalb auch dieselben Perioden, d. h. es muss

$$\omega_1 = p\omega + q\omega', \quad \omega_1' = p'\omega + q'\omega'$$

sein, wobei p, q, p', q' ganze Zahlen sind und der Gleichung

$$pq' - p'q = +1$$

genügen. Die den Gleichungen (36) entsprechenden quadratischen Formen (a, b, c) und (a_1, b_1, c_1) sind daher eigentlich äquivalent, und man erhält den Satz:

Die Anzahl der von einander verschiedenen absoluten Invarianten $J = \gamma_2^3$ *(oder* $J - 1 = 27\gamma_3^2$*), die zu derselben Determinante* — n *oder* — (4n — 1) *gehören, ist genau ebenso gross wie die Classenanzahl der zugehörigen quadratischen Formen.*

Dabei sind die verschiedenen Werthe der singulären Invariante J, welche zu derselben Determinante gehören, Wurzeln einer irreduciblen Gleichung. (Vergl. die oben citirten Abhandlungen der Herrn Weber und Pick.)

Jenachdem der erste Fall eintritt, wo B *gerade* ist, oder der zweite Fall, wo B *ungerade* ist, unterscheidet man singuläre Invarianten *erster* Art und singuläre Invarianten *zweiter* Art.

Zu jedem Werthe von J gehören, wie man aus den Gleichungen (27) erkennt, *sechs* verschiedene Werthe von k^2. Desshalb gehören auch zu jeder Classe quadratischer Formen *sechs* verschiedene Werthe des singulären Moduls. Will man also die singulären Moduln berechnen, so sind ziemlich mühsame und umständliche Untersuchungen erforderlich, um aus den sechs verschiedenen Werthen des Moduls denjenigen herauszufinden, welcher dem gewählten Werthsysteme A, B, C entspricht.

Aus diesem Grunde ist es vortheilhaft, nicht die singulären *Moduln*, sondern die singulären *Invarianten* zu berechnen. Die Vorzüge, welche etwa die Benutzung des Moduls k^2 gewährt, können, wie sich zeigen wird, auch bei der Berechnung der singulären Invarianten noch beibehalten werden, wenn man die Hülfsmittel, welche meine Arbeiten über Transformation bieten, in passender Weise verwendet.

Zweiter Abschnitt.

Berechnung der singulären Invarianten mit Hülfe der L-Gleichung.

§ 4.

Wurzeln der L-Gleichung, welche der complexen Multiplication mit dem Multiplicator m zugeordnet sind.

Vertauscht man ω mit $\frac{\omega}{m}$ und ω' mit $\frac{\omega'}{m}$, so ändert sich

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}} \tag{37}$$

gar nicht, was auch m sein mag. Deshalb geht bei dieser Vertauschung

$$(38)\quad Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}$$

in

$$(39)\quad Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m} \cdot Q(\omega, \omega')$$

über. Vertauscht man ferner das primitive Periodenpaar $2\omega, 2\omega'$ mit einem anderen

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega', \quad (pq' - p'q = +1),$$

so ändert sich

$$(40)\quad Q(\omega, \omega')^{24} = g_2^3 - 27 g_3^2$$

gar nicht; $Q(\omega, \omega')$ selbst ändert sich daher bei dieser Vertauschung nur insofern, als eine 24[te] Wurzel der Einheit als Factor hinzutritt. Diese Wurzel habe ich (in Band 26) berechnet und mit $\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}$ bezeichnet*). Mit Rücksicht auf die Gleichungen (25) wird daher unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen für den singulären Werth von $\frac{\omega'}{\omega}$

$$Q\left(\frac{r\omega + \omega'}{n}, -\omega\right) = Q\left(\frac{p\omega + q\omega'}{m}, \frac{p'\omega + q'\omega'}{m}\right)$$
$$= \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right),$$

oder

$$(41)\quad Q\left(\frac{r\omega + \omega'}{n}, -\omega\right) = \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega').$$

Zu den Wurzeln der L-Gleichung für die Transformation vom Grade n gehört nun auch die Grösse

$$Q(\omega, \omega')^{n-1} \cdot \frac{Q\left(\frac{r\omega + \omega'}{n}, -\omega\right)}{Q(r\omega + \omega', -\omega)^n},$$

welche mit $L_r(n)$ oder L_r bezeichnet werden möge. Dabei wird, wenn man, wie dies auch früher geschehen ist,

$$e^{\frac{\pi i}{12}} = \varrho$$

setzt,

$$Q(r\omega + \omega', -\omega) = \varrho\begin{pmatrix} r, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} Q(\omega, \omega') = \varrho^{r-3}\, Q(\omega, \omega'),$$

folglich erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (41)

$$(42)\quad L_r = \varrho^{-n(r-3)} \cdot \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} \sqrt{m}.$$

---

*) Man vergleiche namentlich die Tabelle in Band 26 auf Seite 421.

Häufig kann man auf diese Weise nicht nur *eine* Wurzel der L-Gleichung berechnen, sondern sogleich *zwei* oder mehr. Dies geschieht nämlich, wenn man für den vorliegenden Werth von μ die ganzen Zahlen f und g auf verschiedene Weise bestimmen kann, so dass das Verhältniss $\frac{m}{m_1}$ der beiden zugehörigen Multiplicatoren m und m_1 keine Wurzel der Einheit ist. Dabei müssen natürlich m und m_1 beide die Zahl n zur Norm haben.

So erhält man z. B. aus

$$m = x + yi\sqrt{D} \quad \text{und} \quad m' = x - yi\sqrt{D}$$

unmittelbar ein zweites Werthepaar

$$m_1 = -x + yi\sqrt{D} \quad \text{und} \quad m_1' = -x - yi\sqrt{D}.$$

Diese beiden Multiplicatoren m und m_1 liefern dann auch verschiedene Werthe von r und L_r, wenn $\frac{m}{m_1}$ keine Wurzel der Einheit ist.

Kennt man also die L-Gleichung für die Transformation vom Grade n, so erhält man durch Einsetzen eines jeden Werthes von L_r auch eine Gleichung zur Bestimmung der singulären Invariante.

In den folgenden Beispielen kommt am häufigsten der Fall zur Anwendung, wo $f = -1$ ist, dann wird

$$m = -g + \mu, \quad n = g^2 + \varepsilon g + \mathfrak{n}, \tag{43}$$

$$p' = g - \frac{B-\varepsilon}{2}, \quad q' = -A, \quad p'' = +C, \quad q'' = g + \frac{B+\varepsilon}{2}. \tag{44}$$

Nimmt man sodann für τ den Werth, welcher der Hauptclasse $(1, 0, \mathfrak{n})$ bezw. $(2, 1, 2\mathfrak{n})$ entspricht, setzt man also

$$\tau = \mu = \frac{-\varepsilon + i\sqrt{4\mathfrak{n} - \varepsilon}}{2},$$

so erhält man

$$p' = g, \quad q' = -1, \quad p'' = \mathfrak{n}, \quad q'' = g + \varepsilon, \quad r = \alpha n + g + \varepsilon, \tag{44a}$$
$$p = -\alpha g - 1, \quad q = \alpha,$$

wobei α noch eine beliebige ganze Zahl ist. Für $\alpha = 0$ wird daher

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} -1, & 0 \\ g, & -1 \end{pmatrix} = \varrho^{-(g+6)},$$

und für $\alpha = 1$ wird

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} -g-1, & 1 \\ g, & -1 \end{pmatrix} = \varrho^{-(g+5)}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (42)

$$\begin{cases} L_{g+\varepsilon}(n) = \varrho^{-\mathfrak{n}(g+\varepsilon-3)-(g+6)} \cdot \sqrt{m}, \\ L_{n+g+\varepsilon}(n) = \varrho^{-\mathfrak{n}(n+g+\varepsilon-3)-(g+5)} \cdot \sqrt{m}, \end{cases} \tag{45}$$

jenachdem man $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ setzt.

Für $\varepsilon = 0$, also für singuläre Invarianten *erster Art* erhält man hieraus die folgenden Formeln

(46) $L_g(n) = \varrho^{-n(g-3)-(g+6)} \cdot \sqrt{m}$ und $L_{n+g}(n) = \varrho^{-n(n+g-3)-(g+5)} \cdot \sqrt{m}$,

und für die besonderen Werthe $g = 0,\ g = 1,\ g = -1$

(47) $L_0(\mathfrak{n}) = \varrho^{3(\mathfrak{n}-2)} \sqrt{i\sqrt{\mathfrak{n}}}, \qquad L_0(\mathfrak{n})^2 = \varrho^{6(\mathfrak{n}-1)} \sqrt{\mathfrak{n}}$;

(48) $L_1(\mathfrak{n}+1) = \varrho^{2\mathfrak{n}-5} \sqrt{-1+i\sqrt{\mathfrak{n}}}, \quad L_1(\mathfrak{n}+1)^2 = \varrho^{4\mathfrak{n}+2} (1-i\sqrt{\mathfrak{n}})$;

(49) $L_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}+1) = \varrho^{-(\mathfrak{n}-1)^2} \sqrt{1+i\sqrt{\mathfrak{n}}}, \quad L_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}+1)^2 = \varrho^{-2(\mathfrak{n}-1)^2} (1+i\sqrt{\mathfrak{n}})$.

Für $\varepsilon = 1$, also für singuläre Invarianten *zweiter Art* erhält man dagegen

$$(50) \quad \begin{cases} L_{g+1}(n) = \varrho^{-n(g-2)-(g+6)} \cdot \sqrt{m}, \\ L_{n+g+1}(n) = \varrho^{-n(n+g-2)-(g+5)} \cdot \sqrt{m}, \end{cases}$$

und für die besonderen Werthe $g = 0,\ g = -1$

(51) $L_1(\mathfrak{n}) = \varrho^{2(\mathfrak{n}-3)} \sqrt{\dfrac{-1+i\sqrt{4\mathfrak{n}-1}}{2}}, \quad L_1(\mathfrak{n})^2 = \varrho^{4\mathfrak{n}} \dfrac{1-i\sqrt{4\mathfrak{n}-1}}{2}$,

(52) $L_0(\mathfrak{n}) = \varrho^{3\mathfrak{n}-5} \sqrt{\dfrac{1+i\sqrt{4\mathfrak{n}-1}}{2}}, \quad L_0(\mathfrak{n})^2 = \varrho^{6\mathfrak{n}-10} \dfrac{1+i\sqrt{4\mathfrak{n}-1}}{2}$.

Ehe diese Formeln zur Behandlung einzelner Beispiele benutzt werden, mögen hier noch die L-Gleichungen Platz finden, welche in dem Folgenden zur Anwendung kommen. (Man vergl. die Gleichungen (190), (204), (145), (146), (148), (195), (213), (179) und (187) in Band 26.)

(53) $n = 2$: $L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0$,

(54) $n = 3$: $L^{24} + 18L^{12} + 216\gamma_3 L^6 - 27 = 0$,

(55) $n = 5$: $L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0$,

(56) $n = 7$: $L^{16} + 14L^{12} + 63L^8 + 70L^4 + 216\gamma_3 L^2 - 7 = 0$,

(57) $n = 13$:
$$L^{28} + 13(2L^{26} + 25L^{24} + 196L^{22} + 1064L^{20} + 4180L^{18} + 12086L^{16} + 25660L^{14} + 39182L^{12} + 41140L^{10} + 27272L^8 + 9604L^6 + 1165L^4) + (746 - 1728\gamma_2{}^3)L^2 + 13 = 0,$$

(58) $n = 4$: $L(2)^{24} = L^{16} + 16L^8$,

(59) $n = 9$: $L(3)^{12} = L^9 + 9L^6 + 27L^3$,

(60) $n = 25$: $L(5)^6 = L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L$,

(61) $n = 49$:
$$2L(7)^4 = 7(L^3 + 5L^2 + 7L) + (L^2 + 7L + 7) \cdot \sqrt{4L^3 + 21L^2 + 28L},$$

wobei der Kürze wegen überall L statt $L(n)$ gesetzt worden ist.

§ 5.

Beispiele für die Berechnung singulärer Invarianten erster Art.

Bei den singulären Invarianten *erster Art* wird

$$(62)\quad A = a,\quad B = 2b,\quad C = c,\quad D = B^2 - 4AC = 4(b^2 - ac) = 4d,$$

wobei d die Determinante der quadratischen Form (a, b, c) ist. Es sollen nun in diesem Paragraphen die verschiedenen Werthe von d berücksichtigt werden.

Nach den Voraussetzungen, welche früher gemacht wurden, kommen hier nur die *eigentlich primitiven* Classen in Betracht, von denen jede in dem Folgenden nur durch eine reducirte Form repräsentirt werden möge.

Für die späteren Untersuchungen ist es mitunter von Wichtigkeit, die singulären Werthe der Invarianten auf zwei oder drei verschiedenen Wegen abzuleiten. Die angegebene Methode gewährt in dieser Beziehung einen sehr weiten Spielraum; es sollen aber hier nur diejenigen Resultate Platz finden, die später noch gebraucht werden.

Bei der Ausziehung von Wurzeln kann man jedesmal die hinzutretende Wurzel der Einheit durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von h auffinden.

I. $d = -1$, einzige Classe $(1, 0, 1)$,

$$(63)\qquad \tau^2 + 1 = 0,\quad \tau = \mu = i,\quad n = 1,$$

$$(64)\qquad L_1(2) = \sqrt{1+i},\quad L_1(2)^8 = -4 \qquad \text{nach Gl. (49)},$$

$$12\gamma_2 = L^{16} + 16L^{-8} = 12 \qquad \text{nach Gl. (53)},$$

also

$$(65)\qquad \gamma_2 = 1,\quad \gamma_3 = 0.$$

Dasselbe Resultat findet man durch Transformation vom Grade 5. Setzt man nämlich

$$f = -1,\quad g = \mp 2,\quad \text{also}\quad m = \pm 2 + i,$$

so erhält man

$$(66)\qquad L_3(5) = \varrho^{-3}\sqrt{2+i},\quad L_2(5) = \varrho^{-3}\sqrt{-2+i},$$

oder

$$(66\text{a})\qquad \begin{cases} L_3(5)^2 = 1 - 2i,\quad L_2(5)^2 = 1 + 2i, \\ (L^2 - L_2^2)(L^2 - L_3^2) = L^4 - 2L^2 + 5, \end{cases}$$

$$12\gamma_2 = L^{10} + 10L^4 + 5L^{-2} = 12 \quad \text{nach Gl. (55)},$$

gleichviel ob man für L^2 den Werth $1 - 2i$ oder $1 + 2i$ wählt.

Setzt man in den L-Gleichungen für $n = 2$ und für $n = 5$ diesen singulären Werth von γ_2 ein, so gehen dieselben über in

$$(67)\qquad L^{24} - 12L^8 + 16 = (L^8 + 4)(L^8 - 2)^2 = 0$$

und

$$(68)\qquad L^{12} + 10L^6 - 12L^2 + 5 = (L^4 - 2L^2 + 5)(L^4 + L^2 + 1)^2 = 0.$$

In gleicher Weise zerfällt für alle Primzahlen n von der Form $4l + 1$ die linke Seite der L-Gleichung in einen Factor zweiten Grades von der Form $L^4 + aL^2 + n$ und in das Quadrat einer ganzen rationalen Function $2l^{\text{ten}}$ Grades von L^2, wenn man $\gamma_2 = 1$ setzt.

Von dieser Eigenschaft der L-Gleichungen, die ich übrigens schon früher häufig benutzt habe, um die unbestimmten Coefficienten der L-Gleichungen zu berechnen, wird an einer anderen Stelle noch ausführlicher die Rede sein.

II. $d = -2$, einzige Classe $(1, 0, 2)$,

$$(69)\qquad \tau^2 + 2 = 0, \quad \tau = \mu = i\sqrt{2}, \quad \mathfrak{n} = 2,$$

$$(70)\qquad L_0(2) = \sqrt{i\sqrt{2}}, \quad L_0(2)^8 = 4 \quad \text{nach Gl. (47)},$$

$$(71)\qquad 12\gamma_2 = 20, \quad 27\gamma_3 = 7\sqrt{2} \quad \text{nach Gl. (53)}.$$

Dasselbe Resultat findet man auch durch Transformation vom Grade 3; es ist nämlich

$$(72)\quad \begin{cases} L_1(3) = \varrho^{-1}\sqrt{-1 + i\sqrt{2}}, & L_1(3)^6 = \sqrt{2} - 5i \quad \text{nach Gl. (48)}, \\ L_2(3) = \varrho^{-1}\sqrt{+1 + i\sqrt{2}}, & L_2(3)^6 = \sqrt{2} + 5i \quad \text{nach Gl. (49)}. \end{cases}$$

Die L-Gleichung für $n = 3$ muss daher durch den Factor

$$(L^6 - L_1{}^6)(L^6 - L_2{}^6) = L^{12} - 2\sqrt{2}L^6 + 27$$

theilbar sein; deshalb bringt man die Gleichung (54) auf die Form

$$(73)\qquad \begin{aligned} &(L^{12} - 2\sqrt{2}L^6 + 27)(L^{12} + 2\sqrt{2}L^6 - 1) \\ &\qquad + 8(27\gamma_3 - 7\sqrt{2})L^6 = 0 \end{aligned}$$

und schliesst daraus wieder

$$27\gamma_3 = 7\sqrt{2}, \quad 12\gamma_2 = 20.$$

III. $d = -3$, einzige Classe $(1, 0, 3)$,

$$(74)\qquad \tau^2 + 3 = 0, \quad \tau = \mu = i\sqrt{3}, \quad \mathfrak{n} = 3,$$

$$(75)\qquad L_0(3) = \varrho^3\sqrt{i\sqrt{3}}, \quad L_0(3)^6 = -3\sqrt{3} \quad \text{nach Gl. (47)},$$

$$(76)\qquad 18\gamma_3 = 11\sqrt{3}, \quad 12\gamma_2 = 30\sqrt[3]{2} \quad \text{nach Gl. (54)}.$$

Dasselbe Resultat findet man auch aus der Transformation vom Grade 4; es ist nämlich

$$(77)\quad \begin{cases} L_1(4) = \varrho\,\sqrt{-1+i\sqrt{3}}, & L_1(4)^8 = 16\varrho^{16} \quad \text{nach Gl. (48)}, \\ L_3(4) = \varrho^{-4}\sqrt{+1+i\sqrt{3}}, & L_3(4)^8 = 16\varrho^8 \quad \text{nach Gl. (49)}, \end{cases}$$

$$(78)\quad L_1(2)^{24} = -256, \quad L_1(2)^8 = -4\sqrt[3]{4}\,^{*)} \quad \text{nach Gl. (58)},$$

gleichviel ob man den Werth von $L_1(4)$ oder $L_3(4)$ benutzt. Deshalb folgt aus Gleichung (53) wieder

$$12\gamma_2 = 30\sqrt[3]{2}, \quad 18\gamma_3 = 11\sqrt{3}.$$

IV. $d = -4$; einzige Classe $(1, 0, 4)$,

$$(79)\quad \tau^2 + 4 = 0, \quad \tau = \mu = 2i, \quad \mathfrak{n} = 4,$$

$$(80)\quad L_0(4) = \varrho^6\sqrt{2i}, \quad L_0(4)^8 = 16 \quad \text{nach Gl. (46)},$$

$$(81)\quad L_0(2)^{24} = 512, \quad L_0(2)^8 = 8 \quad \text{nach Gl. (58)},$$

$$(82)\quad 12\gamma_2 = 66, \quad 4\gamma_3 = 7\sqrt{2} \quad \text{nach Gl. (53)}.$$

Dasselbe Resultat liefert die Transformation vom Grade 5, denn es ist

$$(83)\quad \begin{cases} L_1(5) = \varrho^3\,\sqrt{-1+2i}, & L_1(5)^2 = -2 - i \quad \text{nach Gl. (48)}, \\ L_4(5) = \varrho^{-9}\sqrt{1+2i}, & L_4(5)^2 = -2 + i \quad \text{nach Gl. (49)}. \end{cases}$$

Die linke Seite der L-Gleichung für $n = 5$ muss daher durch den Factor

$$(L^2 - L_1^2)(L^2 - L_4^2) = L^4 + 4L^2 + 5$$

theilbar sein. In der That, man kann die Gleichung (55) auf die Form

$$(84)\quad (L^4 + 4L^2 + 5)(L^8 - 4L^6 + 11L^4 - 14L^2 + 1) - (12\gamma_2 - 66)L^2 = 0$$

bringen, und daraus folgt wieder

$$12\gamma_2 = 66, \quad 4\gamma_3 = 7\sqrt{2}.$$

---

*) Die Grössen $L_\infty(2)$, $L_0(2)$, $L_1(2)$ kann man, wie später gezeigt werden wird, durch die Gleichungen

$$L_\infty(2) = \sqrt{2}\,h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + h^{2\nu}), \qquad L_0(2) = \varrho^3 h^{-\frac{1}{24}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu-1}),$$

$$L_1(2) = \varrho^{\frac{3}{2}}\,h^{-\frac{1}{24}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + h^{2\nu-1})$$

erklären. Daraus ergeben sich die etwaigen Wurzeln der Einheit, welche bei der Ausziehung von Wurzeln aus $L(2)^{24}$ als Factoren hinzutreten.

V. $d = -5$; zwei Classen $(1, 0, 5)$ und $(2, 1, 3)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$\tau^2 + 5 = 0, \quad \tau = \mu = i\sqrt{5}, \quad n = 5, \tag{85}$$

$$L_0(5) = \varrho^9 \sqrt{i\sqrt{5}}, \quad L_0(5)^2 = \sqrt{5} \qquad \text{nach Gl. (47)}, \tag{86}$$

$$12\gamma_2 = L^{10} + 10L^4 + 5L^{-2} = 50 + 26\sqrt{5} \quad \text{nach Gl. (55)},$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} 12\gamma_2 &= 4(4-\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4\sqrt{5}, \\ 27\gamma_3 &= 2(4+\sqrt{5})(1+2\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}. \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Der anderen Classe entsprechen die Gleichungen

$$2\tau^2 + 2\tau + 3 = 0, \quad \tau = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\mu}{2}, \quad n = 5; \tag{88}$$

dann hat man also zu setzen

$$A = 2, \quad B = 2, \quad C = 3, \quad g = 0, \quad f = -1,$$

und deshalb

$$m = i\sqrt{5}, \quad p' = -1, \quad q' = -2, \; p'' = 3, \quad q'' = +1;$$

$$n = 5, \quad r = 3, \quad p = 0, \quad q = 1, \quad \varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} = \varrho^{-5},$$

$$L_3(5) = \varrho^{-5}\sqrt{i\sqrt{5}}, \quad L_3(5)^2 = \varrho^{-4}\sqrt{5}, \tag{89}$$

$$12\gamma_2 = L^{10} + 10L^4 + 5L^{-2} = \varrho^{16}(50 - 26\sqrt{5}), \tag{90}$$

d. h. die Werthe von γ_2^3 und γ_3^2, welche den beiden Werthen $\tau = i\sqrt{5}$ und $\tau = \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$ zugeordnet sind, gehen in einander über, indem man $+\sqrt{5}$ mit $-\sqrt{5}$ vertauscht, wie man von vornherein erwarten konnte.

Man kann nämlich, um die Gleichung zu finden, welcher γ_2^3 genügt, von jeder beliebigen eigentlich primitiven Classe der Determinante $-d$ ausgehen. Diesen Umstand kann man bei grösseren Werthen von d, wo es mehrere Classen giebt, zur Erleichterung der Rechnung benutzen.

VI. $d = -6$; zwei Classen $(1, 0, 6)$ und $(2, 0, 3)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$\tau^2 + 6 = 0, \quad \tau = \mu = i\sqrt{6}, \quad n = 6, \tag{91}$$

$$L_1(7) = \varrho^7\sqrt{-1+i\sqrt{6}}, \quad L_6(7) = \varrho^{-1}\sqrt{1+i\sqrt{6}} \tag{92}$$

nach den Gl. (48) und (49),

oder

$$\text{(92a)}\quad \begin{cases} L_1(7)^2 = \varrho^8\ (-\sqrt{6}-i) = \frac{1}{2}\,[\sqrt{3}(1+\sqrt{2})+i(1-3\sqrt{2})], \\ L_6(7)^2 = \varrho^{-8}(-\sqrt{6}+i) = \frac{1}{2}\,[\sqrt{3}(1+\sqrt{2})-i(1-3\sqrt{2})]. \end{cases}$$

Die L-Gleichung für $n = 7$ muss daher durch den Factor

$$(L^2 - L_1^2)\,(L^2 - L_6^2) = L^4 - \sqrt{3}(1+\sqrt{2})\,L^2 + 7$$

theilbar sein. Bringt man also die Gleichung (56) auf die Form

$$\begin{aligned} \text{(93)}\quad & [L^4 - \sqrt{3}(1+\sqrt{2})\,L^2 + 7]\,[L^{12} + \sqrt{3}(1+\sqrt{2})\,L^{10} \\ & + (16+6\sqrt{2})\,L^8 + \sqrt{3}(21+15\sqrt{2})\,L^6 + (104+62\sqrt{2})\,L^4 \\ & + \sqrt{3}\,(89+65\sqrt{2})\,L^2 - 1] \\ & + 24\,[9\gamma_3 - \sqrt{3}\,(26+19\sqrt{2})]\,L^2 = 0, \end{aligned}$$

so findet man daraus

$$\text{(94)}\quad \begin{cases} 9\gamma_3 = (19+13\sqrt{2})\,\sqrt{6} = (1+\sqrt{2})^2\,(5+\sqrt{2})\,\sqrt{6}, \\ \gamma_2^{\,3} = (1+\sqrt{2})^2\,(5+2\sqrt{2})^3. \end{cases}$$

Der Werth von τ, welcher der anderen Classe entspricht, nämlich $\tau = \frac{i}{2}\sqrt{6} = \frac{\mu}{2}$ giebt

$$\text{(95)}\quad \gamma_2^{\,3} = (1-\sqrt{2})^2\,(5-2\sqrt{2})^3,\quad 9\gamma_3 = (1-\sqrt{2})^2\,(5-\sqrt{2})\sqrt{6}.$$

VII. $d = -7$; einzige Classe $(1, 0, 7)$.

$$\text{(96)}\qquad \tau^2 + 7 = 0,\quad \tau = \mu = i\sqrt{7},\quad n = 7,$$

$$\text{(97)}\quad L_0(7) = \varrho^{15}\sqrt{i\sqrt{7}},\quad L_0(7)^2 = -\sqrt{7} \quad \text{nach Gl. (47)},$$

$$\text{(98)}\quad 8\gamma_3 = 3\cdot 19\sqrt{7},\quad 12\gamma_2 = 3\cdot 5\cdot 17 \quad \text{nach Gl. (56)}.$$

VIII. $d = -8$; zwei Classen $(1, 0, 8)$ und $(3, 1, 3)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$\text{(99)}\qquad \tau^2 + 8 = 0,\quad \tau = \mu = 2i\sqrt{2},\quad n = 8.$$

$$\text{(100)}\quad \begin{cases} L_1(9) = \varrho^{11}\,\sqrt{-1+2i\sqrt{2}} = \varrho^{11}\,(1+i\sqrt{2}) & \text{nach Gl. (48)}, \\ L_8(9) = \varrho^{-1}\sqrt{1+2i\sqrt{2}} = \varrho^{-1}(\sqrt{2}+i) & \text{nach Gl. (49)}, \end{cases}$$

oder

$$\text{(100a)}\quad L_1(9)^3 = \varrho^9(-5+i\sqrt{2}),\quad L_8(9)^3 = \varrho^{-9}(-5-i\sqrt{2}).$$

Nun wird nach Gleichung (59)

$$\begin{aligned} & L_1(3)^{12} + 27 = [L_1(9)^3 + 3]^3 \\ = & \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(1+i\sqrt{2})^3\,(1+\sqrt{2})^3\,[(-3+2\sqrt{2}) - i(1+\sqrt{2})]^3, \end{aligned}$$

oder

(101) $$L_1(3)^{12} = -i(1+i\sqrt{2})^6(1+\sqrt{2})^3.$$

Bringt man also die Gleichung (54) auf die Form

(102) $$(12\gamma_2)^3 L(3)^{12} = [L(3)^{12}+3]^3 [L(3)^{12}+27],$$

so findet man

(103) $$\begin{cases} 12\gamma_2 = 10(19+13\sqrt{2}) = 10(1+\sqrt{2})^2(5+\sqrt{2}), \\ 108\gamma_3 = 7(5-\sqrt{2})(7+3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^2\sqrt{1+\sqrt{2}}\,\sqrt{2}. \end{cases}$$

Die Werthe der Invarianten γ_2^3 und γ_3^2, welche der zweiten Classe $(3, 1, 3)$, also dem Werthe $\tau = \frac{-1+2i\sqrt{2}}{3} = \frac{-1+\mu}{3}$ entsprechen, erhält man aus den soeben gefundenen Werthen von γ_2^3 und γ_3^2, indem man $\sqrt{2}$ mit $-\sqrt{2}$ vertauscht.

IX. $d = -9$; zwei Classen $(1, 0, 9)$ und $(2, 1, 5)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(104) $$\tau^2+9=0, \quad \tau = \mu = 3i, \quad \mathfrak{n} = 9,$$

(105) $$L_0(9) = \varrho^{21}\sqrt{3i} = \sqrt{3}, \quad L_0(9)^3 = 3\sqrt{3} \qquad \text{nach Gl. (47)},$$

(106) $$\begin{cases} L_0(3)^{12}+27 = [L_0(9)^3+3]^3 = 27(1+\sqrt{3})^3 & \text{nach Gl. (59)}, \\ L_0(3)^{12} = 81\sqrt{3}(2+\sqrt{3}). \end{cases}$$

Desshalb folgt aus Gleichung (102)

$$1728\gamma_2^3 = 24\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^2(1+13\sqrt{3})^3(1+\sqrt{3})^3,$$

oder

(107) $$\begin{cases} (12\gamma_2)^3 = [4\sqrt{3}(2+3\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})]^3(2+\sqrt{3})^2, \\ (27\gamma_3)^2 = [2\cdot 3\cdot 7(5+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^2(2+\sqrt{3})\sqrt{3}. \end{cases}$$

Die Werthe der Invarianten γ_2^3 und γ_3^2, welche der zweiten Classe $(2, 1, 5)$, also dem Werthe $\tau = \frac{-1+3i}{2}$ entsprechen, erhält man aus den soeben gefundenen, indem man $\sqrt{3}$ mit $-\sqrt{3}$ vertauscht.

X. $d = -10$; zwei Classen $(1, 0, 10)$ und $(2, 0, 5)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(108) $$\tau^2+10=0, \quad \tau = \mu = i\sqrt{10}, \quad \mathfrak{n}=10, \quad A=1, \quad B=0, \quad C=10.$$

Setzt man

$$f = -2, \quad g = -3, \quad \text{also} \quad m = 3+2i\sqrt{10}, \quad n = 49,$$

so erhält man nach den Gleichungen (17), (20a) und (22)

$$p' = -3,\quad q' = -2,\quad p'' = 20,\quad q'' = -3,$$

$$r = 23,\quad p = 1,\quad q = 1,\quad \varrho\left(\frac{1}{-3},\ \frac{1}{-2}\right) = \varrho^{-4},$$

also

(109) $L_{23}(49) = \sqrt{3 + 2i\sqrt{10}} = \sqrt{5} + i\sqrt{2},\quad L_{23}(49)^2 = 3 + 2i\sqrt{10}$
nach Gl. (42).

Ebenso erhält man für $f = -2,\ g = +3,\ m = -3 + 2i\sqrt{10}$

(110) $L_{26}(49) = \sqrt{3 - 2i\sqrt{10}} = \sqrt{5} - i\sqrt{2},\quad L_{26}(49)^2 = 3 - 2i\sqrt{10}.$

Dies giebt

(111) $L(7)^4 = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 (\sqrt{5} \pm i\sqrt{2})^2$ nach Gl. (61),

(112) $\begin{cases} 12\gamma_2 = 3(1 + \sqrt{5})^2 (4 + 3\sqrt{5})\sqrt{5}, \\ \gamma_3 = (2 + \sqrt{5})^2 (6 - \sqrt{5})\sqrt{2} \end{cases}$ nach Gl. (56).

XI. $d = -12$; zwei Classen: $(1, 0, 12)$ und $(3, 0, 4)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(113) $\tau^2 + 12 = 0,\quad \tau = \mu = 2i\sqrt{3},\quad \mathfrak{n} = 12,$

(114) $L_1(13)^2 = \varrho^2(1 - 2i\sqrt{13}),\quad L_{12}(13)^2 = \varrho^{-2}(1 + 2i\sqrt{13})$
nach Gl. (48) und (49).

Die L-Gleichung für $n = 13$ muss daher theilbar sein durch

(115) $(L^2 - L_1^2)(L^2 - L_{12}^2) = L^4 - 3\sqrt{3}\,L^2 + 13,$

und daraus folgt

(116) $\begin{cases} 12\gamma_2 = 15(2 + \sqrt{3})(4 + 3\sqrt{3})\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3}, \\ 12\gamma_3\sqrt{6} = (2 + \sqrt{3})^2 (1 + 2\sqrt{3})(2 + 3\sqrt{3})(11 + 3\sqrt{3}. \end{cases}$

XII. $d = -13$; zwei Classen $(1, 0, 13)$ und $(2, 1, 7)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(117) $\tau^2 + 13 = 0,\quad \tau = \mu = i\sqrt{13},\quad \mathfrak{n} = 13,$

(118) $L_0(13) = \varrho^{33}\sqrt{i\sqrt{13}},\quad L_0(13)^2 = \sqrt{13}$ nach Gl. (47),

(119) $\begin{cases} 12\gamma_2 = 30(3 + \sqrt{13})(6 + \sqrt{13}), \\ \gamma_3^2 = 2^2 (4 + \sqrt{13})^2 (2\sqrt{13} - 3)^2 (18 + 5\sqrt{13}) \end{cases}$
nach Gl. (57).

XIII. $d = -16$; zwei Classen: $(1, 0, 16)$ und $(4, 2, 5)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(120)\quad \tau^2 + 16 = 0, \quad \tau = \mu = 4i, \quad \mathfrak{n} = 16, \quad g = \pm 3, \quad n = 25;$$

$$(121)\quad \begin{cases} L_3(25) = \varrho^{-9}\sqrt{-3+4i} = \varrho^{-9}(1+2i), \\ L_{22}(25) = \varrho^{-21}\sqrt{3+4i} = \varrho^{9}(1-2i) \quad \text{nach Gl. (46).} \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen $L_3(25) = L$, so wird

$$L + \frac{5}{L} = \sqrt{2}, \quad L^2 + \frac{25}{L^2} = -8,$$

$$(122)\quad L_3(5)^6 = L^3\cdot[(L^2+25L^{-2})+5(L+5L^{-1})+15] = L^3\cdot(1+\sqrt{2})^3$$
nach Gl. (60),

$$(123)\quad 12\gamma_2 = 3(1+\sqrt{2})^4(5-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})\sqrt{2}, \quad 8\gamma_3 = 7\cdot 11(1+\sqrt{2})^5\sqrt{8}$$
nach Gl. (55).

XIV. $d = -21$; vier Classen: $(1, 0, 21)$, $(3, 0, 7)$, $(2, 1, 11)$, $(5, 2, 5)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(124)\quad \tau^2 + 21 = 0, \quad \tau = \mu = i\sqrt{21}, \quad \mathfrak{n} = 21, \quad g = \pm 2, \quad n = 25;$$

$$(125)\quad \begin{cases} L_2(25) = \varrho^{-7}\sqrt{-2+i\sqrt{21}} = \varrho^{-7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{7}}{\sqrt{2}}, \\ L_{23}(25) = \varrho\ \sqrt{+2+i\sqrt{21}} = \varrho^{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
nach den Gl. (46).

Setzt man der Kürze wegen L statt $L_2(25)$, so wird

$$2\left(L+\frac{5}{L}\right) = -3+\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{21}, \quad L^2+\frac{25}{L^2} = 2\sqrt{3}-\sqrt{21},$$

$$(126)\quad L(5)^6 = \frac{1}{4}L^3\cdot(1+\sqrt{3})^3(3+\sqrt{7}) \quad \text{nach Gl. (60),}$$

$$(127)\quad 12\gamma_2 = 3(1+\sqrt{3})^2[(65+34\sqrt{3})+\sqrt{7}(26+15\sqrt{3})]\sqrt[3]{8+3\sqrt{7}}.$$

XV. $d = -24$; vier Classen: $(1, 0, 24)$, $(3, 0, 8)$, $(5, 1, 5)$, $(4, 2, 7)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(128)\quad \tau^2 + 24 = 0, \quad \tau = \mu = 2i\sqrt{6}, \quad \mathfrak{n} = 24, \quad g = \pm 1, \quad n = 25,$$

$$(129)\quad \begin{cases} L_1(25) = \varrho^{-5}\sqrt{-1+2i\sqrt{6}} = \varrho^{-5}(\sqrt{2}+i\sqrt{3}) \quad \text{nach Gl. (48),} \\ L_{24}(25) = \varrho^{-1}\sqrt{+1+2i\sqrt{6}} = \varrho^{5}(\sqrt{2}-i\sqrt{3}) \quad \text{nach Gl. (49).} \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen L statt $L_1(25)$, so wird

$$\sqrt{2}\left(L+\frac{5}{L}\right)=3-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6},\quad L^2+\frac{25}{L^2}=\sqrt{3}+2\sqrt{6},$$

(130) $$L(5)^6=\frac{1}{2\sqrt{2}}L^3\cdot(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{3})^3,$$

(131) $$12\gamma_2=3(1+\sqrt{2})^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})(9+13\sqrt{2}+10\sqrt{6}).$$

XVa. Setzt man für $\tau=\mu=2i\sqrt{6}$ die Grösse $g=\pm 5$, also $n=49$, so wird

(132) $$\begin{cases} L_5(49)=\varrho^{-13}\sqrt{-5+2i\sqrt{6}}=\varrho^{-13}(1+i\sqrt{6}),\\ L_{44}(49)=\varrho^{7}\sqrt{+5+2i\sqrt{6}}=\varrho^{13}(1-i\sqrt{6}) \quad \text{nach den Gl. (46)}, \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\left(L+\frac{7}{L}\right)=-1-3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6},$$

(133) $$2L(7)^4=L^2\cdot(1+\sqrt{3})^2(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

Hieraus findet man mit leichter Mühe γ_3 durch Gleichung (56).

XVI. $d=-25$; zwei Classen $(1,0,25)$, $(2,1,13)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(134) $\tau^2+25=0,\quad \tau=\mu=5i,\quad \mathfrak{n}=25,\quad g=0,\quad n=25,$

(135) $L_0(25)=L_0=\varrho^{-3}\sqrt{5i}=\sqrt{5}$ nach Gl. (47),

(136) $L_0(5)^6=125(2+\sqrt{5})=5^3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$ nach Gl. (60).

Da $L_0(5)^2$ reell sein muss, so wird

(136a) $$L_0(5)^2=5\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

(137) $$\begin{cases} 12\gamma_2=3(4+\sqrt{5})(8-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2(3+4\sqrt{5}),\\ \gamma_3=4\cdot 7(2+\sqrt{5})^2(1+2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})\sqrt{5} \quad \text{nach Gl. (55)}. \end{cases}$$

XVII. $d=-33$; 4 Classen: $(1,0,33)$, $(3,0,11)$, $(2,1,17)$, $(6,3,7)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(138) $$\tau^2+33=0,\quad \tau=\mu=i\sqrt{33},\quad \mathfrak{n}=33;\quad g=\pm 4,$$
$$m=\mp 4+i\sqrt{33},\quad n=49,$$

(139) $$\begin{cases} L_4(49)=\varrho^{-11}\sqrt{-4+i\sqrt{33}}=\varrho^{-11}\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{11}}{\sqrt{2}},\\ L_{45}(49)=\varrho^{5}\sqrt{+4+i\sqrt{33}}=\varrho^{11}\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{11}}{\sqrt{2}} \quad \text{nach den Gl. (46)}. \end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_4(49)$, so wird

$$(139a)\quad 4L=(-3-\sqrt{3}-\sqrt{11}+\sqrt{33})+i(-3+\sqrt{3}-\sqrt{11}-\sqrt{33}),$$

$$(140)\quad L+\frac{7}{L}=\frac{1}{2}(-3-\sqrt{3}-\sqrt{11}+\sqrt{33}),$$

$$\begin{aligned}4L(7^4)&=L^2\cdot\Big[7(7-\sqrt{3}-\sqrt{11}+\sqrt{33})\\&\quad+(11-\sqrt{3}-\sqrt{11}+\sqrt{33})\cdot\sqrt{15-2\sqrt{3}-2\sqrt{11}+2\sqrt{33}}\Big]\\&=L^2\cdot[7(7-\sqrt{3}-\sqrt{11}+\sqrt{33})\\&\quad+(11-\sqrt{3}-\sqrt{11}+\sqrt{33})\cdot(-1+\sqrt{3}+\sqrt{11})]\ \text{nach Gl. (61)},\end{aligned}$$

oder

$$(141)\quad 2L(7)^4=L^2\cdot(1+\sqrt{3})^2\,(2\sqrt{3}+\sqrt{11}).$$

Hieraus findet man dann ohne Schwierigkeit den Werth von γ_3 aus Gleichung (56). Es genügt hier und ebenso in den folgenden Beispielen den Werth von $L(7)^4$ zu berechnen.

XVIII. $d=-40$; 4 Classen: (1, 0, 40), (5, 0, 8), (4, 2, 11), (7, 3, 7).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(142)\quad \tau^2+40=0,\quad \tau=\mu=2i\sqrt{10},\quad \mathfrak{n}=40,\quad g=\pm 3,$$
$$m=\mp 3+2i\sqrt{10},\quad n=49,$$

$$(143)\begin{cases}L_3(49)=\varrho^{-9}\sqrt{-3+2i\sqrt{10}}=\varrho^{-9}(\sqrt{2}+i\sqrt{5}),\\ L_{16}(49)=\varrho^{3}\sqrt{+3+2i\sqrt{10}}=\varrho^{9}(\sqrt{2}-i\sqrt{5})\ \text{nach den Gl.(46)}.\end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_3(49)$, so wird

$$(143a)\quad L=\frac{1}{\sqrt{2}}[(-\sqrt{2}+\sqrt{5})+i(-\sqrt{2}-\sqrt{5})],$$

$$L+\frac{7}{L}=-2+\sqrt{10},$$

$$\begin{aligned}2L(7)^4&=L^2\cdot\Big[7(3+\sqrt{10})+(5+\sqrt{10})\sqrt{13+4\sqrt{10}}\Big]\\&=L^2\cdot[7(3+\sqrt{10})+(5+\sqrt{10})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})]\\&\qquad\text{nach Gl. (61)},\end{aligned}$$

oder

$$(144)\quad L(7)^4=L^2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4(3+\sqrt{10}).$$

XIX. $d=-45$; 4 Classen: (1, 0, 45), (5, 0, 9), (2, 1, 23), (7, 2, 7).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(145) $\tau^2 + 45 = 0, \quad \tau = \mu = 3i\sqrt{5}, \quad \mathfrak{n} = 45, \quad g = \pm 2,$

$$m = \mp 2 + 3i\sqrt{5}, \quad n = 49,$$

(146) $$\begin{cases} L_2\,(49) = \varrho^{-7}\sqrt{-2+3i\sqrt{5}} = \varrho^{-7}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+3i}{\sqrt{2}}, \\ L_{47}(49) = \varrho\;\;\sqrt{+2+3i\sqrt{5}} = \varrho^{7}\;\cdot\dfrac{\sqrt{5}-3i}{\sqrt{2}} \text{ nach den Gl. (46).} \end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_2(49)$, so wird

$$4L = (3+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}) + i(3-3\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{15}),$$

(147) $L + \frac{7}{L} = \frac{1}{2}(3+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}),$

$$\begin{aligned} 4L(7)^4 = L^2\cdot\Big[&7(13+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}) \\ &+(17+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15})\sqrt{27+6\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{15}}\Big] \\ = L^2\cdot\big[&7(13+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}) \\ &+(17+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15})(-2+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15})\big] \end{aligned}$$

nach Gleichung (61),

oder

(148) $32L(7)^4 = L^2\cdot(1+\sqrt{3})^4(1+\sqrt{5})^3.$

XX. $d = -48$; 4 Classen $(1,0,48)$, $(3,0,16)$, $(7,1,7)$, $(4,2,13)$.
Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(149) $\tau^2 + 48 = 0, \quad \tau = \mu = 4i\sqrt{3}, \quad \mathfrak{n} = 48, \quad g = \pm 1,$

$$m = \mp 1 + 4i\sqrt{3}, \quad n = 49,$$

(150) $$\begin{cases} L_1\,(49) = \varrho^{-5}\sqrt{-1+4i\sqrt{3}} = \varrho^{-5}(\sqrt{3}+2i), \\ L_{48}(49) = \varrho^{-1}\sqrt{+1+4i\sqrt{3}} = \varrho^{5}\;(\sqrt{3}-2i) \\ \qquad\text{nach den Gl. (46).} \end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_1(49)$, so wird

(151) $2\sqrt{2}L = 5+\sqrt{3}+i(-5+\sqrt{3}), \quad L + \frac{7}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(5+\sqrt{3}),$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}L(7)^4 = L^2\cdot\Big[&7(5+5\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &+(5+7\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{21+10\sqrt{2}+2\sqrt{6}}\Big] \\ = L^2\cdot\big[&7(5+5\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\ &+(5+7\sqrt{2}+\sqrt{3})(-1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6})\big] \end{aligned}$$

nach Gleichung (61),

oder

$$(152)\qquad L(7)^4 = L^2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3 (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2.$$

XXI. $d = -49$; 4 Classen: (1, 0, 49), (2, 1, 15), (5, +1, 10), (5, −1, 10).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

(153) $\tau^2 + 49 = 0,\quad \tau = \mu = 7i,\quad \mathfrak{n} = 49,\quad m = 7i,\quad n = 49,$

(154) $L_0(49) = \varrho^{-3}\sqrt{7i} = \sqrt{7}$ nach Gl. (47),

(155) $2L(7)^4 = 7\left[7(5+2\sqrt{7}) + (7+2\sqrt{7})\sqrt{21+8\sqrt{7}}\right.,$

oder

(155a) $4L(7)^4 = 7\sqrt[4]{7^3}(3+\sqrt{7})\left[(1+\sqrt{7})\sqrt{7} + (2+\sqrt{7})\sqrt{2}\right].$

§ 6.

Beispiele für die Berechnung singulärer Invarianten zweiter Art.

Bei den singulären Invarianten *zweiter* Art wird

(156) $2A = a,\ B = b,\ 2C = c,\ D = B^2 - 4AC = b^2 - ac = -(4\mathfrak{n}-1).$

Es sollen daher in diesem Paragraphen die verschiedenen Werthe von

$$D = -4\mathfrak{n} + 1$$

berücksichtigt werden, und zwar kommen hier nur die *uneigentlich primitiven* Classen in Betracht, von denen jede in dem Folgenden nur durch eine reducirte Form repräsentirt werden möge.

I. $D = -3$; einzige Classe (2, 1, 2),

(157) $\tau^2 + \tau + 1 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \mathfrak{n} = 1,$

$$g = +1,\quad m = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2},\quad n = 3,$$

$$g = -2,\quad m = \frac{+3+i\sqrt{3}}{2},\quad n = 3;$$

(158) $L_2(3)^2 = \varrho^2\sqrt{3},\quad L_2(3)^6 = 3i\sqrt{3}$ nach Gl. (50),

(159) $3\gamma_3\sqrt{3} = i,\quad \gamma_2 = 0$ nach Gl. (54).

Dasselbe Resultat findet man durch Transformation vom Grade 7; aus

$$g = +2,\quad m = \frac{-5+i\sqrt{3}}{2},\quad n = 7,$$

$$g = -3,\quad m = \frac{+5+i\sqrt{3}}{2},\quad n = 7$$

folgt nämlich nach den Gleichungen (50)

(160) $$L_3(7)^2 = \frac{1-3i\sqrt{3}}{2}, \quad L_5(7)^2 = \frac{-1-3i\sqrt{3}}{2},$$

(161) $$(L^2-L_3^2)(L^2-L_5^2) = L^4 + 3i\sqrt{3}\,L^2 - 7,$$

also nach Gleichung (56) wieder

$$3\gamma_3\sqrt{3} = i, \quad \gamma_2 = 0.$$

Für diesen Werth von γ_3 gehen die Gleichungen (54) und (56) über in

(162) $$L^{24}+18L^{12}+24i\sqrt{3}\,L^6-27 = (L^6-3i\sqrt{3})(L^6+i\sqrt{3})^3 = 0$$

und

(163) $$L^{16}+14L^{12}+63L^8+70L^4+24i\sqrt{3}\,L^2-7$$
$$=(L^4+3i\sqrt{3}\,L^2-7)(L^4-i\sqrt{3}\,L^2+1)^3 = 0.$$

In gleicher Weise zerfällt für alle Primzahlen n von der Form $6l+1$ die linke Seite der L-Gleichung in einen Factor zweiten Grades von der Form $L^4 + aL^2 \pm n$ und in den Kubus einer ganzen rationalen Function $2l^{\text{ten}}$ Grades, wenn man $\gamma_2 = 0$, $3\gamma_3\sqrt{3} = i$ setzt.

Auch von dieser Eigenschaft der L-Gleichungen habe ich schon früher häufig Gebrauch gemacht, um die unbestimmten Coefficienten der L-Gleichungen zu berechnen. An einer anderen Stelle soll noch ausführlicher davon die Rede sein.

II. $D = -7$; einzige Classe $(2, 1, 4)$;

(164) $$\tau^2+\tau+2=0, \quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \quad n = 2,$$

(165) $$\begin{cases} L_1(2)^2 = \varrho^8\,\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}, & L_1(2)^8 = \varrho^8\,\dfrac{1+3i\sqrt{7}}{2} \quad \text{nach Gl. (51)},\\[2ex] L_0(2)^2 = \varrho^2\,\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}, & L_0(2)^8 = \varrho^8\,\dfrac{1-3i\sqrt{7}}{2} \quad \text{nach Gl. (52)}, \end{cases}$$

(166) $$12\gamma_2 = 15\varrho^4, \quad 8\gamma_3 = i\sqrt{7} \qquad \text{nach Gl. (53)}:$$

Dasselbe Resultat findet man auch durch die Transformation vom Grade 7 aus Gleichung (56), indem man

$$f = -2, \quad g = -1, \quad \text{also} \quad m = i\sqrt{7}, \quad L_4(7)^2 = i\sqrt{7}$$

setzt.

III. $D = -11$; einzige Classe $(2, 1, 6)$;

(167) $$\tau^2+\tau+3=0, \quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{11}}{2}, \quad n = 3;$$

$$(168)\quad \begin{cases} L_1(3)^2 = \dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}, & L_1(3)^6 = 4 - i\sqrt{11} \quad \text{nach Gl. (51)}, \\ L_0(3)^2 = \varrho^8\dfrac{1+i\sqrt{11}}{2}, & L_0(3)^6 = -4 - i\sqrt{11} \quad \text{nach Gl. (52)}, \end{cases}$$

$$(L^6 - L_0{}^6)\,(L^6 - L_1{}^6) = L^{12} + 2i\sqrt{11}\,L^6 - 27,$$

$$(169)\quad 27\gamma_3 = 7i\sqrt{11}, \quad 12\gamma_2 = 32\varrho^4 \quad \text{nach Gl. (54)}.$$

Dasselbe Resultat findet man aus der Transformation vom Grade 5, indem man

$$(170)\quad f = -1, \quad g = +1, \text{ also } m = \frac{-3+i\sqrt{11}}{2}, \quad L_2(5)^2 = \varrho^8\frac{3-i\sqrt{11}}{2},$$

$$(171)\quad f = -1, \quad g = -2, \text{ also } m = \frac{+3+i\sqrt{11}}{2}, \quad L_4(5)^2 = \varrho^8\frac{3+i\sqrt{11}}{2}$$

setzt.

IV. $D = -15$; zwei Classen: $(2, 1, 8)$, $(4, 1, 4)$.

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(172)\quad \tau^2 + \tau + 4 = 0, \quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{15}}{2}, \quad n = 4,$$

$$(173)\quad \begin{cases} L_1(4)^2 = \varrho^{16}\dfrac{1-i\sqrt{15}}{2}, & L_1(4)^4 = \varrho^8\dfrac{-7-i\sqrt{15}}{2} \quad \text{nach Gl. (51)}, \\ L_0(4)^2 = \varrho^{14}\dfrac{1+i\sqrt{15}}{2}, & L_0(4)^4 = \varrho^4\dfrac{-7+i\sqrt{15}}{2} \quad \text{nach Gl. (52)}, \end{cases}$$

oder

$$(173\text{a})\quad \begin{cases} 4L_1(4)^4 = (7+3\sqrt{5}) + i\sqrt{3}(-7+\sqrt{5}), \\ 4L_0(4)^4 = -(7+3\sqrt{5}) + i\sqrt{3}(-7+\sqrt{5}). \end{cases}$$

Schreibt man L_0 statt $L_0(4)$ und L_1 statt $L_1(4)$, so wird

$$L_0{}^4 L_1{}^4 = -16; \quad L_0{}^4 + \frac{16}{L_0{}^4} = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4,$$

$$L_1{}^4 + \frac{16}{L_1{}^4} = +\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4,$$

folglich ist

$$(174)\quad L_0(2)^{24} = -L_0{}^{12}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4, \quad L_1(2)^{24} = -L_1{}^{12}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4$$

nach Gl. (58),

$$L_0(2)^{24} : L_1(2)^{24} = -L_0{}^{12} . L_1{}^{12}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 = 4096\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8.$$

Nun ist nach Gleichung (53) ganz allgemein

$$L_0(2)^{24} . L_1{}^{24}(2) . L_\infty(2)^{24} = -4096,$$

folglich wird

$$(175)\qquad L_\infty(2)^{24} = -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 = -\frac{47-21\sqrt{5}}{2},$$

$$64\gamma_2^3 = -5\sqrt{5}(4+\sqrt{5})^3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \text{nach Gl. (53)},$$

oder

$$(176)\qquad \begin{cases} 12\gamma_2 = \varrho^4 \cdot 3\sqrt{5}(4+\sqrt{5})\sqrt[3]{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}, \\ 24\gamma_3\sqrt{3} = 7i(4-\sqrt{5})\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4. \end{cases}$$

V. $D = -19$; einzige Classe $(2, 1, 10)$,

$$(177)\qquad \tau^2 + \tau + 5 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{19}}{2},\quad n = 5,$$

$$(178)\qquad L_1(5)^2 = \varrho^8\frac{-1+i\sqrt{19}}{2},\quad L_0(5)^2 = \varrho^8\frac{-1-i\sqrt{19}}{2}$$

nach Gl. (51) und (52),

$$(L^2 - L_0^2)(L^2 - L_1^2) = L^4 + \varrho^8 L^2 + 5\varrho^{16}.$$

Durch diesen Factor muss die linke Seite von Gleichung (55) theilbar sein, folglich wird

$$(179)\qquad 12\gamma_2 = 96\varrho^4,\quad \gamma_3 = i\sqrt{19}.$$

Dasselbe Resultat findet man durch die Transformation vom Grade 7 aus Gleichung (56), indem man

$$(180)\qquad \begin{cases} f = -1,\ g = +1,\ \text{also}\ m = \dfrac{-3+i\sqrt{19}}{2} \\ \qquad\qquad \text{und}\ L_2(7)^2 = \dfrac{-3+i\sqrt{19}}{2}, \\ f = -1,\ g = -2,\ \text{also}\ m = \dfrac{+3+i\sqrt{19}}{2} \\ \qquad\qquad \text{und}\ L_6(7)^2 = \dfrac{+3+i\sqrt{19}}{2}, \end{cases}$$

$$(L^2 - L_2^2)(L^2 - L_6^2) = L^4 - i\sqrt{19}L^2 - 7$$

setzt.

VI. $D = -27$; einzige Classe $(2, 1, 14)$,

$$(181)\qquad \tau^2 + \tau + 7 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{2}\quad n = 7,$$

$$(182)\qquad L_1(7)^2 = \varrho^4\frac{1-3i\sqrt{3}}{2},\quad L_0(7)^2 = \varrho^8\frac{1+3i\sqrt{3}}{2}$$

nach Gl. (51) und (52),

oder

$$(182a)\qquad L_1(7)^2 = \frac{5 - i\sqrt{3}}{2}, \quad L_0(7)^2 = \frac{-5 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Die Gleichung (56) muss daher durch den Factor

$$(L^2 - L_0^2)(L^2 - L_1^2) = L^4 + i\sqrt{3}L^2 - 7$$

theilbar sein. Daraus folgt

$$(183)\qquad 27\gamma_3 = 11 \cdot 23 i\sqrt{3}, \quad 12\gamma_2 = \varrho^4 . 160\sqrt{3}.$$

VII. $D = -35$; zwei Classen: (2, 1, 18) und (6, 1, 6).
Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(184)\qquad \tau^2 + \tau + 9 = 0, \quad \tau = \mu = \frac{-1 + i\sqrt{35}}{2}, \quad \mathfrak{n} = 9,$$

$$(185)\quad \begin{cases} L_1(9) = -\sqrt{\dfrac{-1 + i\sqrt{35}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{5} + i\sqrt{7}}{2} & \text{nach Gl. (51)}, \\ L_0(9) = \varrho^{22}\sqrt{\dfrac{+1 + i\sqrt{35}}{2}} = \varrho^4\,\dfrac{\sqrt{5} - i\sqrt{7}}{2} & \text{nach Gl. (52)}, \end{cases}$$

$$L_1(9)^3 = 2\sqrt{5} - i\sqrt{7}, \quad L_0(9)^3 = 2\sqrt{5} + i\sqrt{7},$$

$$(186)\quad L_1(3)^{12} = L_1(9)^6(9 + 4\sqrt{5}), \quad L_0(3)^{12} = L_0(9)^6(9 + 4\sqrt{5})$$

nach Gl. (59),

$$(187)\quad \begin{cases} 27\gamma_3 = i\sqrt{7}(2\sqrt{5} - 1)(6 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})^2, \\ 12\gamma_2 = \varrho^4 . 2\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)^4. \end{cases}$$

VIII. $D = -43$; einzige Classe (2, 1, 22),

$$(188)\quad \tau^2 + \tau + 11 = 0, \quad \tau = \mu = \frac{-1 + i\sqrt{43}}{2}, \quad \mathfrak{n} = 11, \ n = 13;$$

$$(189)\quad L_2(13)^2 = \frac{3 - i\sqrt{43}}{2}, \quad L_{12}(13)^2 = \frac{3 + i\sqrt{13}}{2} \quad \text{nach den Gl. (50)}.$$

Die Gleichung (57) muss daher theilbar sein durch den Factor

$$L^4 - 3L^2 + 13.$$

Dies giebt

$$(190)\qquad 12\gamma_2 = 960\varrho^4, \quad \gamma_3 = 21 i\sqrt{43}.$$

IX. $D = -51$; zwei Classen: (2, 1, 26), (6, 3, 10).
Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(191)\quad \tau^2 + \tau + 13 = 0, \quad \tau = \mu = \frac{-1 + i\sqrt{51}}{2}, \quad \mathfrak{n} = 13, \ n = 13,$$

$$(192)\qquad L_1(13)^2 = \varrho^4\,\frac{1-i\sqrt{51}}{2},\quad L_0(13)^2 = \varrho^{-4}\,\frac{1+i\sqrt{51}}{2}$$

nach den Gl. (51) und (52),

oder

$$(192\text{a})\qquad \begin{cases} 4\,L_1(13)^2 = (1+3\sqrt{17}) + i\sqrt{3}(1-\sqrt{17}),\\ 4\,L_0(13)^2 = (1+3\sqrt{17}) - i\sqrt{3}(1-\sqrt{17}). \end{cases}$$

Desshalb muss die Gleichung (57) durch den Factor

$$L^4 - \frac{1+3\sqrt{17}}{2}\,L^2 + 13$$

theilbar sein. Dies giebt

$$(193)\qquad \begin{cases} 12\gamma_2 = \varrho^4\,.\,48(5+\sqrt{17})\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2},\\ \;9\gamma_3 = 7i\sqrt{3}\,(4+\sqrt{17})^2(8-\sqrt{17}). \end{cases}$$

X. $D = -75$; zwei Classen: (2, 1, 38), (6, 3, 14).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(194)\qquad \tau^2+\tau+19=0,\quad \tau=\mu=\frac{-1+5i\sqrt{3}}{2},\quad \mathfrak{n}=19,\quad n=25,$$

$$(195)\qquad \begin{cases} L_3\,(25) = \varrho^{-8}\sqrt{\dfrac{-5+5i\sqrt{3}}{2}} = \varrho^{-4}\sqrt{5},\\ L_{23}(25) = \varrho^{-22}\sqrt{\dfrac{+5+5i\sqrt{3}}{2}} = \varrho^4\sqrt{5}\quad \text{nach den Gl. (50)}. \end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_3(25)$, so wird

$$L+\frac{5}{L}=\sqrt{5},\quad L^2+\frac{25}{L^2}=-5,$$

$$(196)\qquad L(5)^6 = L^3(10+5\sqrt{5}) = -25\sqrt{5}\,(2+\sqrt{5})\quad \text{nach Gl. (60)},$$

$$(197)\qquad \begin{cases} 12\gamma_2 = \varrho^4\,.\,48\sqrt[4]{5}(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(4+\sqrt{5})\quad \text{nach Gl. (55)},\\ \;9\gamma_3 = i\sqrt{3}\,(2+\sqrt{5})^4(4-\sqrt{5})(8-\sqrt{5})(4\sqrt{5}-3). \end{cases}$$

XI. $D = -91$; zwei Classen: (2, 1, 46), (10, 3, 10).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(198)\qquad \tau^2+\tau+23=0,\quad \tau=\mu=\frac{-1+i\sqrt{91}}{2},\quad \mathfrak{n}=23,\quad n=25,$$

$$(199)\qquad \begin{cases} L_2\,(25) = \varrho^{18}\sqrt{\dfrac{-3+i\sqrt{91}}{2}} = \dfrac{\sqrt{13}-i\sqrt{7}}{2},\\ L_{24}(25) = \sqrt{\dfrac{+3+i\sqrt{91}}{2}} = \dfrac{\sqrt{13}+i\sqrt{7}}{2}\quad \text{nach den Gl. (50)}. \end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_2(25)$, so wird

$$L+\frac{5}{L}=\sqrt{13},\quad L^2+\frac{25}{L^2}=3,$$

$$(200)\qquad L(5)^6=L^3\cdot(18+5\sqrt{13})=L^3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^3 \text{ nach Gl. (60)},$$

$$(201)\qquad \begin{cases} 12\gamma_2=\varrho^4\,.\,6\,(9+\sqrt{13})\,(3+\sqrt{13})^3 & \text{nach Gl. (55)},\\ \gamma_3=11\,i\sqrt{7}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^4\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right). \end{cases}$$

XII. $D=-99$; zwei Classen: (2, 1, 50), (10, 1, 10).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(202)\qquad \tau^2+\tau+25=0,\quad \tau=\mu=\frac{-1+3i\sqrt{11}}{2},\quad \mathfrak{n}=25,\ n=25,$$

$$(203)\qquad \begin{cases} L_1(25)=\varrho^{44}\sqrt{\frac{-1+3i\sqrt{11}}{2}}=\varrho^{-4}\,\frac{3+i\sqrt{11}}{2} & \text{nach Gl. (51)},\\ L_0(25)=\varrho^{70}\sqrt{\frac{+1+3i\sqrt{11}}{2}}=\varrho^4\,\frac{3-i\sqrt{11}}{2} & \text{nach Gl. (52)}, \end{cases}$$

oder

$$(203\text{a})\qquad \begin{cases} 4L_1(25)=\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{11})+i(-3\sqrt{3}+\sqrt{11}),\\ 4L_0(25)=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{11})-i(-3\sqrt{3}+\sqrt{11}). \end{cases}$$

Schreibt man L statt $L_1(25)$, so wird

$$L+\frac{5}{L}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{11}),\quad L^2+\frac{25}{L^2}=\frac{1}{2}\,(1+3\sqrt{33}),$$

$$(204)\qquad L_1(5)^6=L^3\cdot(23+4\sqrt{33})=-\left(\frac{3+i\sqrt{11}}{2}\right)^3(2\sqrt{3}+\sqrt{11})^2$$

nach Gl. (60),

$$(205)\qquad \begin{cases} 12\gamma_2=\varrho^4.16\sqrt{11}(\sqrt{3}+\sqrt{11})(4+\sqrt{33})(2\sqrt{3}+\sqrt{11})\sqrt[3]{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}\\ \qquad\qquad\text{nach Gl. (55)},\\ 27\gamma_3=7.19\,i(2\sqrt{3}+\sqrt{11})^3(7+2\sqrt{33}). \end{cases}$$

XIII. $D=-115$; zwei Classen: (2, 1, 58), (10, 5, 14).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(206)\qquad \tau^2+\tau+29=0,\quad \tau=\mu=\frac{-1+i\sqrt{115}}{2},\quad \mathfrak{n}=29,\ n=49,$$

$$
(207)\quad \begin{cases} L_5\,(49) = \varrho^{-12}\sqrt{\dfrac{-9+i\sqrt{115}}{2}} = \dfrac{-\sqrt{5}-i\sqrt{23}}{2} \\[2ex] L_{45}(49) = \varrho^{-42}\sqrt{\dfrac{+9+i\sqrt{115}}{2}} = \dfrac{-\sqrt{5}+i\sqrt{23}}{2} \quad \text{nach den Gl. (50).} \end{cases}
$$

Schreibt man L statt $L_5(49)$, so wird $L + \frac{7}{L} = -\sqrt{5}$, also nach Gl. (61)

$$
(208)\quad L(7)^4 = \tfrac{1}{2}L^2 \cdot \left[7(5-\sqrt{5}) + (7-\sqrt{5})\sqrt{21-4\sqrt{5}}\right] = L^2\cdot(2+\sqrt{5})^2.
$$

Daraus folgt der Werth von γ_3 unmittelbar aus Gleichung (56). Aehnliches gilt für die folgenden Beispiele.

XIV. $D = -147$; zwei Classen: (2, 1, 74), (6, 3, 26).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$
(209)\quad \tau^2 + \tau + 37 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+7i\sqrt{3}}{2},\quad \mathfrak{n} = 37,\quad n = 49,
$$

$$
(210)\quad \begin{cases} L_4\,(49) = \varrho^{-10}\sqrt{\dfrac{-7+7i\sqrt{3}}{2}} = -i\sqrt{7}, \\[2ex] L_{46}(49) = \varrho^{-44}\sqrt{\dfrac{+7+7i\sqrt{3}}{2}} = +i\sqrt{7} \quad \text{nach den Gl. (50).} \end{cases}
$$

Schreibt man L statt $L_4(49)$, so wird $L + \frac{7}{L} = 0$, also nach Gl. (61)

$$
(211)\quad \begin{aligned} L(7)^4 &= \tfrac{1}{2}L^2\cdot(35 + 7\sqrt{21}) = -\tfrac{49}{2}(5+\sqrt{21}) \\ &= -49\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^2. \end{aligned}
$$

XV. $D = -171$; vier Classen: (2, 1, 86), (10, +3, 18), (10, −3, 18), (14, 5, 14).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$
(212)\quad \tau^2 + \tau + 43 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+3i\sqrt{19}}{2},\quad \mathfrak{n} = 43,\quad n = 49,
$$

$$
(213)\quad \begin{cases} L_3\,(49) = \varrho^{-8}\sqrt{\dfrac{-5+3i\sqrt{19}}{2}} = \varrho^{-8}\,\dfrac{3+i\sqrt{19}}{2}, \\[2ex] L_{47}(49) = \varrho^{-46}\sqrt{\dfrac{+5+3i\sqrt{19}}{2}} = \varrho^{8}\,\dfrac{3-i\sqrt{19}}{2} \quad \text{nach den Gl. (50).} \end{cases}
$$

Schreibt man L statt $L_3(49)$, so wird $L + \frac{7}{L} = \frac{1}{2}(-3+\sqrt{57})$, also nach Gl. (61)

$$4L(7)^4 = L^2 \cdot \left[7(7+\sqrt{57}) + (11+\sqrt{57})\sqrt{15+2\sqrt{57}}\right],$$

oder

$$(214)\quad 16L(7^4) = L^2 \cdot \left[(7+\sqrt{57}) + (-5+\sqrt{57})\sqrt{15+2\sqrt{57}}\right]^2.$$

XVI. $D = -187$; zwei Classen: (2, 1, 94), (14, 3, 14).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(215)\quad \tau^2 + \tau + 47 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{187}}{2},\quad \mathfrak{n} = 47,\ n = 49;$$

$$(216)\left\{\begin{aligned} L_2(49) &= \varrho^{-6}\sqrt{\frac{-3+i\sqrt{187}}{2}} = \frac{\sqrt{17}-i\sqrt{11}}{2},\\ L_{48}(49) &= \sqrt{\frac{+3+i\sqrt{187}}{2}} = \frac{\sqrt{17}+i\sqrt{11}}{2}\end{aligned}\right. \quad \text{nach den Gl. (50).}$$

Schreibt man L statt $L_2(49)$, so wird $L + \frac{7}{L} = \sqrt{17}$, also nach Gl. (61)

$$(217)\quad L(7)^4 = \tfrac{1}{2}L^2 \cdot \left[7(5+\sqrt{17}) + (7+\sqrt{17})\sqrt{21+4\sqrt{17}}\right]$$
$$= \left(\frac{\sqrt{17}-i\sqrt{11}}{2}\right)^2 (4+\sqrt{17})^2.$$

XVII. $D = -195$; vier Classen: (2, 1, 98), (14, 1, 14), (6, 3, 34), (10, 5, 22).

Der ersten Classe entsprechen die Gleichungen

$$(218)\quad \tau^2 + \tau + 49 = 0,\quad \tau = \mu = \frac{-1+i\sqrt{195}}{2},\quad \mathfrak{n} = n = 49;$$

$$(219)\left\{\begin{aligned} L_1(49) &= \varrho^{-4}\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{195}}{2}} = \varrho^{8}\,\frac{-\sqrt{13}-i\sqrt{15}}{2} \quad \text{nach Gl. (51),}\\ L_0(49) &= \varrho^{-2}\sqrt{\frac{+1+i\sqrt{195}}{2}} = \varrho^{-8}\frac{-\sqrt{13}+i\sqrt{15}}{2} \quad \text{nach Gl. (52).}\end{aligned}\right.$$

Schreibt man L statt $L_1(49)$, so wird $L + \frac{7}{L} = \frac{1}{2}(3\sqrt{5}+\sqrt{13})$, also nach Gl. (61)

$$4L(7)^4 = L^2 \cdot \Big[7(10+3\sqrt{5}+\sqrt{13})$$
$$+ (14+3\sqrt{5}+\sqrt{13})\sqrt{21+6\sqrt{5}+2\sqrt{13}}\Big],$$

$$8L(7)^4 = L^2 \cdot [14(10+3\sqrt{5}+\sqrt{13})$$
$$+ (14+3\sqrt{5}+\sqrt{13})(-1+\sqrt{5}+\sqrt{13}+\sqrt{65})],$$

oder

$$16L(7)^4 = L^2 \cdot (3 + \sqrt{13})^2 (3 + \sqrt{5})^2. \tag{220}$$

Es sind hier nur diejenigen Beispiele behandelt worden, die sich mit Hülfe der L-Gleichungen für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 25$ und 49 durchführen lassen. Man kann natürlich die Zahl der Beispiele vermehren, wenn man noch andere L-Gleichungen benutzt. Da aber in den folgenden Abhandlungen andere, für die Berechnung der singulären Invarianten noch geeignetere Methoden erläutert werden sollen, so mögen vorläufig weitere Beispiele übergangen werden.

Hannover, im April 1891.

Zur Theorie der Krümmung der Flächen.

Von

A. Voss in Würzburg.

Einleitung.

Die Theorie der Krümmung der Flächen geht von der charakteristischen Eigenschaft einer Oberfläche aus, dass die Normalen derselben in benachbarten Punkten einander nicht parallel sind. Diese Auffassung führt sofort nicht allein zu den behannten Sätzen über die Krümmungshalbmesser der ebenen Schnitte der Fläche, sondern liefert auch den Begriff des Krümmungsmasses, obwohl derselbe seine principielle Bedeutung nicht so sehr seiner geometrischen Deutung im dreifach ausgedehnten Raume, sondern dem inneren Zusammenhang verdankt, in welchem derselbe mit den Massverhältnissen der zweidimensionalen Fläche steht.

Als eine ebenso fundamentale Eigenschaft einer krummen Fläche kann man indessen auch die ansehen, *dass vier beliebige Punkte derselben im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen.*

Betrachtet man nun den Inhalt des von solchen vier Punkten gebildeten Tetraeders als eine für die Krümmung charakteristische Grösse, so entsteht die Frage: *In wiefern hängt der Inhalt eines unendlich kleinen auf der Fläche gewählten Tetraeders mit den eigentlichen Krümmungsverhältnissen zusammen?*

Um diese Frage näher zu präcisiren, sei zunächst eine Ecke P des Tetraeders in einen willkürlichen nicht singulären Punkt der Fläche verlegt. Wählt man dann auf derselben ein krummliniges Coordinatensystem und betrachtet die beiden durch P gehenden Coordinatenlinien u, v derselben, so bestimmen irgend zwei je auf diesen gewählte Punkte P_1 und P_2 mit demjenigen Punkte P_3, in welchem sich die zu P_1 und P_2 gehörigen Coordinatenlinien schneiden, ein Tetraeder, dessen Inhalt durch T bezeichnet werden mag. Die Grösse T, dividirt durch die zweite Potenz der Fläche des durch PP_1P_2 bestimmten Parallelogramms, nähert sich, wenn man den Punkt P_3 in beliebiger

Weise gegen P convergiren lässt, im allgemeinen einer von der Richtung der Curve PP_3 unabhängigen von Null verschiedenen Grenze, die zunächst mit den Krümmungsverhältnissen in P keinen Zusammenhang hat. In dem Falle aber, wo die Coordinatenlinien u, v ein *conjugirtes System* auf der Fläche bilden, ist diese Grenze beständig gleich *Null*. Man wird nun, wenn man ausserdem noch durch das Quadrat der Länge der Curve PP_3 dividirt, zu einem neuen Grenzwerthe geführt, den ich als *Parameterkrümmung der Fläche* bezeichne, da derselbe von der Wahl der Parameter u, v im allgemeinen abhängig sein wird. In dem Folgenden soll nun insbesondere untersucht werden, *unter welchen Umständen die Parameterkrümmung zugleich die Normalkrümmung*, im gewöhnlichen Sinne nach der Richtung PP_3 gemessen, *ausdrückt*, also von der Wahl der Parameter u, v — bis auf einen Factor etwa — unabhängig wird. Da die Grösse des Tetraederinhaltes projectiven Transformationen gegenüber einen *invarianten Charakter besitzt*, so müssen sich bei dieser Auffassungsweise *Zusammenhänge zwischen metrischen und projectiven Eigenschaften der krummen Fläche* ergeben, denen nachzugehen mir nicht ohne Interesse für die allgemeine Theorie der Oberflächen schien.

Diess veranlasste zunächst eine im § III geführte Untersuchung über den *Einfluss, welchen die partiellen Differentialgleichungen einer Fläche bei Anwendung einer solchen Transformation erfahren.* Dabei ergaben sich gewisse aus den ersten und zweiten Differentialquotienten des Längenelementes gebildete *Invarianten*, deren Verhalten zugleich für die den Ausgangspunkt bildende Frage charakteristisch ist. Von diesen *Differentialinvarianten**) scheinen mir besonders erwähnenswerth die beiden Invarianten der Laplace'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die neuerdings von Herrn Darboux (Théorie générale des surfaces tome II) nach anderen Richtungen hin ausführlich behandelt worden sind.

In § V ist sodann die partielle Differentialgleichung entwickelt, von der die Bestimmung aller conjugirten Coordinatensysteme abhängt, in Bezug auf die die Parameterkrümmung mit der Normalkrümmung bis auf einen Factor coincidirt, d. h. in Bezug auf die *jene beiden Invarianten gleich sind.* Die Ermittelung solcher Coordinatensysteme ist auf einigen einfacheren Flächengattungen in § VI ausgeführt.

---

*) Als Differentialinvarianten sollen hier überhaupt alle Functionen der Differentialquotienten und der Variabeln bezeichnet werden, welche bei einer Transformation bis auf einen Factor in gleichgebildete Ausdrücke übergehen, ohne dass dabei die Natur dieses Factors beschränkt gedacht wird. Solche Differentialinvarianten sind z. B. bei *projectiven Transformationen* das *Flächenelement*, das *Krümmungsmass*, etc....; die beiden im Texte erwähnten Invarianten sind *absolute*.

Das Problem des § V steht übrigens in Zusammenhang mit der Transformation einer Fläche in andere Flächen, welche dasselbe sphärische Bild besitzen.

Die Parameterkrümmung einer Fläche lässt sich aber auch in *dualistischer Weise* definiren, wenn man anstatt von vier Punkten, von *vier Tangentenebenen* derselben ausgeht, welche wieder ein Tetraeder bilden. Mit der Theorie der projectiven Ebenencoordinaten und den Invarianten derselben beschäftigt sich § VIII. *Die Parameterkrümmung selbst ist keine dualistisch sich selbst entsprechende Grösse;* es ergiebt sich aber die Existenz *dualistischer Coordinatensysteme auf gewissen Flächen*, für welche die Parameterkrümmung in beiderlei Sinn mit der Normalkrümmung coincidirt. Diese Flächen lassen mehrfache Transformationen in Flächen von derselben Eigenschaft zu, welche in den §§ VII und X so weit behandelt sind, als diess für den vorliegenden Zweck erforderlich schien.

§ I.

Der Inhalt eines von vier Punkten der Fläche gebildeten Tetraëders.

Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes P, für den die Variabeln u, v die Werthe u_0, v_0 haben, durch x, y, z; die von P_1, dem Fortschreiten auf der Curve u*) entsprechend, durch $x + D_u x$, $y + D_u y$, $z + D_u z$; ebenso die von P_2 durch $x + D_v x, \ldots$, und endlich die von P_3 durch

$$x + D_{uv} x, \quad y + D_{uv} y, \quad z + D_{uv} z,$$

so ist der Inhalt T des von den vier Punkten P, P_1, P_2, P_3 gebildeten Tetraeders durch die Gleichung

$$6T = \begin{vmatrix} D_u x & D_u y & D_u z \\ D_v x & D_v y & D_v z \\ D_{uv} x & D_{uv} y & D_{uv} z \end{vmatrix}$$

gegeben. Bei der Entwickelung dieses Ausdrucks soll vorausgesetzt werden, dass die Coordinaten der Fläche in der Nähe des Punktes P Potenzreihen nach $u - u_0$, $v - v_0$ sind, so dass also, wenn an Stelle von u, v die Ausdrücke $u_0 + h$, $v_0 + k$ eingeführt werden, eine Entwickelung dieser Coordinaten nach dem Taylor'schen Satze möglich ist. Bezeichnet man nun die partiellen Differentialquotienten von x, y, z für den Punkt P durch angehängte Indices, so dass

*) Als Curve $u(v)$ soll immer diejenige bezeichnet werden, längs der $u(v)$ allein variabel gedacht wird.

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \cdots$$

$$x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad x_{uvv} = \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}, \cdots$$

ist, so hat man

$$D_u x = h x_u + \frac{h^2}{2} x_{uu} + \frac{h^3}{6} x_{uuu} + \frac{h^4}{24} x_{uuuu} + \cdots,$$

$$D_v x = k x_v + \frac{k^2}{2} x_{vv} + \frac{k^3}{6} x_{vvv} + \frac{k^4}{24} x_{vvvv} + \cdots,$$

$$\begin{aligned} D_{uv} x - D_u x - D_v x = {} & hk x_{uv} + \frac{1}{2}(h^2 k x_{uuv} + h k^2 x_{uvv}) \\ & + \frac{1}{6}(h^3 k x_{uuuv} + h k^3 x_{uvvv}) \\ & + \frac{1}{4} x_{uuvv} h^2 k^2 + \cdots, \end{aligned}$$

wenn die Entwickelung bei den *Gliedern vierter Dimension* abgebrochen wird.

Bezeichnet man ferner eine dreireihige Determinante von der Form

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

allgemein durch das Symbol*)

$$(a_1 \; a_2 \; a_3),$$

so wird $6T$ gleich dem mit $h^2 k^2$ multiplicirten Ausdrucke

$$\begin{aligned} (x_u x_v x_{uv}) & + \frac{h}{2}[(x_{uu} x_v x_{uv}) + (x_u x_v x_{uuv})] \\ & + \frac{k}{2}[(x_u x_{vv} x_{uv}) + (x_u x_v x_{uvv})] \\ & + \frac{hk}{4}[(x_{uu} x_v x_{uvv}) + (x_u x_{vv} x_{uuv}) + (x_{uu} x_{vv} x_{uv}) \\ & \qquad + (x_u x_v x_{uuvv})] \\ & + \frac{h^2}{12}[2(x_{uuu} x_v x_{uv}) + 3(x_{uu} x_v x_{uuv}) + 2(x_u x_v x_{uuuv})] \\ & + \frac{k^2}{12}[2(x_u x_{vvv} x_{uv}) + 3(x_u x_{vv} x_{uvv}) + 2(x_u x_v x_{uvvv})] \\ & + \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

(2) $$\Phi = (x_u x_v x_{uv}),$$

*) In anderen Fällen kann es zweckmässiger sein, diese Determinante durch (abc) zu bezeichnen. Auch von dieser Ausdrucksweise wird im Folgenden Gebrauch gemacht werden.

so wird

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
\Phi_u &= (x_{uu} x_v x_{uv}) + (x_u x_v x_{uuv}),\\
\Phi_v &= (x_u x_{vv} x_{uv}) + (x_u x_v x_{uvv}),\\
\Phi_{uu} &= (x_{uuu} x_v x_{uv}) + 2(x_{uu} x_v x_{uuv})\\
&\quad + (x_u x_{uv} x_{uuv}) + (x_u x_v x_{uuuv}).\\
\Phi_{uv} &= (x_{uu} x_{vv} x_{uv}) + (x_{uu} x_v x_{uvv})\\
&\quad + (x_u x_{vv} x_{uuv}) + (x_u x_v x_{uuvv})\\
\Phi_{vv} &= (x_u x_{vvv} x_{uv}) + 2(x_u x_{vv} x_{uvv})\\
&\quad + (x_{uv} x_v x_{uvv}) + (x_u x_v x_{uvvv});
\end{aligned}
$$

und hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{6T}{h^2 k^2} &= \Phi + \frac{h}{2}\Phi_u + \frac{k}{2}\Phi_v + \frac{hk}{4}\Phi_{uv}\\
&\quad + \frac{h^2}{12}\left[2\Phi_{uu} - (x_{uu} x_v x_{uuv}) - 2(x_u x_{uv} x_{uuv})\right]\\
&\quad + \frac{k^2}{12}\left[2\Phi_{vv} - (x_u x_{vv} x_{uvv}) - 2(x_{uv} x_v x_{uvv})\right] + \cdots,
\end{aligned}
$$

wobei die Glieder *zweiter* Ordnung rechts vollständig hingeschrieben sind. Betrachtet man hier h und k als Potenzreihen einer Variabelen t,

$$
h = h' t + \frac{h''}{2} t^2 + \frac{h'''}{6} t^3 + \cdots,
$$

$$
k = k' t + \frac{k''}{2} t^2 + \frac{k'''}{6} t^3 + \cdots,
$$

so ergiebt sich die folgende für alle analytischen von P ausgehenden Curven, auf denen der Punkt P_3 liegt, gültige Entwickelung

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
6T &= h'^2 k'^2 t^4 \Phi + \frac{t^5}{2}\left[h'^2 k'^2 \frac{d\Phi}{dt} + 2\Phi a\right]\\
&\quad + t^6 \Big\{ \frac{h'^4 k'^2}{6}\Big(\Phi_{uu} - (x_u x_{uv} x_{uuv}) - \frac{1}{2}(x_{uu} x_v x_{uuv})\Big)\\
&\qquad + \frac{h'^2 k'^4}{6}\Big(\Phi_{vv} - (x_{uv} x_v x_{uvv}) - \frac{1}{2}(x_u x_{vv} x_{uvv})\Big)\\
&\qquad + \frac{h'^3 k'^3}{4}\Big\{\Phi_{uv} + \alpha\Phi_u + \beta\Phi_v + \gamma\Phi\Big\} + \cdots
\end{aligned}
$$

bis zu den Gliedern 6^{ter} Dimension in t. Die Coefficienten a, α, β, γ welche aus den Differentialquotienten der h und k für $t = 0$ in einfacher Weise zusammengesetzt sind, kommen im Folgenden nicht in Betracht.

Zur weiteren Entwickelung des Coefficienten von t^6 in (4) bezeichne ich das *Quadrat des Längenelementes der Fläche* durch

$$
ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,
$$

wo nach Voraussetzung e, f, g analytische Functionen von u, v sind, und zugleich

$$eg - f^2 = \mathsf{H}$$

positiv ist, und setze*)

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_{uu} &= Ax_u + A_1 x_v + Ep, \\ x_{uv} &= Bx_u + B_1 x_v + Fp, \\ x_{vv} &= Cx_u + C_1 x_v + Gp, \end{aligned}$$

nebst den analogen Ausdrücken für die zweiten Differentialquotienten von y und z, welche sich durch gleichzeitige Vertauschung von x mit y und z und von p mit q und r ergeben. Dabei mag zunächst noch nicht die aus der Flächentheorie bekannte Bedeutung der Coefficienten auf der rechten Seite in (5) berücksichtigt werden.

Man findet nun nach (5)

$$\begin{aligned} (x_{uu} x_v x_{uuv}) &= AB_1 \Phi + (x_u x_v p_u) AF + EF(p x_v p_u) \\ &\quad + (x_u x_v p)(AF_u - EB_u - EBB_1), \\ (x_u x_{uv} x_{uuv}) &= (x_u x_v p)[BB_1 E + B_1 F_u - FB_1 A - FB_u] \\ &\quad + (x_u x_v p_u) B_1 F + (x_u p p_u) F^2, \\ (x_{uv} x_v x_{uvv}) &= (x_u x_v p)[BB_1 G + BF_v - FB_1 C - JB_v] \\ &\quad + (x_u x_v p_v) BF + (p x_v p_v) F^2, \\ (x_u x_{vv} x_{uvv}) &= BC_1 \Phi + (x_u x_v p_v) C_1 F + GF(x_u p p_v) \\ &\quad + (x_u x_v p)[C_1 F_v - G_1 B_{1v} - BB_1 G], \end{aligned}$$

und endlich

$$\Phi = (x_u x_v p) F.$$

Für den Fall, wo Φ überhaupt gleich Null ist, findet man daher:

$$(6)\qquad \begin{aligned} (x_{uu} x_v x_{uuv}) &= -(x_u x_v p) E(B_u + BB_1), \\ (x_u x_{uv} x_{uuv}) &= (x_u x_v p) BB_1 E, \\ (x_{uv} x_v x_{uvv}) &= (x_u x_v p) BB_1 G, \\ (x_u x_{vv} x_{uvv}) &= -(x_u x_v p) G(B_{1v} + BB_1), \end{aligned}$$

so dass in diesem Falle der Coefficient von t^6 ausschliesslich durch E, G und die beiden Grössen B, B_1 ausgedrückt wird.

---

*) Diese Formeln treten in anderer Bezeichnung schon bei Gauss (Disq. gen. c. superf. art. 11), sodann zuerst bei Brioschi, Sulla teoria delle Coordinate curvilinee, Ann. di Mat. Ser. II, T. I, S. 1, 1867; in der hier gewählten bei Hoppe, Principien d. Flächentheorie, Grunert's Archiv, Bd. 59, S. 321, 1876, auf. Die Gleichungen (5) nenne ich *die partiellen Differentialgleichungen der Fläche*, A, A_1; B, B_1; C, C_1 ihre *charakteristischen Coefficienten*; die Grössen e, f, g; E, F, G heissen nach Herrn Hoppe die *Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung*; letzterer Bezeichnung hat sich auch Herr Knoblauch in seinem Werke „Theorie der krummen Flächen" angeschlossen.

Bedeuten, wie fortan vorausgesetzt werden soll, p, q, r in (5) die *Richtungscosinus der Normalen der Fläche im Punkte P*, so ist bekanntlich

$$(1)\qquad \begin{aligned} p x_u + q y_u + r z_u &= 0, \\ p x_v + q y_v + r z_v &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= p x_{uu} + q y_{uu} + r z_{uu}, \\ &= -(p_u x_u + q_u y_u + r_u z_u); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= -p x_{uv} + q y_{uv} + r z_{uv}, \\ &= -(p_u x_v + q_u y_v + r_u z_v) = -(p_v x_u + q_v y_u + r_v z_u); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= p x_{vv} + q y_{vv} + r z_{vv}, \\ &= -(p_v x_v + q_v y_v + r_v z_v) \end{aligned}$$

und

$$(x_u x_v p) = +\sqrt{eg - f^2} = \sqrt{\mathsf{H}}.$$

Von den drei Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (5) liefert bekanntlich eine die Darstellung von $EG - F^2$ durch die Coefficienten e, f, g und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten nach u und v, nämlich den Zähler des Krümmungsmasses der Fläche im Punkte P. Die beiden anderen Integrabilitätsbedingungen gebe ich in der für das Folgende bequemen Form:

$$(8)\qquad \begin{aligned} BF + B_1 G - CE - C_1 F + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} &= 0, \\ BE + B_1 F - AG_1 - AF + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$(9)\qquad \begin{aligned} B + C_1 &= \frac{\partial l\sqrt{\mathsf{H}}}{\partial v}, \text{*)} \\ B_1 + A &= \frac{\partial l\sqrt{\mathsf{H}}}{du}, \end{aligned}$$

was übrigens auch leicht vermittelst der Ausdrücke für die A, A_1; B, B_1; C, C_1 zu bestätigen ist, die durch die Gleichungen:

*) Man kann zu diesen Formeln noch die folgenden hinzufügen

$$A_1 \frac{f}{e} = B_1 - \frac{\partial l\left(\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{e}}\right)}{\partial u},$$

$$C \frac{f}{g} = B - \frac{\partial l\left(\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{g}}\right)}{\partial v},$$

welche sich bei manchen Untersuchungen nützlich erweisen.

(10) $$\begin{aligned} 2A\mathsf{H} &= ge_u - 2ff_u + fe_v, \\ 2A_1\mathsf{H} &= 2ef_u - ee_v - fe_u, \\ 2B\mathsf{H} &= ge_v - fg_u, \\ 2B_1\mathsf{H} &= eg_u - fe_v, \\ 2C\mathsf{H} &= 2gf_v - gg_u - fg_v, \\ 2C_1\mathsf{H} &= eg_v - 2ff_v + fg_u \end{aligned}$$

gegeben sind.*)

§ II.

Begriff der Parameterkrümmung einer Fläche.

Nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln erhält man zunächst, wenn der Inhalt des Parallelogramms PP_1P_2 durch

$$\Omega = t^2 h_1 k_1 \sqrt{\mathsf{H}} + \cdots$$

bezeichnet wird

$$\lim\left(\frac{T}{\Omega^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{6}\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}},$$

in welcher Weise man auch den Punkt P_3 an P heranrücken lässt. Dieser Grenzwerth hat im Allgemeinen *keinen Zusammenhang* mit den Krümmungsverhältnissen der Fläche. Setzt man indessen voraus, *dass die eine Schaar der Curven u, v*, etwa die Curven u, *von Haupttangentencurven der Fläche gebildet ist*, so ist das Krümmungsmass

$$K = -\frac{F^2}{\mathsf{H}}$$

und somit ergiebt sich für alle Coordinatensysteme dieser Art als charakteristischer Grenzwerth

$$\lim\left(\frac{T}{\Omega^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{6}\sqrt{-K}.$$

Wird aber, was von nun an beständig geschehen soll, *F als identisch gleich Null, d. h. ein conjugirtes von Curven u, v gebildetes System von Coordinatenlinien* vorausgesetzt, so verschwindet, wie gezeigt, T von der 6ten Ordnung. Um zu einem Grenzwerthe zu gelangen, werde ich daher noch *durch das Quadrat der Länge S derjenigen von P nach P_3 auf der Fläche gezogenen analytischen Curve dividiren*, welche durch die Variabele t bestimmt ist. Dann wird

$$S^2 = t^2[eh'^2 + 2fh'k' + gv'^2] + t^3[\,] + \cdots$$

und man erhält unter Berücksichtigung der in (6) gegebenen Ausdrücke aus (4)

$$\lim\left(\frac{72\,T}{S^2\Omega^2}\right)_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{\mathsf{H}}}\,\frac{E(B_u - B_1B)\,h'^2 + G(B_{1v} - BB_1)\,k'^2}{eh'^2 + 2fh'k' + gk'^2}.$$

*) Vgl. Hoppe, a. a. O.

Diesen Ausdruck $\frac{1}{\mathsf{P}}$, *also den Grenzwerth des 72-fachen Tetraederinhaltes dividirt durch das Quadrat des Längen- und Flächenelementes* bezeichne ich als *Parameterkrümmung der Fläche im Punkte P nach der Richtung* PP_3. Derselbe ist — und diess ist eine besondere Eigenschaft der conjugirten Curvensysteme — *nur abhängig von der Richtung des Elementes* $du = h'dt$, $dv = k'dt$, wird aber im Allgemeinen natürlich für jedes conjugirte System seinen *besonderen Werth* haben.

Bezeichnet man die Coefficienten

$$B_u - BB_1,$$
$$B_{1v} - BB_1,$$

durch α, β, so folgt aus der definiten Natur des Längenelementes sofort:

Die Parameterkrümmung ist für zwei zu einander senkrechte, stets reelle Richtungen, ein Maximum oder Minimum. Das Product dieser Hauptparameterkrümmungen ist gleich

$$K\frac{\alpha\beta}{\mathsf{H}}.$$

Die Parameterkrümmung nach jeder anderen Richtung kann vermöge dieser Hauptparameterkrümmungen in analoger Weise ausgedrückt werden, wie diess durch den Euler'schen Satz für die Normalkrümmungen geschieht. Ebenso existiren im Allgemeinen zwei Richtungen, für welche die Parameterkrümmung Null ist; sie sind den asymptotischen Richtungen zu vergleichen und zeichnen sich dadurch aus, dass der Inhalt des Tetraeders T eine unendlich kleine Grösse *siebenter* Ordnung wird.

§ III.

Die projective Transformation einer in Punktcoordinaten dargestellten Fläche und ihre Differentialinvarianten.

Die Ausdrücke α, β, welche in dem Ausdrucke für die Parameterkrümmung auftreten, lassen sich unter einem zwiefachen Gesichtspunkte betrachten. Sie sind *erstens Invarianten bei beliebigen Biegungsdeformationen der Fläche*, da sie überhaupt nur aus den Coefficienten des Längenelementes zusammengesetzt sind. Wegen ihres Zusammenhanges mit dem Tetraederinhalt lässt sich aber zweitens vermuthen, dass sie auch *bei collinearer Umformung der Fläche Eigenschaften der Invarianz* besitzen werden, so lange nur *conjugirte* Curvensysteme als Coordinatenlinien zu Grunde gelegt sind. Diese sollen im Folgenden entwickelt werden.*)

*) Die Theorie der projectiven Umformung einer Fläche scheint bisher nicht behandelt zu sein. Implicite finden sich manche hierher gehörige Bemerkungen in Herrn Darboux's grossem Werke: „Leçons sur la théorie générale des surfaces", besonders im Livre II des ersten Bandes.

Setzt man

$$\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1,$$
$$\eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2,$$
$$\zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3,$$
$$t = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4,$$

so sind

$$x' = \frac{\xi}{t},$$
$$y' = \frac{\eta}{t},$$
$$z' = \frac{\zeta}{t}$$

die Coordinaten der Punkte einer zu F collinear verwandten Fläche $[F]$.

Aus den partiellen Differentialgleichungen I, (5) folgt nun

$$\xi_{uu} = A\xi_u + A_1\xi_v + E(a_1 p + b_1 q + c_1 r),$$
$$\xi_{uv} = B\xi_u + B_1\xi_v + F(a_1 p + b_1 q + c_1 r),$$
$$\xi_{vv} = C\xi_u + C_1\xi_v + G(a_1 p + b_1 q + c_1 r),$$

nebst den analogen Gleichungen für die Differentialquotienten der η, ζ, t, wenn gleichzeitig die Indices der a, b, c in unmittelbar ersichtlicher Weise abgeändert werden. Es wird daher

$$\begin{aligned}
x'_{uu} &= \left(A - 2\frac{\partial lt}{\partial u}\right) x'_u + A_1 x'_v \\
&\quad + \frac{E}{t}[a_1 p + b_1 q + c_1 r - x'(a_4 p + b_4 q + c_4 r)], \\
(1)\quad x'_{uv} &= \left(B - \frac{\partial lt}{\partial v}\right) x'_u + \left(B_1 - \frac{\partial lt}{\partial u}\right) x'_v \\
&\quad + \frac{F}{t}[a_1 p + b_1 q + c_1 r - x'(a_4 p + b_4 q + c_4 r)], \\
x'_{vv} &= C x'_u + \left(C_1 - 2\frac{\partial lt}{\partial v}\right) x'_v \\
&\quad + \frac{G}{t}[a_1 p + b_1 q + c_1 r - x'(a_4 p + b_4 q + c_4 r)],
\end{aligned}$$

nebst den analogen Formeln für y' und z'.

Die Richtungscosinus P, Q, R der Normalen der transformirten Fläche sind gleichzeitig gegeben durch die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned}
P(a_1 - x'a_4) + Q(a_2 - y'a_4) + R(a_3 - z'a_4) &= \lambda p, \\
P(b_1 - x'b_4) + Q(b_2 - y'b_4) + R(b_3 - z'b_4) &= \lambda q, \\
P(c_1 - x'c_4) + Q(c_2 - y'c_4) + R(c_3 - z'c_4) &= \lambda r, \\
P^2 + Q^2 + R^2 &= 1,
\end{aligned}$$

in denen λ eine noch zu bestimmende Grösse bedeutet. Demnach werden, falls man die Grössen $A, B, C, \ldots, E, F, G$ für die transformirte Fläche durch $[A], [B], [C] \ldots [G]$ bezeichnet,

$$[E] = Px'_{uu} + Qy'_{uu} + Rz'_{uu}, \text{ etc.} \ldots$$

also nach (1)

$$(3) \qquad \begin{aligned} [E] &= \frac{\lambda}{t} E, \\ [F] &= \frac{\lambda}{t} F, \\ [G] &= \frac{\lambda}{t} G. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen nur den übrigens fast selbstverständlichen Satz, dass der Differentialausdruck

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + \delta u\,dv) + G\,dv\,\delta v$$

der bei beliebigen Transformationen der u, v eine *absolute Invariante* ist, bei einer *projectiven Umformung* bis auf den Factor $\frac{\lambda}{t}$ in den aus den Grössen $[E]$, $[F]$, $[G]$ gebildeten übergeht.

Um die Gleichungen (1) auf die Form des § I, (5)

$$\begin{aligned} x'_{uu} &= [A]\,x'_u + [A_1]\,x'_v + P[E], \\ x'_{uv} &= [B]\,x'_u + [B_1]\,x'_v + P[F], \\ x'_{vv} &= [C]\,x'_u + [C_1]\,x'_v + P[G] \end{aligned}$$

zu bringen, setze man nach (2)

$$(4) \qquad \begin{aligned} P &= s_1(a_1 - a_4x') + s_2(b_1 - b_4x') + s_3(c_1 - x'c_4), \\ Q &= s_1(a_2 - a_4y') + s_2(b_2 - b_4y') + s_3(c_2 - y'c_4), \\ R &= s_1(a_3 - a_4z') + s_3(b_3 - b_4z') + s_3(c_3 - z'c_4), \\ \frac{1}{\lambda} &= s_1p + s_2q + s_3r, \end{aligned}$$

wo die s_1, s_2, s_3 neue Unbekannte bedeuten. Aber aus der letzten Gleichung in (4) folgt in Rücksicht auf die Definition der p, q, r (§ I, (7))

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{p}{\lambda} + mx_u + nx_v, \\ s_2 &= \frac{q}{\lambda} + my_u + ny_v, \\ s_3 &= \frac{r}{\lambda} + mz_u + nz_v, \end{aligned}$$

wo unter m und n wieder geeignete Grössen zu verstehen sind*). Trägt man diese Werthe in die Gleichungen (4) ein, so wird

*) Ueber eine einfachere Bestimmung der Grössen m, n als die hier gegebene vergleiche die Formeln (9).

$$
\begin{aligned}
&P\frac{\lambda}{t} = [a_1 p + b_1 q + c_1 r - x'(a_4 p + b_4 q + c_4 r)]\,\frac{1}{t}\\
&\qquad + \lambda m\, x_u' + \lambda n\, x_v',\\
\text{(4a)}\quad &Q\frac{\lambda}{t} = [a_2 p + b_2 q + c_2 r - y'(a_4 p + b_4 q + c_4 r)]\,\frac{1}{t}\\
&\qquad + \lambda m\, y_u' + \lambda n\, y_v',\\
&R\frac{\lambda}{t} = [a_3 p + b_3 q + c_3 r - z'(a_4 p + b_4 q + c_4 r)]\,\frac{1}{t}\\
&\qquad + \lambda m\, z_u' + \lambda n\, z_v';
\end{aligned}
$$

also, wenn man diese Werthe in (1) einträgt,

$$
\begin{aligned}
&x_{uu}' = \left(A - 2\frac{\partial lt}{\partial u} - \lambda m E\right) x_u' + (A_1 - \lambda n E)\, x_v' + P[E],\\
\text{(5)}\quad &x_{uv}' = \left(B - \frac{\partial lt}{\partial v} - \lambda m F\right) x_u' + \left(B_1 - \frac{\partial lt}{\partial u} - \lambda n F\right) x_v' + P[F],\\
&x_{vv}' = (C - \lambda m G)\, x_u' + \left(C_1 - 2\frac{\partial lt}{\partial v} - \lambda n G\right) x_v' + P[G],
\end{aligned}
$$

nebst den analogen Gleichungen für y und z, wenn man gleichzeitig P mit Q und R vertauscht.

Für die transformirte Fläche ergeben sich mithin die Gleichungen

$$
\text{(6)}\qquad
\begin{aligned}
[A] &= A - 2\frac{\partial lt}{\partial u} - \lambda m E,\\
[A_1] &= A_1 - \lambda n E,\\
[B] &= B - \frac{\partial lt}{\partial v} - \lambda m F,\\
[B_1] &= B_1 - \frac{\partial lt}{\partial u} - \lambda n F,\\
[C] &= C - \lambda m G,\\
[C_1] &= C_1 - 2\frac{\partial lt}{\partial v} - \lambda n G.
\end{aligned}
$$

Für die für das *Flächenelement* charakteristische Grösse

$$\sqrt{[\mathrm{H}]} = \sqrt{[e]\,[g] - [f^2]} = (x_u' x_v' P)$$

ergiebt sich nach (4a)

$$
\frac{1}{\lambda t^2}
\begin{vmatrix}
(a_1 - x' a_4)\, x_u + (b_1 - x' b_4)\, y_u + (c_1 - c_4 x')\, z_u & \cdots\\
(a_1 - x' a_4)\, x_v + (b_1 - x' b_4)\, y_v + (c_1 - c_4 x')\, z_v & \cdots\\
(a_1 - x' a_4)\, p + (b_1 - x' b_4)\, q + (c_1 - c_4 x')\, r & \cdots
\end{vmatrix}
$$

so dass nach einfacher Umformung

$$\text{(7)}\qquad \sqrt{[\mathrm{H}]} = \frac{D\sqrt{\mathrm{H}}}{\lambda t^3}$$

wird, wenn man mit D die Determinante $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ bezeichnet.

Setzt man ferner

$$-s = px + qy + rz,$$

so kann man den Gleichungen (2) die Relation

$$P(d_1 - x'd_4) + Q(d_2 - y'd_4) + R(d_3 - z'd_4) = \lambda s$$

hinzufügen. Multiplicirt man nun die Gleichungen (2) und diese letzte Gleichung mit den adjungirten Elementen der Determinante D, welche durch griechische Buchstaben mit demselben Index bezeichnet sein mögen (so dass z. B. α_1 die adjungirte Determinante von a_1 ist) so folgt

$$\begin{aligned} PD &= \lambda[\alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r + \delta_1 s], \\ QD &= \lambda[\alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r + \delta_2 s], \\ RD &= \lambda[\alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r + \delta_3 s], \\ SD &= \lambda[\alpha_4 p + \beta_4 q + \gamma_4 r + \delta_4 s], \end{aligned}$$

falls

$$-S = Px_1 + Qy_1 + Rz_1$$

gesetzt wird. Hieraus folgt zunächst

$$\begin{aligned} (8)\quad D^2 = \lambda^2[(\alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r + \delta_1 s)^2 + (\alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r + \delta_2 s)^2 \\ + (\alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r + \delta_3 s)^2], \end{aligned}$$

womit λ *definirt ist.* Differentiirt man ferner die Gleichungen (2) nach u und v, so erhält man mit Rücksicht auf die Identitäten

$$\begin{aligned} Px_u' + Qy_u' + Rz_u' &= 0, \\ Px_v' + Qy_v' + Rz_v' &= 0 \end{aligned}$$

die Relationen:

$$\begin{aligned} P_u[a_1 - x'a_4] + Q_u(a_2 - y'a_4) + R_u(a_3 - z'a_4) &= \lambda p_u + p\lambda_u, \\ P_u[b_1 - x'b_4] + Q_u(b_2 - y'b_4) + R_u(b_3 - z'b_4) &= \lambda q_u + q\lambda_u, \\ P_u[c_1 - x'c_4] + Q_u(c_2 - y'c_4) + R_u(c_3 - z'c_4) &= \lambda r_u + r\lambda_u; \end{aligned}$$

also, wenn man mit p, q, r multiplicirt und addirt, und zugleich die Gleichungen (4a) berücksichtigt

$$-\lambda_u = mt\lambda(P_u x_u' + Q_u y_u' + R_u z_u') + nt\lambda(P_u x_v' + Q_u y_v' + R_u z_v'),$$

oder nach § I, (7)

$$\lambda_u = mt\lambda[E] + nt\lambda[F].$$

Nach (3) *ergeben sich so die Gleichungen*

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u} &= mE + nF, \\ \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v} &= mF + nG, \end{aligned}$$

durch welche die in den Gleichungen (6) auftretenden Grössen m, n in der einfachsten Weise gegeben sind.*)

Für das *Krümmungsmass* $[K]$ *der transformirten Fläche* erhält man endlich nach (7) und (3) die Gleichung

$$[K] = \frac{[E][G]-[F]^2}{[H]} = K\frac{(\lambda t)^4}{D^2}. \tag{10}$$

Von den hier entwickelten Gleichungen, welche die vollständige Theorie der projectiven Umformung einer krummen Oberfläche enthalten, lassen sich vielfache Anwendungen**) machen.

---

*) Hierbei ist der Fall auszuschliessen, wo das Krümmungsmass der Fläche Null ist, weil dann aus (9) nicht mehr beide Werthe m, n gefunden werden können. Indessen liefert die projective Transformation einer abwickelbaren Fläche überhaupt keine Resultate von besonderem Interesse.

**) Man erhält z. B. aus (10) eine von Herrn Mehmke (Schlömilch's Zeitschrift f. Math., Jahrgang 36, S. 56) neuerlich durch sehr einfache geometrische Betrachtungen hergeleitete Beziehung.

Die Gleichung der Tangentenebene im Punkte P ist in der Normalform

$$(X-x)p+(Y-y)q+(Z-z)r=0; \tag{a}$$

die des entsprechenden Punktes P'

$$(X-x')P+(Y-y')Q+(Z-z')R=T=0, \tag{b}$$

oder, wenn man mit Hülfe von (2) die Werthe der P, Q, R einführt

$$T=\frac{\lambda}{D}\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & p \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & q \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & r \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & s \end{vmatrix}. \tag{b'}$$

Bezeichnet man nun den Abstand eines beliebigen Punktes Q mit den Coordinaten ξ, η, ζ von der Tangentenebene in P durch p; den Abstand des projectiv entsprechenden Q' von der entsprechenden Tangentenebene in P' durch p'; mit t und τ die beiden Werthe $a_4x+b_4y+c_4z+d_4$, $a_4\xi+b_4\eta+c_4\zeta+d_4$, so hat man nach (a) und (b')

$$\tau p' = \lambda p. \tag{c}$$

Vermöge (c) *kann man die Beziehung* (10) *zwischen den zu P und P' gehörenden Krümmungsmassen K_P und $K_{P'}$ auch so schreiben*

$$K_{P'} = \left(\frac{p'}{p}\right)^4 \frac{(t\tau)^4}{D^2} K_P. \tag{d}$$

Liegt der Punkt Q auf der gegebenen Fläche selbst, so ist auch

$$K_{Q'} = \left(\frac{q'}{q}\right)^4 \frac{(t\tau)^4}{D^2} K_Q, \tag{e}$$

also

$\frac{K_{P'}}{K_{Q'}}\left(\frac{q'}{p'}\right)^4 = \frac{K_P}{K_Q}\left(\frac{q}{p}\right)^4.$ Diess ist der von Herrn Mehmke erwähnte Satz.

Und ebenso ist nach (9)

Im Vorbeigehen sei es mir gestattet, *hier die Frage nach denjenigen Flächen zu berühren, welche projective Transformationen zulassen, bei denen das Krümmungsmass in correspondirenden Punkten nur um einen constanten Factor geändert wird*, d. h. für die

$$\frac{(\lambda t)^2}{D}$$

constant ist.

Ist die Transformation eine *affine*, so ist t constant, also muss λ selbst constant sein. Sieht man von den developpabelen Flächen ab, bei denen das Krümmungsmass überhaupt immer Null ist, so kann diess nach (8) nur dann geschehen, wenn

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= k^2,\\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= k^2,\\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= k^2;\\
\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0,\\
\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0,\\
\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0,
\end{aligned}$$

da ausser der Identität $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ keine Relation zwischen den p, q, r bestehen kann. Dann aber ist die Transformation eine Aehnlichkeitstransformation resp. symmetrische Umformung. Man hat also den Satz:

Die einzigen affinen Transformationen, bei denen eine nicht developpabele Fläche in eine andere übergeht, deren Krümmungsmass in entsprechenden Punkten nur um einen constanten Factor geändert wird, sind die Aehnlichkeitstransformationen resp. Umformungen durch Symmetrie.

Bei einer Collineation, die nicht affin ist, existiren dagegen immer auch nicht developpabele Flächen dieser Eigenschaft. Die Gleichungen dieser Flächen lassen sich leicht angeben, wenn man eine gewisse *Normalform für die Collineation* einführt.

Diese erhält man durch folgende Betrachtung. Denkt man sich zunächst die Ebene $t = 0$ zur Coordinatenebene ZY gewählt, so gehen die allgemeinen Gleichungen der Collineation über in

---

$$\sqrt{\mathsf{H}_{P'}} = \frac{D\sqrt{\mathsf{H}_P}}{t^2(t\tau)}\,\frac{p}{p'},$$

$$\sqrt{\mathsf{H}_{Q'}} = \frac{D\sqrt{\mathsf{H}_Q}}{\tau^2(t\tau)}\,\frac{q}{q'},$$

also auch

$$\tau^2\frac{p'}{q'}\sqrt{\frac{\mathsf{H}_{P'}}{\mathsf{H}_{Q'}}} = t^2\frac{p}{q}\sqrt{\frac{\mathsf{H}_P}{\mathsf{H}_Q}},$$

welche Gleichung eine invariante Relation zwischen den Flächenelementen liefert.

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{x},$$

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{x},$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 x + c_3 z + d_3}{x},$$

und die Determinante (bcd) ist nicht Null. Setzt man jetzt

$$b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \gamma = 0,$$

$$c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma = 0,$$

und wählt die Ebene

$$x' \alpha + y' \beta + z' \gamma = 0$$

zur Ebene $y'z'$ des gestrichenen Systems, so gehen die Gleichungen, wenn noch eine Parallelverschiebung desselben Systems ausgeführt wird, über in

$$x' = \frac{d_1'}{x},$$

$$y' = \frac{b_2' y + c_2' z + d_2'}{x},$$

$$z' = \frac{b_3' y + c_3' z + d_3'}{x};$$

und die Determinante $(b'c')$ sowie d_1' sind von Null verschieden. Damit ist die Ebene, welche den unendlich fernen Punkten des ursprünglichen Systems zugehört, zur Coordinatenebene $Y_1 Z_1$ gewählt. Durch geeignete Verschiebung und Drehung der Y und Z-Axe endlich treten an Stelle der letzteren Gleichungen die folgenden

$$x_1 = \frac{1}{ax},$$

(11) $$y_1 = \frac{y}{bx},$$

$$z_1 = \frac{z}{cx},$$

welche die allgemeinste Form einer nicht affinen Collineation darstellen.

Unter Voraussetzung der Gleichungen (11) wird daher

$$1 = \lambda^2 (q^2 b^2 + r^2 c^2 + s^2 a^2).$$

Soll nun die Gleichung

$$[K] = m^2 K$$

bestehen, so muss

$$\lambda^2 x^2 = \frac{m}{abc}$$

sein. Setzt man den Werth von λ ein, so ergiebt sich die partielle Differentialgleichung

$$x^2 = \left(q^2 b^2 + r^2 c^2 + (px + qy + rz)^2 a^2\right) \frac{m}{abc}.$$

Dieselbe kann leicht mit Hülfe der Lagrange'schen Transformation gelöst werden.

Es ist nämlich

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{\varkappa}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{\varkappa}, \quad r = -\frac{1}{\varkappa},$$

wenn

$$\varkappa = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

gesetzt wird.

Setzt man daher

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Y, \quad xX + yY - z = Z,$$

$$x = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad y = \frac{\partial Z}{\partial Y},$$

so verwandelt sich die Differentialgleichung in

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 (1 + X^2 + Y^2) = (b^2 Y^2 + c^2 + Z^2 a^2)\frac{m}{abc},$$

deren allgemeines Integral, wenn

$$\sqrt{\frac{ma}{bc}} = k$$

gesetzt wird,

$$\varphi(XYZ) = Za + \sqrt{b^2 Y^2 + c^2 + Z^2 a^2} - \Theta(X + \sqrt{1 + X^2 + Y^2})^k = 0$$

ist, wo Θ eine willkürliche Function von Y ist. Die Pole der Tangentenebenen von φ in Bezug auf das Rotationsparaboloid

$$X^2 + Y^2 = 2Z$$

bilden die gesuchte Fläche in Punktcoordinaten. *Umgekehrt hüllen also die Polarebenen der Punkte von φ in Bezug auf jenes Paraboloid die gesuchte Fläche ein.*

Nun sind die Coordinaten der Polarebene des Punktes X, Y, Z

$$u = \frac{X}{Z}, \quad v = \frac{Y}{Z}, \quad w = -\frac{1}{Z}.$$

Setzt man daher

$$Z = \frac{-1}{W}, \quad Y = \frac{-V}{W}, \quad X = \frac{-U}{W},$$

so wird die Gleichung der gesuchten Fläche in Ebenencoordinaten

$$(12) \quad \frac{-a + \sqrt{b^2 V^2 + c^2 W^2 + a^2}}{W} = \Theta\left(\frac{V}{W}\right)\left[\frac{-U + \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}{W}\right]^k.$$

Nimmt man $k = 1$, so erhält man die Gleichung:

$$4\Theta[a - U\Theta][U(b^2 V^2 + c^2 W^2) - a\Theta(U^2 + V^2)]$$
$$+ [(V^2 + W^2)\Theta^2 - (b^2 V^2 + c^2 W^2)]^2 = 0$$

aus der in dem Falle $b^2 = c^2$ sich der Factor $V^2 = W^2$ ausscheidet. Bei constantem Θ erhält man so die Kugel, deren Gleichung in Punktcoordinaten

$$\Theta a^2(x^2 + y^2 + z^2) + ax(\Theta^2 + b^2) + \Theta b^2 = 0$$

ist.

Da durch die Collineation (10) die ursprünglichen Ebenencoordinaten U, V, W in u', v', w' transformirt werden, die mit denselben durch die Gleichungen

$$U = \frac{a}{u'}, \quad V = -\frac{v'a}{u'b}, \quad W = -\frac{w'a}{u'c}$$

zusammenhängen, so geht überhaupt die Gleichung (12) vermöge der Collineation (11) über in

$$-c\left\{\frac{-u' + \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{w'}\right\}$$
$$= (-1)^k c^k \Theta\left(\frac{v'c}{w'b}\right)\left[\frac{-1 + \sqrt{\frac{w'^2}{c^2} + \frac{v'^2}{b^2} + 1}}{w'}\right]^k.$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen von (12) verschieden und fällt nur dann mit ihr zusammen, wenn

$$k^2 = a^2 = b^2 = c^2 = 1$$

genommen wird. Die Fläche wird dann in sich selbst durch die Collineation so transformirt, dass die Curven constanten Krümmungsmasses auf derselben dabei in sich übergehen.

Ich kehre nun, da für eine weitere Discussion der in (12) erhaltenen Flächen hier nicht der Ort ist, zu den Gleichungen (6) zurück.

Wird zunächst $F = 0$ vorausgesetzt, so erhält man aus den Gleichungen (6) unter Berücksichtigung von

$$t_{uv} = Bt_u + B_1 t_v$$

durch einfache Rechnung

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial [B]}{\partial u} - [B][B_1] &= \frac{\partial B}{\partial u} - BB_1. \\ \frac{\partial [B_1]}{\partial v} - [B][B_1] &= \frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1. \end{aligned}$$

Das heisst:

Die Grössen α, β sind absolute Invarianten bei jeder collinearen Transformation einer Fläche, die auf ein System conjugirter Curven bezogen ist).* Zugleich ist auch

*) Sie sind die beiden Invarianten der Laplace'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = B\frac{\partial}{\partial u} + B_1\frac{\partial}{\partial v}$$

vgl. Darboux a. a. O. Tom. II, § 23, ff.

$$\frac{\partial [A]}{\partial v} - \frac{\partial [C_1]}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial C_1}{\partial u},$$

denn jeder dieser Ausdrücke ist nach § 1, (9) gleich

$$\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Auf jeder Fläche von positivem Krümmungsmass giebt es ferner unzählige reelle conjugirte Coordinatensysteme, für die zugleich $E = G = P$ *ist.* Denn die unter dieser Voraussetzung definite Form

$$(12\text{a}) \qquad E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

lässt sich durch Uebergang zu neuen Parametern u', v' in bekannter Weise in die Form

$$P(du'^2 + dv'^2)$$

transformiren, deren isometrische Gestalt erhalten bleibt durch die Substitutionen

$$u_1 + iv_1 = f(u'' + iv''),$$
$$u_1 - iv_1 = f_1(u'' - iv''),$$

wenn unter f_1 die complex conjugirte Function von f verstanden wird.

Für diese conjugirten Coordinatensysteme gilt insbesondere auch die weitere invariante Relation in Bezug auf jede collineare Transformation:

$$(\text{II}) \qquad \begin{aligned} [C] - [A] + 2[B_1] &= C - A + 2B_1, \\ [C_1] - [A_1] - 2[B] &= C_1 - A_1 - 2B, \end{aligned}$$

wie sich unmittelbar aus (6) ergiebt.

Andererseits existiren auf jeder negativ gekrümmten Fläche unzählig viele reelle Coordinatensysteme, für die

$$E = -G = P, \quad F = 0$$

ist. Wählt man nämlich die Haupttangentencurven zu Parameterlinien, so geht die Differentialform (12a) in

$$\lambda du' dv'$$

oder für

$$u' = f(u'' + v''),$$
$$v' = \varphi(u'' - v'')$$

in

$$\lambda f' \varphi' (du''^2 - dv''^2)$$

über. *Für diese conjugirten Systeme besteht aber, wie wieder aus* (6) *folgt, die invariante Beziehung*

$$(\text{IV}) \qquad \begin{aligned} [A_1] + [C_1] - 2[B] &= A_1 + C_1 - 2B, \\ [A] + [C] - 2[B_1] &= A + C - 2B_1 \end{aligned}$$

bei beliebiger projectiver Aenderung.

Ist endlich eine Fläche auf ihre *Haupttangentencurven* bezogen, also $E = G = 0$, so erhält man nach (6)

$$
\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} [A_1] &= A_1, \\ [C] &= C, \end{aligned}
$$

während überhaupt

$$
\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = 0,
$$

so dass also bei projectiver Transformation jede Beziehung zwischen A_1 und C invariant bleibt. Die geometrische Bedeutung der Ausdrücke (I) — (IV), welche, *obwohl lediglich von metrischen Verhältnissen der Fläche abhängend, bei beliebigen projectiven Umformungen sich invariant verhalten*, wird im Folgenden hervortreten*).

Führt man dagegen statt der anfänglichen Parameter u, v neue u', v' ein, welche mit denselben durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned} u &= f(u'), \\ v &= \varphi(v') \end{aligned}
$$

verbunden sind, so findet man, falls die den E, F, G, A, B, ... entsprechenden Grössen durch $\{E\}$, $\{F\}$, ... bezeichnet werden,

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
&\{E\} = Ef'^2, \quad \{F\} = Ff'\varphi', \quad \{G\} = G\varphi'^2, \\
&\{A\} = Af' + \frac{f''}{f'}, \qquad \{A_1\} = A_1 \frac{f'^2}{\varphi'^2}, \\
&\{B\} = B\varphi', \qquad \{B_1\} = B_1 f', \\
&\{C\} = C\frac{\varphi'^2}{f'^2}, \qquad \{C_1\} = C_1\varphi' + \frac{\varphi''}{\varphi'};
\end{aligned}
$$

so dass also

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\{B\}}{\partial u'} - \{B\}\{B_1\} &= f'\varphi'\left(\frac{\partial B}{\partial u} - BB_1\right), \\
\frac{\partial\{B_1\}}{\partial v'} - \{B\}\{B_1\} &= f'\varphi'\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1\right)
\end{aligned}
$$

wird.

Es giebt freilich auch noch *allgemeinere Transformationen, bei denen α und β sich invariant verhalten.* Setzt man

$$
\begin{aligned} x' &= x\varphi, \\ y' &= y\varphi, \\ z' &= z\varphi, \end{aligned}
$$

wo φ eine willkürliche Function von u und v ist, so wird

---

*) In Bezug auf A_1 und C mag hier daran erinnert werden, dass die *geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien* durch

$$
C\sqrt{H}g^{-\frac{3}{2}}, \quad A_1\sqrt{H}e^{-\frac{3}{2}}
$$

ausgedrückt sind.

$$
\begin{aligned}
x'_u &= \varphi_u x + \varphi x_u,\\
x'_v &= \varphi_v x + \varphi x_v,\\
x'_{uv} &= \varphi_v x_u + \varphi_u x_v + x\varphi_{uv} + \varphi[Bx_u + B_1 x_v + pF].
\end{aligned}
$$

Führt man nun die Richtungscosinus der Normalen, p_1, q_1, r_1 der transformirten Fläche ein, so wird

$$
\begin{aligned}
[F] = \varphi F(pp_1 + qq_1 + rr_1)\\
+ (p_1 x + q_1 y + r_1 z)\left[\varphi_{uv} - 2\frac{\varphi_v\varphi_u}{\varphi} + (B\varphi_u + B_1\varphi_v)\right].
\end{aligned}
$$

Ein conjugirtes Curvensystem geht also nur dann wieder in ein conjugirtes durch die Transformation über, wenn

$$\varphi_{uv} - 2\frac{\varphi_v\varphi_u}{\varphi} = B\varphi_u + B_1\varphi_v$$

gewählt wird. Dann aber folgt

$$x'_{uv} = x'_u\left(B + \frac{\varphi_v}{\varphi}\right) + x'_v\left(B_1 + \frac{\varphi_u}{\varphi}\right);$$

mithin

$$
\begin{aligned}
[B] &= B + \frac{\varphi_v}{\varphi},\\
[B_1] &= B_1 + \frac{\varphi_u}{\varphi};
\end{aligned}
$$

und zugleich wird

$$
\text{(V)}\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial[B]}{\partial u} - [B][B_1] &= \frac{\partial B}{\partial u} - BB_1,\\
\frac{\partial[B_1]}{\partial v} - [B][B_1] &= \frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1.
\end{aligned}
$$

Die Bedingung für φ aber erhält durch die Substitution

$$\varphi = \frac{1}{\psi}$$

die Form

$$\text{(14)}\qquad \psi_{uv} = B\psi_u + B_1\psi_v,$$

deren a priori bekannte Lösung eben die lineare Function t ist, welche auf die collineare Transformation hindeutet.*)

Ich gehe nun dazu über, einige *geometrische Eigenschaften der Coefficienten* B, B_1 zu entwickeln.

Betrachtet man die Coordinaten X, Y, Z eines Punktes Q der Tangente der durch den Flächenpunkt $P(x, y, z)$ gehenden Curve u, welcher von P um ϱ entfernt ist, so ist

*) Eine Transformation dieser Art ist z. B. die in Bezug auf das System der *Krümmungslinien* angewandte *Umformung durch reciproke Radien.*

$$(15) \qquad X = x + \varrho \frac{x_u}{\sqrt{e}}, \text{ etc.}$$

und diejenige Normalebene der Fläche in P, welche jene Tangente in sich enthält, hat die Gleichung

$$N = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ p & q & r \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} = 0.$$

Geht man nun zu dem benachbarten Punkte P_2 auf der durch P gehenden Curve v über, so verwandelt sich N in

$$N + dv\,[(X - x p_v x_u) + (X - x p x_{uv}) - (x_v p x_u)].$$

Diese Ebene wird von der Tangente (15) in einem Punkte S_u geschnitten, dessen Abstand ϱ_u von P bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{\varrho_u}{\sqrt{e}}(x_u p x_{uv}) = (x_u x_v p).$$

Nach § 1, (5) wird also:

$$(16) \qquad \varrho_u = -\frac{\sqrt{e}}{B_1}.$$

Ein analoger Ausdruck ergiebt sich für den Abstand eines Punktes S_v auf der Tangente der Curve v, nämlich

$$(16\text{a}) \qquad \varrho_v = -\frac{\sqrt{g}}{B}.$$

Diese *„Radien"* ϱ_u und ϱ_v *bleiben*, da sie nur von den Coefficienten des Längenelementes abhängen, *bei jeder Biegungsdeformation der Fläche ungeändert.* Ist insbesondere wieder $F = 0$, so erzeugen die Tangenten der Curven u, v zwei abwickelbare Flächen, deren Rückkehrkanten von den Punkten S_u, S_v gebildet werden.

Setzt man nämlich

$$X = x + \mu x_u,$$

so wird

$$X_v = x_v[1 + \mu B_1] + x_u\left[\frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu B\right];$$

also für $\mu = -\frac{1}{B_1}$

$$X_v = \frac{x_u}{B_1^2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial u} - BB_1\right);$$

d. h.: der Punkt X wird sich auf der Tangente der Curve u im Punkte P verschieben, wenn P in P_2 übergeht.

Die Punkte

$$(17)\qquad \begin{aligned} \xi &= x - \frac{1}{B_1} x_u, & \xi_1 &= x - \frac{1}{B} x_v,\\ \eta &= y - \frac{1}{B_1} y_u, & \eta_1 &= y - \frac{1}{B} y_v,\\ \zeta &= z - \frac{1}{B_1} z_u, & \zeta_1 &= z - \frac{1}{B} z_v, \end{aligned}$$

bilden zwei der ursprünglichen Fläche adjungirte Flächen, welche wieder vermöge der Parameter u, v auf ein System conjugirter Curven bezogen sind. Auch bei dieser Transformation können die Invarianten α, β erhalten bleiben. Man hat nämlich, wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{B_1^2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - B B_1\right) = D$$

gesetzt wird,

$$\xi_v = D x_u,$$

$$\xi_{uv} = \xi_v\left(\frac{\partial l D B_1}{\partial u} + B_1\right) - B_1 D\, \xi_u;$$

also wird

$$[B] = - B_1 D,$$

$$[B_1] = \frac{\partial l D B_1}{\partial u} + B_1;$$

hieraus folgt aber:

$$\frac{\partial [B]}{\partial u} - [B][B_1] = \frac{\partial B_1}{\partial v} - B B_1,$$

$$\frac{\partial [B_1]}{\partial v} - [B][B_1] = \frac{\partial B_1}{\partial v} - B B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial^2 l\left(\frac{\partial B_1}{\partial v} - B B_1\right)}{\partial u\, \partial v}.$$

Das heisst: *Hat die ursprüngliche, auf ein System von conjugirten Curven bezogene Fläche, gleiche Invarianten α, β, so hat auch jede der beiden adjungirten Flächen dieselben Invarianten, wenn*

$$\frac{\partial B_1}{\partial v} - B B_1 = \frac{\partial B}{\partial u} - B B_1,$$

das Product zweier Functionen von u und v ist. Mithin erstreckt sich diese Eigenschaft auch auf die ganze doppelte Reihe der Flächen, welche durch den Process der Adjunction aus der ursprünglichen und auseinander abgeleitet werden können.

Ich erwähne endlich noch folgende Eigenschaft, die sich auf das Vorhandensein gleicher Invarianten § II, (I) bezieht.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v} = 0$$

folgt durch Integration über ein beliebiges Flächenstück, in dessen Innern B und B_1 endlich und stetig sind,

$$\int\left(\frac{\partial B}{\partial u}-\frac{\partial B_1}{\partial v}\right)du\,dv=0$$

oder

$$\int(B\,dv+B_1\,du)=0$$

ausgedehnt über die Begrenzung des genannten Stückes. Statt dessen kann man nach (16) auch schreiben

$$\int\left(\frac{\sqrt{g}\,dv}{\varrho_v}+\frac{\sqrt{e}\,du}{\varrho_u}\right)=0.$$

Ist nun dieses Flächenstück von den Bögen zweier Curvenpaare u, v gebildet, welche durch die Punkte u_0v_0; u_1v_1 gehen, so ergiebt sich der folgende Satz:

Bilden die Curven u, v ein conjugirtes System, für das die beiden Invarianten α, β gleich sind, und trägt man auf den Normalen der Fläche längs einer Curve $u(v)$ den reciproken Werth des zu derselben gehörigen Radius $\varrho_u(\varrho_v)$ auf, so besteht zwischen den Inhalten der so gebildeten Flächen, die zu einem von zwei Paaren conjugirter Curven gebildeten Vierseit gehören, der Satz:

$$F_1+F_2=F_3+F_4.$$

Derselbe bleibt bei allen collinearen Umformungen des Flächenstückes erhalten, und erscheint um so bemerkenswerther, als bei einer solchen Umformung die Radien ϱ_u, ϱ_v in ihre projectiv entsprechenden Radien ϱ'_u, ϱ'_v umgeformt werden, womit wieder eine rein metrische Beziehung nachgewiesen ist, die bei allen Collineationen ungeändert bleibt.

§ IV.

Abwickelbare Flächen, Flächen mit der Parameterkrümmung Null.

Ein besonderer Fall der am Schlusse des § II betrachteten Verhältnisse findet statt, wenn die Fläche entweder eine *abwickelbare Fläche* ist, oder auf ein conjugirtes Coordinatensystem bezogen ist, für das *eine* der beiden Invarianten oder *beide zugleich* verschwinden.

Bei den *Developpabelen* besteht die eine Schaar eines Systems conjugirter Curven aus den Erzeugenden, während die andere völlig willkürlich ist. Setzt man voraus, dass die Erzeugenden die Curven v sind, so ist $G=0$, und man erhält als Ausdruck der Parameterkrümmung

$$\frac{1}{\mathsf{P}}=\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial u}-BB_1\right)}{\sqrt{\mathsf{H}}}\,E\left(\frac{du}{ds}\right)^2.$$

Betrachtet man als Gleichung der abwickelbaren Fläche die Relationen

$$x = X + MX_u,$$
$$y = Y + MY_u,$$
$$z = Z + MZ_u,$$

so dass M eine willkürliche Function von u, v ist, X, Y, Z die nur von u abhängigen Coordinaten eines Punktes der Rückkehrcurve der Fläche sind, und zugleich

$$X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2 = 1$$

angenommen wird, so findet man

$$x_{uv} = x_u \frac{M_v}{M} + x_v \left[\frac{M_{uv}}{M_v} - \frac{1 + M_u}{M}\right].$$

Demnach wird

$$B = \frac{M_v}{M}, \quad B_1 = \frac{M_{uv}}{M_v} - \frac{1 + M_u}{M};$$

also

$$\frac{\partial B}{\partial u} - BB_1 = \frac{M_v}{M^2}.$$

Da M nothwendiger Weise eine Function von v ist, so kann diese Invariante nicht verschwinden.

Da ferner

$$eg - f^2 = \mathsf{H} = M^2 M_v^2 \frac{1}{R^2}$$

ist, wo R den Krümmungshalbmesser der Rückkehrcurve in dem zu u gehörigen Punkte bedeutet, so erhält man

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = \frac{R}{M^3} E\left(\frac{du}{ds}\right)^2.$$

Daraus folgt:

Die Parameterkrümmung der abwickelbaren Flächen ist bis auf den Factor $\frac{R}{M^3}$ *gleich der Normalkrümmung nach der betreffenden Richtung, also bis auf den Factor* M^{-3} *von der Wahl des Systemes conjugirter Curven vollkommen unabhängig.*

Anders stellen sich die Verhältnisse, wenn eine der beiden Invarianten oder beide gleichzeitig verschwinden.

Verschwindet *eine* der beiden Invarianten für alle Punkte des conjugirten Curvensystems, *so findet überhaupt keine Analogie zwischen der Parameterkrümmung und der gewöhnlichen Normalkrümmung mehr statt.* Denn für

$$\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1 = 0$$

wird

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = \left(\frac{\partial B}{\partial u} - BB_1\right) E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\mathsf{H}}},$$

also von G ganz unabhängig. Gleichzeitig werden auch die Ausdrücke ξ_v, η_v, ζ_v § III, (17) gleich Null; d. h. die Tangenten der Curve u in den Punkten ein und derselben Curve v schneiden sich in einem einzigen Punkte, *so dass sich die aus den* ξ, η, ζ *gebildete adjungirte Fläche auf eine Curve reducirt.* Man erhält alle möglichen Coordinatensysteme dieser Art auf einer Fläche, wenn man das System der conjugirten Trajectorien zu den Berührungscurven derjenigen Tangentenkegel der Fläche aufsucht, deren Spitzen einer willkürlichen Curve angehören.

Sind dagegen, wie jetzt angenommen werden soll, *für jeden Punkt der Fläche die Gleichungen*

$$\frac{\partial B}{\partial u} - BB_1 = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial v} - BB_1 = 0,$$

erfüllt, so wird die Parameterkrümmung überhaupt gleich Null. Da nun

$$B = \frac{\partial N}{\partial v}, \qquad B_1 = \frac{\partial N}{\partial u}$$

sein muss, so hat man zur Bestimmung von N die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} = \frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v},$$

deren allgemeines Integral

$$-N = l(\psi + \chi)$$

ist, wo ψ (und χ) willkürliche Functionen bezüglich der Argumente u (und v) bedeuten.

Setzt man weiter

$$x_{uv} = \frac{\partial N}{\partial v} x_u + \frac{\partial N}{\partial u} x_v,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial N}{\partial u}}\right) = \frac{\partial x}{\partial v},$$

so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (x + F)\frac{\partial N}{\partial u},$$

wo F eine beliebige Function von u ist. Hieraus aber folgt

$$e^{-N} x = \psi_1 + \chi_1,$$

wo wieder ψ_1 und χ_1 willkürliche Functionen von u, beziehungsweise von v allein sind. *Man hat daher für die Coordinaten einer Fläche, die in Bezug auf ein System conjugirter Curven die Parameterkrümmung Null besitzt, die Gleichungen*

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{\psi_1 + \chi_1}{\psi + \chi}, \\
y &= \frac{\psi_2 + \chi_2}{\psi + \chi}, \\
z &= \frac{\psi_3 + \chi_3}{\psi + \chi},
\end{aligned}
$$

in denen die Functionen ψ allein von u, die χ allein von v abhängen.*)

Diese Flächen mögen, um eine kurze Bezeichnungsweise zu haben, *Flächen P genannt werden.* Ich führe im folgenden einige Eigenschaften dieser Flächen an, die bisher zwar schon oft bemerkt,**) aber nicht weiter discutirt zu sein scheinen.

1) *Die Tangenten an sämmtliche Curven (u, v) längs einer Curve $v(u)$ schneiden sich in ein- und demselben Punkte. Die einer Fläche P adjungirten beiden Flächen reduciren sich daher auf zwei adjungirte Curven.* Bezeichnet man die Coordinaten der Punkte dieser Curven durch

$$
\begin{aligned}
&\xi, \ \eta, \ \zeta, \\
&\xi_1, \ \eta_1, \ \zeta_1,
\end{aligned}
$$

so erhält man vermöge der § III, (17) gegebenen Ausdrücke unter Benutzung von (1) sofort

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
\xi &= \frac{\chi_1'}{\chi'}, & \eta &= \frac{\chi_2'}{\chi'}, & \zeta &= \frac{\chi_3'}{\chi'}, \\
\xi_1 &= \frac{\psi_1'}{\psi'}, & \eta_1 &= \frac{\psi_2'}{\psi'}, & \zeta_1 &= \frac{\psi_3'}{\psi'}
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\psi_i' = \frac{d\psi_i}{du}, \quad \chi_i' = \frac{d\chi_i}{dv}
$$

gesetzt ist.

2) Umgekehrt gehört zu irgend einem Paare von Curven, für welches die Coordinaten $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ als Functionen bezüglich zweier Parameter u und v gegeben sind, die man in der Form (2) annehmen kann, folgende Schaar von Flächen, denen diese Curven adjungirt sind

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\int \xi_1 \, d\psi + \int \xi \, d\chi + c_1}{\psi + \chi}, \\
y &= \frac{\int \eta_1 \, d\psi + \int \eta \, d\chi + c_2}{\psi + \chi}, \\
z &= \frac{\int \zeta_1 \, d\psi + \int \zeta \, d\chi + c_3}{\psi + \chi}.
\end{aligned}
$$

*) Herr Darboux bestimmt a. a. O. Tom I, S. 123 auf einem ganz anderen Wege alle Flächen, auf denen die beiden Systeme conjugirter Curven eben sind.

**) In seiner Schrift „Ueber Curven und Flächen" Moskau und Leipzig 1868, Lief. I nennt Herr K. Peterson die Flächen P solche, auf denen zwei Systeme conischer Curven conjugirt sind, daselbst S. 26 ff. Es ist zu bedauern, dass von den Untersuchungen des Verfassers nur diese erste Lieferung (in deutscher Sprache) erschienen ist.

3) *Die vier Schnittpunkte irgend zweier Paare von Curven u und v liegen stets in einer Ebene.* Denn diese Schnittpunkte entsprechen den Argumenten

$$u, v;\quad u+h, v;\quad u, v+k;$$
$$u+h,\ v+k$$

und man bestätigt leicht, dass die Determinante der Coordinaten jener vier Punkte den Werth Null hat. Die Flächen P besitzen aber auch die Eigenschaft, dass die Determinante

$$6T = (D_u x\ D_v x\ D_{uv} x)$$

überhaupt verschwindet. Es hängt dies damit zusammen, *dass die Coefficienten der Entwickelung von T nach Potenzen der Argumente u und v sich sämmtlich als ganze rationale Functionen von F, α und β und deren Differentialquotienten nach u und v darstellen lassen.*

4) Bezeichnet man die Punkte, welche den in (3) angegebenen vier Argumentenpaaren entsprechen, wie in § I durch

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3$$

so schneiden sich die Geraden

$$\begin{array}{llll} P P_2,\ P_1 P_3 & \text{in einem Punkte} & R, \\ P P_1,\ P_2 P_3 & \text{„ \quad „ \quad „} & S, \\ P_1 P_2,\ P P_3 & \text{„ \quad „ \quad „} & T, \end{array}$$

nämlich den Diagonalpunkten des zu $PP_1P_2P_3$ gehörigen vollständigen Vierseits.

Die Coordinaten dieser Punkte R, S, T, welche durch den angehängten Index r, s, t unterschieden werden sollen, sind

$$x_r = \frac{\chi_1(v) - \chi_1(v+k)}{\chi(v) - \chi(v+k)},$$
$$x_s = \frac{\psi_1(u) - \psi_1(u+h)}{\psi(u) - \psi(u+h)},$$
$$x_t = \frac{\psi_1(u) + \chi(v) + \psi_1(u+h) + \chi_1(v+k)}{\psi(u) + \chi(v) + \psi(u+h) + \chi(v+k)}$$

nebst den entsprechenden Ausdrücken für die y_r, z_r; y_s, z_s etc.

Von diesen erscheinen besonders erwähnenswerth die Punkte R und S. Setzt man nämlich statt $v+k$, $u+k$ je eine neue Variable u_1, v_1 so erkennt man, dass diese Punkte, wie auch die Eckpunkte P, P_1, P_2, P_3 auf der ursprünglichen Fläche gewählt werden mögen, zwei Flächen bilden, die selbst wieder die Parameterkrümmung Null besitzen, nämlich

$$x_r = \frac{\chi_1(v) - \chi_1(u_1)}{\chi(v) - \chi(u_1)},$$
$$x_s = \frac{\psi_1(u) - \psi_1(v_1)}{\psi(u) - \psi(v_1)}.$$

Diese Flächen unterscheiden sich aber von den allgemeinen Flächen P dadurch, dass je eine der Curven u mit einer der Curven v congruent ist, dass ferner die ihnen adjungirten Curven coincidiren, und endlich auch die wieder aus ihnen analog wie früher durch die Punkte R und S gebildeten Flächen zusammenfallen.

Auf den Zusammenhang in dem die Betrachtung dieser Flächen überhaupt mit den synthetischen Untersuchungen Lie's über Translationsflächen*) steht, will ich hier nur hinweisen, da es hier nicht meine Absicht sein kann, dieselben genauer zu untersuchen.

§ V.

Bestimmung aller conjugirten Coordinatensysteme in Bezug auf welche die Parameterkrümmungen den Normalkrümmungen entsprechen.

Nur für diejenigen conjugirten Coordinatensysteme, für die

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v} \tag{1}$$

ist, stimmen die Parameterkrümmungen nach jeder beliebigen Richtung bis auf ein und denselben Factor mit den entsprechenden Normalkrümmungen der Fläche überein. *Ein derartiges Coordinatensystem behält seinen Charakter bei allen Collineationen der Fläche und bei einer gewissen Classe von Transformationen derselben, bei denen jedem Punkte P ein auf demselben Radius-Vector liegender Punkt P' zugeordnet wird.* Ich stelle mir im folgenden die Aufgabe, alle conjugirten Coordinatensysteme auf einer Fläche zu bestimmen, für die nach (1) die Bedingung gleicher Invarianten erfüllt ist. Dieser Aufgabe kann man folgenden Ausdruck geben:

Es ist ein beliebiges Coordinatensystem u, v zu Grunde gelegt. An Stelle desselben soll ein neues u', v', wobei u', v' als zu bestimmende Functionen von u, v zu betrachten sind, von der Eigenschaft eingeführt werden, dass für die drei Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u' \partial v'} = \frac{\partial M}{\partial v'} \frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial M}{\partial u'} \frac{\partial}{\partial v'} \tag{2}$$

erfüllt ist, wobei M eine ebenfalls zu bestimmende Function bedeutet.

---

*) Jede Translationsfläche ist in projectivem Sinne eine specielle Fläche P. Ueber Lie's synthetische Untersuchungen der Transformationsflächen vgl. dessen Arbeit im Bd. 14 dieser Annalen, Projectivische Untersuchungen über Minimalflächen, sowie die Darstellung bei Darboux, a. a. O., Tom. I, S. 340—388.

Hierzu dienen die folgenden Entwickelungen. Da

$$\frac{\partial x}{\partial u'} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial v'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v'} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial v'},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u'\partial v'} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\Big(\frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial u'}\Big)$$
$$+ \frac{\partial x^2}{\partial v^2}\,\frac{\partial v}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'},$$

so wird, wenn man

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial u}{\partial v'}, \\ \beta &= \frac{\partial u}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial u}{\partial v'}\,\frac{\partial v}{\partial u'}, \\ \gamma &= \frac{\partial v}{\partial u'}\,\frac{\partial v}{\partial v'}, \end{aligned}$$

setzt,

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u'\partial v'} = {} & \frac{\partial x}{\partial u}\Big(A\,\alpha + B\,\beta + C\,\gamma + \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}\Big) \\ & + \frac{\partial x}{\partial v}\Big(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}\Big) \\ & + (E\alpha + F\beta + G\gamma)p, \end{aligned}$$

falls man die in § I, (3) eingeführten Bezeichnungen für die ursprüngliche Wahl der Coordinaten beibehält. Da das System der Curven u', v' ein conjugirtes sein soll, so ist zu setzen

$$\text{(5)} \qquad E\alpha + F\beta + G\gamma = 0,$$

und vermöge der Abkürzungen

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} A\,\alpha + B\,\beta + C\,\gamma &= a\,, \\ A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma &= a_1, \end{aligned}$$

wird, wenn man in (4) die Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u'}\,\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v'}\,\frac{\partial v'}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u'}\,\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v'}\,\frac{\partial v'}{\partial v},$$

einführt,

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial v'} &= \frac{\partial u'}{\partial u}\Big(a + \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}\Big) + \frac{\partial u'}{\partial v}\Big(a_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}\Big), \\ \frac{\partial M}{\partial u'} &= \frac{\partial v'}{\partial u}\Big(a + \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}\Big) + \frac{\partial v'}{\partial v}\Big(a_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}\Big). \end{aligned}$$

Wird jetzt die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial u} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix}$$

mit k bezeichnet, so hat man die bekannten Formeln

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial u'} &= \frac{1}{k}\frac{\partial v'}{\partial v}, \\ \frac{\partial u}{\partial v'} &= -\frac{1}{k}\frac{\partial u'}{\partial v}, \\ \frac{\partial v}{\partial u'} &= -\frac{1}{k}\frac{\partial v'}{\partial u}, \\ \frac{\partial v}{\partial v'} &= \frac{1}{k}\frac{\partial u'}{\partial u}. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieser Werthe verwandelt sich die Gleichung (5) in

$$E\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} - F\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u} = 0,$$

oder

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial v} &= \lambda\left[G\frac{\partial u'}{\partial u} - F\frac{\partial u'}{\partial v}\right], \\ \frac{\partial v'}{\partial u} &= -\lambda\left[E\frac{\partial u'}{\partial v} - F\frac{\partial u'}{\partial u}\right]; \end{aligned}$$

und zugleich wird nach (3)

$$(10)\qquad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{\lambda}{k^2}\left(G\frac{\partial u'}{\partial u} - F\frac{\partial u'}{\partial v}\right)\frac{\partial u'}{\partial v}, \\ \beta &= \frac{\lambda}{k^2}\left(G\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 - E\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2\right), \\ \gamma &= +\frac{\lambda}{k^2}\left(E\frac{\partial u'}{\partial v} - F\frac{\partial u'}{\partial u}\right)\frac{\partial u'}{\partial u}. \end{aligned}$$

Ich werde nun eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für

$$(11)\qquad z = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial u'}{\partial v}}$$

entwickeln, durch welche z als Function von u und v so bestimmt wird, dass den Bedingungen der Frage Genüge geschieht. Alsdann erhält man aus (11)

$$\frac{\partial u'}{\partial u} - z\frac{\partial u'}{\partial v} = 0,$$

also $u' = f(u, v) =$ const. als Ausdruck für die eine Curvenschaar, und durch Integration der aus (9) folgenden Gleichung

$$(12)\qquad \frac{\partial v'}{\partial u}(Fz - E) - \frac{\partial v'}{\partial v}(Gz - F) = 0$$

die andere Curvenschaar $v' = g(u, v) =$ const., *so dass nach Ermittelung*

der Lösung z nur zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren bleiben.

Es wird aber nach (9)

$$k = \lambda\left[G\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} + E\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2\right]. \tag{13}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} G\frac{\partial u'}{\partial u} - F\frac{\partial u'}{\partial v} &= P,\\ E\frac{\partial u'}{\partial v} - F\frac{\partial u'}{\partial u} &= Q,\\ \mu = P\frac{\partial u'}{\partial u} &+ Q\frac{\partial u'}{\partial v}, \end{aligned} \tag{14}$$

so wird

$$k = \lambda\mu; \tag{15}$$

und nach (8)

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \frac{P}{\mu},\quad \frac{\partial v}{\partial u'} = \frac{Q}{\mu}. \tag{16}$$

Ferner folgt aus (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u} &= -(2a\gamma - a_1\beta)k^2 + L = R + L,\\ \frac{\partial M}{\partial v} &= \quad (a\beta - 2a_1\alpha)k^2 + N = S + N, \end{aligned} \tag{17}$$

wo

$$\begin{aligned} L &= 2\frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}\,\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial v}\,\frac{\partial u'}{\partial u}\right),\\ N &= 2\frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'}\,\frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Da nun nach (16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial u'\partial v'} &= \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial P}{\partial v'} - \frac{P}{\mu^2}\,\frac{\partial \mu}{\partial v'},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial u'\partial v'} &= \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial Q}{\partial v'} - \frac{Q}{\mu^2}\,\frac{\partial \mu}{\partial v'},\\ \frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{\partial v'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial u} &= \lambda\left(\frac{\partial u'}{\partial u}P - \frac{\partial u'}{\partial v}Q\right),\\ 2\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial v'}{\partial u} &= -2\lambda Q\frac{\partial u'}{\partial u},\\ 2\frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial v'}{\partial v} &= +2\lambda P\frac{\partial u'}{\partial v}, \end{aligned}$$

wird, so erhält man

$$\begin{aligned} N = \lambda\left(\frac{\partial u'}{\partial u}P - \frac{\partial u'}{\partial v}Q\right)&\left(\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial P}{\partial v'} - \frac{P}{\mu^2}\,\frac{\partial \mu}{\partial v'}\right)\\ + 2\lambda P\frac{\partial u'}{\partial v}&\left(\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial Q}{\partial v'} - \frac{Q}{\mu^2}\,\frac{\partial \mu}{\partial v'}\right). \end{aligned}$$

Setzt man nach (14)

$$\frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial P}{\partial v'} + \frac{\partial u'}{\partial v}\,\frac{\partial Q}{\partial v'} + P\,\frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v'} + Q\,\frac{\partial^2 u'}{\partial v\,\partial v'}$$

so wird

$$N = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{\partial u'}{\partial v}\Big(P\,\frac{\partial Q}{\partial v'} - Q\,\frac{\partial P}{\partial v'}\Big) - \frac{\lambda}{\mu}\,\omega P,$$

wo

$$\omega = \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v'}\,P + \frac{\partial^2 u'}{\partial v\,\partial v'}\,Q,$$

oder wenn

$$(19)\qquad W = P\Big(\frac{\partial E}{\partial v'}\,\frac{\partial u'}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v'}\,\frac{\partial u'}{\partial u}\Big) - Q\Big(\frac{\partial G}{\partial v'}\,\frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v'}\,\frac{\partial u'}{\partial v}\Big)$$

gesetzt wird,

$$(20)\qquad N = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{\partial u'}{\partial v}\,W + \lambda\Big(\frac{\partial^2 u'}{\partial v\,\partial v'}\,F - \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v'}\,G\Big),$$

und nach analoger Rechnung

$$(21)\qquad L = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{\partial u'}{\partial u}\,W + \lambda\Big(\frac{\partial^2 u'}{\partial v\,\partial v'}\,E - \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v'}\,F\Big).$$

Für W erhält man mit Hülfe der Werthe von P und Q nach (14)

$$W = \begin{vmatrix} \Big(\frac{\partial u'}{\partial u}\Big)^2 & \frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} & \Big(\frac{\partial u'}{\partial v}\Big)^2 \\ E & F & G \\ \frac{\partial E}{\partial v'} & \frac{\partial F}{\partial v'} & \frac{\partial G}{\partial v'} \end{vmatrix}$$

oder

$$= \frac{1}{k}\,\frac{\partial u'}{\partial u}\begin{vmatrix} \Big(\frac{\partial u'}{\partial u}\Big)^2 & \frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} & \Big(\frac{\partial u'}{\partial v}\Big)^2 \\ E & F & G \\ \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{k}\,\frac{\partial u'}{\partial v}\begin{vmatrix} \Big(\frac{\partial u'}{\partial u}\Big)^2 & \frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} & \Big(\frac{\partial u'}{\partial v}\Big)^2 \\ E & F & G \\ \frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial u} \end{vmatrix}$$

so dass, wenn jene beiden Determinanten durch Δ_v, Δ_u bezeichnet werden,

$$(22)\qquad W\,\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu^2}\Big(\Delta_v\,\frac{\partial u'}{\partial u} - \Delta_u\,\frac{\partial u'}{\partial v}\Big)$$

wird, wobei μ nach (14) durch den Werth

$$\mu = G\Big(\frac{\partial u'}{\partial u}\Big)^2 - 2F\,\frac{\partial u'}{\partial u}\,\frac{\partial u'}{\partial v} + E\Big(\frac{\partial u'}{\partial v}\Big)^2$$

zu ersetzen ist.

Durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial v\,\partial v'} = -\frac{1}{k}\frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial^2 u'}{\partial v^2}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v'} = -\frac{1}{k}\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{1}{k},$$

können nun auch die zweiten Differentialquotienten in (20) und (21) von den Differentiationen nach v' befreit werden, und man erhält so

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial v^2}\frac{\partial u'}{\partial u}F + \frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}\frac{\partial u'}{\partial v}G\right) \\ &\quad - \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}F + \frac{\partial u'}{\partial u}G\right) + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u'}{\partial v}W, \\ L &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial v^2}\frac{\partial u'}{\partial u}E + \frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}\frac{\partial u'}{\partial v}F\right) \\ &\quad - \frac{\partial^2 u'}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}E + \frac{\partial u'}{\partial u}F\right) + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial u'}{\partial u}W. \end{aligned} \tag{23}$$

Setzt man endlich aus (10) die Werthe der α, β, γ in (17) ein, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von (15), dass die Grösse λ ganz herausfällt, und sämmtliche Terme nur noch den Divisor μ^2 enthalten.

Die Werthe von $\frac{\partial M}{\partial u}$, $\frac{\partial M}{\partial v}$ enthalten daher nur noch das Verhältniss

$$z = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial u'}{\partial v}}$$

und dessen erste Differentialquotienten nach u und v. Und die Bedingung der Integrabilität

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 M}{\partial v\,\partial u}$$

welche zugleich ausdrückt, dass

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u'\,\partial v'} = \frac{\partial^2 M}{\partial v'\,\partial u'}$$

ist, liefert die gesuchte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für z.

Diese Gleichung ist an sich viel zu complicirt, um einer weiteren Behandlung zugänglich zu sein. Sie vereinfacht sich aber beträchtlich, wenn von vornherein geeignete Annahmen über das Coordinatensystem der u, v gemacht werden.

Ich werde zunächst voraussetzen, *dass die Curven u, v das System der Haupttangentencurven auf der* (etwa negativ gekrümmten) *Fläche bilden.* Dann ist

$$E = G = 0$$

und der mit W bezeichnete Term (22) verschwindet.

Es wird ferner

$$\mu = -2F\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v},$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{k^2}F\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2,$$

$$\beta = 0,$$

$$\gamma = -\frac{\lambda}{k^2}F\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2;$$

also

$$2\frac{\partial M}{\partial u} = (A - Cz^2) - \frac{\partial}{\partial u}l(z),$$

$$2\frac{\partial M}{\partial v} = (C_1 - A_1 z^{-2}) - \frac{\partial}{\partial v}l(z).$$

Die partielle Differentialgleichung wird daher

$$\frac{\partial}{\partial v}(A - Cz^2) - \frac{\partial}{\partial u}(C_1 - A_1 z^{-2}) - \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}l(z^2) = 0$$

oder, da nach § III, (IV)

$$\frac{\partial C_1}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial v}$$

ist,

(24) $$\frac{\partial}{\partial u}A_1 z^{-2} - \frac{\partial}{\partial v}Cz^2 = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}l(z^2),$$

$$z = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial u'}{\partial v}} = -\frac{\frac{\partial v'}{\partial u}}{\frac{\partial v'}{\partial v}}.$$

Will man auf einer positiv gekrümmten Fläche die Einführung imaginärer Coordinatensysteme vermeiden, so kann man $E = G$, $F = 0$ annehmen. Auch unter dieser Annahme verschwindet W, zugleich wird nach (23)

$$N = \frac{\partial}{\partial u}(\text{arc tg } z),$$

$$L = -\frac{\partial}{\partial v}(\text{arc tg } z),$$

und nach (17)

$$R = B_1 + \frac{pq(p^2 - q^2)m - 2p^2q^2n}{(p^2 + q^2)^2},$$

$$S = B + \frac{pq(p^2 - q^2)n + 2p^2q^2m}{(p^2 + q^2)^2},$$

wo zur Abkürzung

$$p = \frac{\partial u'}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial u'}{\partial v},$$

$$m = C_1 - A_1 - 2B, \qquad n = C - A + 2B_1$$

gesetzt ist. Dabei sind m und n die beiden in § III, (II) angeführten Invarianten. Die partielle Differentialgleichung wird nunmehr

$$(24a) \qquad \frac{\partial R}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial u} + \frac{\partial^2 \operatorname{arc\,tg} z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{arc\,tg} z}{\partial v^2} = 0.$$

Eine ganz ähnliche Formel würde sich auch bei der Annahme $E = -G$, $F = 0$ ergeben.

§ VI.

Conjugirte Coordinatensysteme gleicher Invarianten auf gewissen Flächengattungen.

Ich gehe jetzt dazu über, *auf einigen Flächengattungen conjugirte Coordinatensysteme der im letzten Paragraphen definirten Art zu bestimmen.*

1) *Abwickelbare Flächen.* Obgleich hier die Bedingung gleicher Invarianten für die Krümmungseigenschaften bedeutungslos wird, so kann es doch von Interesse scheinen, die Coordinaten derselben so als Functionen von u, v auszudrücken, dass den partiellen Differentialgleichungen § V, (2) genügt wird.*)

Da nach § IV

$$B = \frac{\partial l M}{\partial v},$$

$$B_1 = \frac{\partial l \frac{\partial M}{\partial v}}{\partial u} - \frac{1}{M} - \frac{\partial l M}{\partial u},$$

wird, so liefert die Bedingung $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} l\left(\frac{\partial M}{\partial v}\frac{1}{M^2}\right) = \frac{\partial \frac{1}{M}}{\partial v},$$

deren erstes Integral

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(l \frac{\partial \frac{1}{M}}{\partial v}\right) = \frac{1}{M} + \psi$$

ist, wo ψ eine willkürliche Function von u ist.

Setzt man

$$\frac{1}{M} + \psi = \zeta,$$

so verwandelt sich dieses Integral in

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial v},$$

oder

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\zeta^2}{2} + \chi;$$

*) Vgl. in dieser Beziehung das in § VII Gesagte.

und χ ist wieder eine willkürliche Function von u. Um diese letzte Gleichung zu integriren, nehme man χ in der Form

$$\chi = \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{p^2}{z}$$

an, wo p wieder eine willkürliche Function von u ist, und setze

$$\zeta = p + \frac{1}{x}.$$

Dann wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} + px = -\frac{1}{z}$$

Man erhält hieraus als allgemeine Lösung für M den Werth

$$\frac{1}{M} = F(u) - \frac{G'(u)}{\frac{1}{2}G(u) + \Theta(v)},$$

wo zur Abkürzung

$$e^{-\int p\,du} = G'(u)$$

gesetzt ist und $F(u)$, $\Theta(v)$, $G(u)$ willkürliche Functionen ihrer Argumente bedeuten, unter der Voraussetzung dass M dabei eine Function von v (und u) bleibt. $\Theta(v)$ kann übrigens allgemein gleich v gesetzt werden.

2) *Regelflächen.* Man kann hier ein Coordinatensystem u, v zu Grunde legen, bei dem die Curven u die Erzeugenden, die Curven v die Haupttangentencurven sind. Dann ist

$$A_1 = 0$$

und die partielle Differentialgleichung § V (24) reducirt sich auf

$$\frac{\partial Cz^2}{\partial v} + \frac{\partial^2 l(z^2)}{\partial u \partial v} = 0,$$

deren erstes Integral

$$Cz^2 + \frac{\partial lz^2}{\partial u} = l\big(\psi(u)\big),$$

oder

$$C - \frac{\partial \frac{1}{z^2}}{\partial u} = \frac{1}{z^2} l\big(\psi(u)\big)$$

ist, so dass

$$\frac{1}{z^2}\psi(u) = \int C\psi(u)\,du + \Theta(v)$$

wird, wo ψ und Θ willkürliche Functionen ihrer Argumente bedeuten. Die Gleichungen

$$z = \frac{\frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial u'}{\partial v}} = -\frac{\frac{\partial v'}{\partial u}}{\frac{\partial v'}{\partial v}}$$

führen freilich im allgemeinen nicht mehr auf Quadraturen. Aber es

lassen sich wenigstens particuläre Lösungen in dieser Form aufstellen, wenn C das Product UV zweier Functionen von u und v allein ist.

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt für alle projectiven Umformungen der Conoide

$$\begin{aligned} x &= \varphi \cos v, \\ y &= \varphi \sin v, \\ z &= f, \end{aligned} \tag{1}$$

wo f eine Function von v allein, φ aber Function von u und v ist. Setzt man nämlich

$$\lambda^2 = \frac{f'^2}{f'^2 + \varphi^2}$$

so wird die Fundamentalgrösse G gegeben durch

$$G = \lambda\left(2\varphi_v - \varphi \frac{f''}{f'}\right).$$

Die Fläche ist daher auf das System ihrer Haupttangentencurven bezogen, wenn

$$\varphi = \sqrt{f'}\,\psi(u) \tag{2}$$

gewählt wird, wo man $\psi(u)$ auch gleich αu setzen kann; α ist dann reell oder rein imaginär zu nehmen, je nachdem f' positiv oder negativ ist. Unter dieser Voraussetzung wird aber, wie eine einfache Rechnung zeigt

$$C = \frac{1}{4}\left[2\frac{\partial\beta}{\partial v} - (\beta^2 + 4)\right]\frac{\psi u}{\psi' u} = \frac{1}{4}\left[2\frac{\partial\beta}{\partial v} - (\beta^2 + 4)\right]u,$$

falls

$$\beta = \frac{f''}{f'} \tag{3}$$

gesetzt wird. *Daher ist für alle Regelflächen, die aus der projectiven Umformung der Conoide* (1) *entspringen, die Invariante C das Product einer Function von u in eine Function von v.*

Ich bezeichne nun eine willkürliche Function von $u' + v'$ mit Θ und setze

$$\sigma = 2\frac{\partial\beta}{\partial v} - (\beta^2 + 4), \quad u = \Theta, \tag{4}$$

$$\int \sqrt{\gamma\sigma}\, dv = 2(v' - u'),$$

wo γ gleich $+1$ oder -1 zu nehmen ist, je nachdem σ positiv oder negativ ist. Die Gleichungen (1) gehen dann über in

$$\begin{aligned} x &= \alpha\sqrt{f'}\,\Theta \cos v, \\ y &= \alpha\sqrt{f'}\,\Theta \sin v, \\ z &= f, \end{aligned} \tag{5}$$

in denen an Stelle von v das Argument $v'u'$ nach (4) einzuführen ist. Mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial u'} = -\frac{2}{\sqrt{\gamma\sigma}}, \quad \frac{\partial v}{\partial v'} = \frac{2}{\sqrt{\gamma\sigma}}, \quad \frac{\partial \sqrt{f'}}{\partial u'} = \frac{\beta}{2}\sqrt{f'}\,\frac{\partial v}{\partial u'}$$

findet man aus (5)

$$\begin{aligned}
x'_u &= \Theta'\sqrt{f'}\cos v - \frac{\Theta\sqrt{f'}}{\sqrt{\gamma\sigma}}(\beta\cos v - 2\sin v),\\
y'_u &= \Theta'\sqrt{f'}\sin v - \frac{\Theta\sqrt{f'}}{\sqrt{\gamma\sigma}}(\beta\sin v + 2\cos v),\\
z'_u &= -\frac{2f'}{\sqrt{\gamma\sigma}},\\
x'_v &= \Theta'\sqrt{f'}\cos v + \frac{\Theta\sqrt{f'}}{\sqrt{\gamma\sigma}}(\beta\cos v - 2\sin v),\\
y'_v &= \Theta'\sqrt{f'}\sin v + \frac{\Theta\sqrt{f'}}{\sqrt{\gamma\sigma}}(\beta\sin v + 2\cos v),\\
z'_v &= \frac{2f'}{\sqrt{\gamma\sigma}}.
\end{aligned}$$

Durch Bildung der zweiten Differentialquotienten findet man ferner, dass die Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial u'\partial v'} &= \frac{\Theta'' - \Theta\gamma}{2\Theta'}\left(\frac{\partial}{\partial u'} + \frac{\partial}{\partial v'}\right)\\
&\quad + \frac{1}{\sigma\sqrt{\gamma\sigma}}\left[\frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} - 3\beta\frac{\partial\beta}{\partial v} + \beta(\beta^2+4)\right]\left(\frac{\partial}{\partial v'} - \frac{\partial}{\partial u'}\right)
\end{aligned}$$

für die drei Coordinaten x, y, z erfüllt ist, so dass, wenn zur Abkürzung

$$(6)\qquad \begin{aligned}
\Psi &= -\frac{\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} - 3\beta\frac{\partial\beta}{\partial v} + \beta(\beta^2+4)\right)}{\sigma\sqrt{\gamma\sigma}} = -\frac{T}{\sigma\sqrt{\gamma\sigma}},\\
\Phi &= \frac{\Theta'' - \Theta\gamma}{2\Theta'}
\end{aligned}$$

gesetzt wird, sich

$$\begin{aligned}
B &= \Phi + \Psi,\\
B_1 &= \Phi - \Psi,
\end{aligned}$$

$$E = -G = -\frac{4\Theta'\sqrt{f'}\,\alpha\lambda}{\sqrt{\gamma\sigma}}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{f'+\Theta^2}}$$

ergiebt. Jedes dieser Coordinatensysteme genügt daher den Bedingungen

$$(7)\qquad \frac{\partial B}{\partial u'} = \frac{\partial B_1}{\partial v'}, \quad E = -G.$$

Es ist dies nur ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes:

Sind die Erzeugenden und Haupttangentencurven einer Regelfläche

zu Coordinatenlinien gewählt, und ist C das Product UV einer Function von u in eine Function von v allein, so liefert die Transformation

$$M = u' + v',$$
$$N = u' - v'$$

unter der Voraussetzung, dass M eine willkürliche Function von u ist und N von v allein so abhängt, dass

$$\left(\frac{dN}{dv}\right)^2 = V,$$

Coordinatensysteme, für welche die Bedingungen (7) *erfüllt sind.*

Das Conoid (1) wird daher eine Fläche P, wenn

$$\Phi' - \frac{2}{\sqrt{\gamma\sigma}}\Psi' = \Phi^2 - \Psi^2$$

ist, welche Gleichung nur dann bestehen kann, wenn

$$\Phi' - \Phi^2 = \frac{2}{\sqrt{\gamma\sigma}}\Psi' - \Psi'^2 = \text{const.}$$

genommen wird. Insbesondere wird dasselbe zur Translationsfläche, wenn $B = B_1 = 0$ ist, d. h. wenn

(8) $$T = 0, \quad \Theta'' = \gamma\Theta$$

gewählt wird.

Die Gleichung $T = 0$ lässt sich leicht integriren. Setzt man nämlich

(9) $$\frac{d\beta}{dv} = z, \quad \frac{d^2\beta}{dv^2} = z\,\frac{dz}{d\beta},$$

so geht sie über in

$$z\frac{dz}{d\beta} - 3\beta z + (\beta^2+4)\beta = 0,$$

oder für

$$z - (\beta^2+4) = \zeta, \quad \beta^2 + 4 = \alpha$$

in

$$2(\zeta+\alpha)\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} = \zeta,$$

so dass

$$z = \beta^2 + 4 + c + \sqrt{c}\sqrt{\beta^2+4+c} + \frac{\partial\beta}{\partial v}$$

mit der willkürlichen Constanten c wird. Setzt man

$$\beta^2 + 4 + c = (\beta+\eta)^2,$$

so wird

$$-\frac{d\eta}{dv} = \frac{4+(\sqrt{c}+\eta)^2}{2}$$

oder

(10) $$\eta + \sqrt{c} = -2\,\mathrm{tg}\,v,$$

da die willkürliche Constante bei v ohne wesentliche Beschränkung fortgelassen werden kann. Aus

$$(11) \qquad \beta = \frac{4 + c - \eta^2}{2\eta},$$

oder

$$\beta = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 v)}{\sqrt{c} + 2 \operatorname{tg} v} - \frac{2[2 - \sqrt{c} \operatorname{tg} v]}{\sqrt{c} + 2 \operatorname{tg} v}$$

folgt nach (3)

$$(12) \qquad f' = \frac{k}{\cos^2 v} \frac{1}{(2 \operatorname{tg} v + \sqrt{c})},$$

wo k eine willkürliche Constante, und

$$(13) \qquad f = \frac{k}{2} l(2 \operatorname{tg} v + \sqrt{c}).$$

Berücksichtigt man ferner, dass nach (11)

$$\sigma = \frac{4}{\cos^4 v (\sqrt{c} + 2 \operatorname{tg} v)^2}$$

wird, so folgt für $\gamma = +1$.

$$\int \sqrt{\sigma}\, dv = - l(\sqrt{c} + 2 \operatorname{tg} v) = 2(v' - u');$$

mithin

$$f = - k(v' - u').$$

Da indessen eine Aenderung der willkürlichen Constanten c nur einer projectiven Transformation der y und x entspricht, so kann man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit c gleich Null setzen und erhält so

$$(14) \qquad \begin{aligned} x &= \Theta e^{v_1 - u'}, \\ y &= \Theta e^{-(v_1 - u_1)}, \\ z &= k(v_1 - u_1) \end{aligned}$$

als einziges der Bedingung $T = 0$ entsprechendes Conoid.

Die Transformation (9) setzte indessen voraus, dass β nicht *constant* ist. *Der besonderen Lösung $\beta = 0$ entspricht die Schraubenfläche*

$$(15) \qquad \begin{aligned} x &= \Theta \cos (v_1 - u_1), \\ y &= \Theta \sin (v_1 - u_1), \\ z &= k(v_1 - u_1); \end{aligned}$$

dem Falle $\sigma = 0$, dem auch die besondere Lösung $\beta = 2i$ untergeordnet ist, entspricht ein *hyperbolisches Paraboloid.*

Es sei mir gestattet, die besonders merkwürdigen Verhältnisse, welche die Minimalfläche (15) darbietet, hier noch zu verfolgen. Man erhält, da Θ eine willkürliche Function von $u_1 + v_1$ ist,

$$B = B_1 = \frac{\Theta'' + \Theta}{2\Theta'},$$

$$2A = 2C_1 = \frac{\Theta'' - \Theta}{\Theta'} + \frac{2\Theta\Theta'}{\Theta^2 + k^2},$$

$$2A_1 = 2C = \frac{\Theta'' - \Theta}{\Theta'} - \frac{2\Theta\Theta'}{\Theta^2 + k^2},$$
$$e = g = \Theta'^2 + \Theta^2 + k^2,$$
$$f = \Theta'^2 - \Theta^2 - k^2,$$
$$E = -G = \frac{2\Theta' k}{\sqrt{\Theta^2 + k^2}}.$$

Je nach der Wahl der willkürlichen Function Θ von $u_1 + v_1$ erhält man verschiedene, wegen $e = g$ stets *isometrische* Coordinatensysteme auf der Fläche. So ergeben sich für

$$\Theta' = \sqrt{\Theta^2 + k^2}$$

die *Krümmungslinien;* für $B = B_1 = 0$ erscheint die Fläche auf ∞^1 Arten als *Translationsfläche* dargestellt.

Setzt man dagegen

$$A_1 = C = \frac{\Theta'' - \Theta}{\Theta'} - \frac{2\Theta'\Theta}{\Theta^2 + k^2} = 0,$$

so erhält man *geodätisch conjugirte Systeme auf der Schraubenfläche.* Die Integration der letzten Gleichung liefert

$$\left(\frac{\Theta'}{\Theta^2 + k^2}\right)^2 = -\frac{1}{\Theta^2 + k^2} + \text{const.},$$

oder, wenn statt $u_1 + v_1$ die Variabele w eingeführt wird,

$$\frac{d\Theta}{\sqrt{\Theta^2 + k^2}} \sqrt{c(\Theta^2 + k^2) - 1} = dw,$$

wodurch die Ermittelung von ∞^1 vielen geodätisch conjugirten Systemen auf der Schraubenfläche auf elliptische Functionen zurückgeführt ist.*)

Die Fläche erscheint als *Fläche P* (§ IV), wenn

$$\frac{\partial B}{\partial u} - B B_1 = 0,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Theta'' + \Theta}{2\Theta'}\right) = \left(\frac{\Theta'' + \Theta}{2\Theta'}\right)^2$$

gesetzt wird. Dies liefert

$$(\Theta'' + \Theta)(w + c) + 2\Theta' = 0,$$

oder

$$\Theta = h\,\frac{\sin(u_1 + v_1 + c_1)}{u_1 + v_1 + c},$$

wo h, c, c_1 willkürliche Constanten sind. Setzt man

$$2u_1 + c_1 = 2U, \qquad 2v_1 + c_1 = 2V,$$

so erhält man

*) Vgl. die Anmerkung am Schlusse des § VIII.

$$x = \frac{h}{2}\,\frac{\sin 2U + \sin 2V}{U+V+C},$$
$$y = \frac{h}{2}\,\frac{\cos 2U - \cos 2V}{U+V+C},$$
$$z = k\,\frac{V^2 + VC - (U^2+UC)}{U+V+C};$$

und die Curven, denen nach § III, (17) die Fläche bei dieser Coordinatenbestimmung adjungirt ist, werden durch die von den beiden willkürlichen Constanten h und C abhängigen Schraubenlinien

$$\begin{aligned} \xi &= h\cos 2U, & \xi' &= h\cos 2V,\\ \eta &= -h\sin 2U, & \eta' &= h\sin 2V,\\ \zeta &= -k(U+C), & \zeta' &= k(V+C) \end{aligned}$$

gebildet.

3) *Rotationsflächen.* Für eine Rotationsfläche, deren Gleichungen

$$x = u\cos v,$$
$$y = u\sin v,$$
$$z = f(u) = f$$

sind, hat man

$$A = \frac{f'f''}{1+f'^2},\quad A_1 = 0,\quad B = 0,\quad B_1 = \frac{1}{u},\quad C = -\frac{u}{1+f'^2},\quad C_1 = 0,$$
$$E = -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},\quad G = -\frac{uf'}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

Die Differentialgleichung der Haupttangentencurven ist daher

$$\frac{f''}{uf'}\,du^2 + dv^2 = 0.$$

Setzt man also

$$\sigma = \sqrt{\frac{-f''}{uf'}},$$

so wird durch die Substitutionen

$$du\sigma + dv = du'',$$
$$du\sigma - dv = dv''$$

die Fläche auf ihre Haupttangentencurven bezogen, und vermöge der Beziehungen

$$\frac{\partial v''}{\partial u} = \frac{\partial u''}{\partial u} = \sigma,\quad \frac{\partial u''}{\partial v} = -\frac{\partial v''}{\partial v} = 1$$

erhält man leicht die charakteristischen Gleichungen

$$x_{u''u''} = [A]x_{u''} + [A_1]x_{v''},$$
$$x_{u''v''} = [B]x_{u''} + [B_1]x_{v''} + p\,\frac{uf'}{2\sqrt{1+f'^2}},$$
$$x_{v''v''} = [C]x_{u''} + [C_1]x_{v''}$$

in denen, wie die Rechnung zeigt,

$$[A] = [C_1], \quad [C] = [A_1], \quad [B] = [B_1]$$

sämmtlich Functionen von u oder $u'' + v''$ sind.

Von diesen speciellen Eigenschaften einer Rotationsfläche kommt für die Integration der Gleichung § V, (24) *nur die projectiv invariante* $[A_1] = [C]$ *in Betracht.* Setzt man also voraus, *dass für eine auf ihre Haupttangentencurven bezogene Fläche diese beiden Grössen gleich ein und derselben Function* F *von $u'' + v''$ sind*, so lautet dieselbe:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u''}(z^{-2} - z^2) + \mathrm{F}\left[\frac{\partial z^{-2}}{\partial u''} - \frac{\partial z^2}{\partial v''}\right] = \frac{\partial^2 l z^2}{\partial u'' \partial v''}.$$

Da die allgemeine Lösung nicht explicite angebbar scheint, setze ich z als Function von

$$u'' + v'' = w$$

voraus. Dann erhält man als erstes Integral

$$\frac{\partial l z^2}{\partial w} = \mathrm{F}(z^{-2} - z^2) + \text{const.}$$

Auch diese Differentialgleichung, welche für $z^2 = \zeta$ die Form

$$\frac{\partial \zeta}{\partial w} = \mathrm{F}(1 - \zeta^2) + \zeta c$$

annimmt, führt nur in dem speciellen Falle $c = 0$, wenn F nicht weiter specialisirt werden soll, auf eine Quadratur, und zwar wird

$$\frac{1 + z^2}{1 - z^2} = e^{2\int \mathrm{F} dw} C$$

mit der willkürlichen Constanten C. Setzt man nun

$$u'' + v'' = U,$$
$$u'' - v'' = V$$

so sind die Argumente u', v' der gesuchten Curven zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\frac{\partial u'}{\partial U} \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{\partial u'}{\partial V},$$
$$\frac{\partial v'}{\partial U} \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{\partial v'}{\partial V}.$$

Hieraus folgt für

$$\Theta = \frac{1 + z}{z - 1},$$

$$u' = \int dw\, \Theta + u - v,$$

$$v' = \int \frac{dw}{\Theta} + u - v.$$

Diese Gleichungen liefern eine einfach unendliche Schaar von Curven der verlangten Beschaffenheit auf allen den Flächen, die der oben

genannten Bedingung in Bezug auf das System ihrer Haupttangentencurven genügen.

4) *Die Flächen zweiter Ordnung.* Auf einer *negativ gekrümmten Fläche zweiter Ordnung* wähle man das System der Erzeugenden zu Coordinatenlinien. Da dieselben zugleich Haupttangentencurven und geodätische Linien sind, so ist

$$E = G = A_1 = C = 0,$$

und die Differentialgleichung § V, (24) reducirt sich auf

$$\frac{\partial^2 l z^2}{\partial u \partial v} = 0;$$

d. h. es ist

$$z = \frac{\varphi'(u)}{\psi'(v)},$$

wo φ und ψ willkürliche Functionen bezüglich von u und v sind. Hieraus aber folgt

$$u' = \varphi(u) - \psi(v),$$

$$v' = \varphi(u) + \psi(v),$$

oder

$$u = F(u' + v'),$$

$$v = \Phi(u' - v').$$

Für das hyperbolische Paraboloid, das hier etwa als Typus gelten kann, hat man z. B.

$$x = u,$$

$$y = v,$$

$$z = uv.$$

Demnach wird

$$x = F(u' + v'),$$

$$y = \Phi(u' - v'),$$

$$z = F(u' + v')\,\Phi(u' - v'),$$

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{\partial l(F'\Phi')}{\partial v},$$

$$B_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial l(F'\Phi')}{\partial u},$$

$$E = -G = \frac{2F'\Phi'}{1 + F'^2 + \Phi'^2}.$$

Zur Bestimmung aller Coordinatensysteme, für die die beiden Invarianten § III, I) verschwinden, hat man daher die Gleichung

$$2\,\frac{\partial^2 l F'\Phi'}{\partial u \partial v} - \frac{\partial l F'\Phi'}{\partial v}\,\frac{\partial l F'\Phi'}{\partial u} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\,\frac{1}{\sqrt{F'\Phi'}} = 0$$

zu lösen. Setzt man

$$u + v = \xi, \qquad u - v = \eta,$$

ferner

$$\frac{1}{\sqrt{F'}} = \Xi, \qquad \frac{1}{\sqrt{\Phi'}} = \mathrm{H},$$

so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{\partial^2(\Xi\mathrm{H})}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2(\Xi\mathrm{H})}{\partial\eta^2} = 0,$$

oder, da Ξ nur Function von ξ, H nur Function von η ist, in

$$\frac{1}{\Xi}\,\frac{\partial^2\Xi}{\partial\xi^2} = \frac{1}{\mathrm{H}}\,\frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial\eta^2}.$$

Hieraus folgt endlich

$$\frac{\partial^2\Xi}{\partial\xi^2} = k\Xi, \qquad \frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial\eta^2} = k\mathrm{H}$$

wo k eine Constante, die positiv, negativ, oder Null sein kann.

Im ersten Falle erhält man nach einfacher Rechnung

$$F(u+v) = -\frac{1}{2\sqrt{k}A}\,\frac{e^{-\sqrt{k}(u+v)}}{Ae^{\sqrt{k}(u+v)} + A_1 e^{-\sqrt{k}(u+v)}} + h,$$

$$\Phi(u-v) = -\frac{1}{2\sqrt{k}B}\,\frac{e^{-\sqrt{k}(u-v)}}{Be^{\sqrt{k}(u-v)} + B_1 e^{-\sqrt{k}(u-v)}} + h_1,$$

im zweiten, wo $k = -k_1$

$$F(u+v) = a\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{k_1}\,(u+v) + c\right] + c_1,$$
$$\Phi(u-v) = a_1\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{k_1}\,(u-v) + b\right] + b_1;$$

endlich im letzten

$$F(u+v) = \frac{1}{\alpha(u+v)+\beta} + c,$$
$$\Phi(u-v) = \frac{1}{\alpha_1(u-v)+\beta_1} + c_1,$$

wobei A, B, h, a, b, c, α, β, sowie die mit einem Strich versehenen Werthe willkürliche Constanten sind. *In allen drei Fällen erkennt man aber leicht, dass die Curven* ξ, η, ζ; ξ', η', ζ', *die nach der Ausdrucksweise des* § IV *bei dieser Coordinatenbestimmung der Fläche adjungirt sind, gerade Linien, nämlich conjugirte Polaren in Bezug auf die Fläche zweiten Grades sind.* Die einzige Möglichkeit eine Fläche zweiten Grades als Fläche P aufzufassen, beruht also auf der durch die Doppelschaar der Berührcurven derjenigen Tangentenkegel, deren Spitzen auf conjugirten Polaren liegen, gelieferten Coordinatenbestimmung.

Als Typus *positiv gekrümmter Flächen zweiten Grades* kann man die *Kugel* nehmen, bei der die Systeme conjugirter Curven zugleich

Orthogonalsysteme sind. Soll aber auf einer Fläche ein *Orthogonalsystem* der Bedingung

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$$

genügen, so folgt nach den in § I, (10) gegebenen Ausdrücken der B, B_1 sofort

$$\frac{\partial^2 le}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 lg}{\partial u \partial v}$$

d. h. *das System muss ein isometrisches Orthogonalsystem sein. Das System der Krümmungslinien bildet daher nur dann auf einer krummen Fläche ein System der verlangten Art, wenn die Fläche durch dieselbe in unendlich kleine Quadrate getheilt wird.*

Hieraus ergiebt sich, *dass auf den positiv gekrümmten Flächen zweiten Grades alle Coordinatensysteme der verlangten Beschaffenheit von den collinearen Transformationen der isometrischen Curven auf derjenigen Kugel gebildet werden, der die Kugel selbst collinear verwandt ist.*

Da bekanntlich die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades selbst ein isometrisches System bilden, so ergiebt sich nebenbei:

Bezieht man eine positiv gekrümmte Fläche zweiten Grades collinear auf die Kugel, so entspricht dem System der Krümmungslinien der ersten ein isometrisches Orthogonalsystem auf jener Kugel.

Analytisch ergeben sich die vorigen Resultate auch ohne weiteres aus der Gleichung § V, (24a). Denn für die Kugel, die auf ein isometrisches Orthogonalsystem etwa bereits bezogen ist, findet man sofort

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial S}{\partial u}$$

so dass z durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \operatorname{arc\,tg} z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{arc\,tg} z}{\partial v^2} = 0$$

gegeben ist. Eine reelle Variable z aber, welche dieser Gleichung genügt, ist der Quotient des reellen und imaginären Theiles einer Function der complexen Variabelen $u + iv$. Setzt man nämlich $\operatorname{arc\,tg} z = \varphi$, so ist der vorstehenden Gleichung zufolge

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial M}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = - \frac{\partial M}{\partial v}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial v}(M + i\varphi) = i \frac{\partial}{\partial u}(M + i\varphi).$$

Setzt man nun

$$M = l\varrho$$

so wird

$$\frac{\partial}{\partial v} l(\varrho e^{i\varphi}) = i \frac{\partial}{\partial u} l(\varrho e^{i\varphi})$$

d. h. es ist $\varrho e^{i\varphi}$ eine Function der complexen Variabelen $u+iv$, die mit $X+Yi$ bezeichnet sein möge, oder

$$z = \operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X}$$

und zugleich erhält man aus

$$u' = \int (Y\,du + X\,dv) = \text{const.},$$
$$v' = \int (-X\,du + Y\,dv) = \text{const.}$$

das System der Coordinatenlinien u', v'.

Eine ähnliche Lösung würde sich auf allen positiv gekrümmten Flächen ergeben, auf denen für irgend ein Coordinatensystem

$$E = G, \quad F = 0.$$

ist und zugleich die beiden Invarianten

$$m, n$$

oder

$$A - C - 2B_1,$$
$$A_1 - C_1 + 2B$$

verschwinden. Denn aus $E = G = P$ folgt dann

$$4B = \frac{\partial l P \sqrt{\mathrm{H}}}{\partial u}, \qquad 4B_1 = \frac{\partial l P \sqrt{\mathrm{H}}}{\partial v}$$

so dass man wieder auf die eben angegebene Lösung für z zurückgeführt wird.

Die Fläche selbst ist aber dann eine positiv gekrümmte Fläche zweiten Grades. Dies erkennt man aus den folgenden Betrachtungen, die sich insbesondere auf die Invarianten

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} m &= A - C - 2B_1, \\ n &= A_1 - C_1 + 2B, \end{aligned} \quad \text{unter der Voraussetzung } E = G,\ F = 0$$

sowie auf

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} m_1 &= A + C - 2B_1, \\ n_1 &= A_1 + C_1 - 2B \end{aligned} \quad \text{unter der Voraussetzung } E = -G,\ F = 0$$

beziehen.

Setzt man nämlich im Falle (a)

$$u + iv = u_1, \quad u - iv = v_1,$$

so wird

$$4x_{u'u'} = m x_u + n x_v + 4x_{u'}(B_1 + iB),$$
$$4x_{v'v'} = m x_u + n x_v + 4x_{v'}(B_1 + iB).$$

Hieraus folgt:

1) *Jede Fläche, auf der ein den Voraussetzungen* $m = n = 0$,

$E = G$, $F = 0$ entsprechendes Coordinatensystem existirt, ist eine positiv gekrümmte Fläche zweiten Grades.

Setzt man im Falle b)

$$u = u_1 + v_1, \quad v = u_1 - v_1,$$

so wird

$$x_{u'u'} = x_{u'}\left[2(B + B_1) + \frac{m_1 + n_1}{2}\right] + x_{v'}\left(\frac{m_1 - n_1}{2}\right),$$

$$x_{v'v'} = x_{u'}\left(\frac{m' + n'}{2}\right) + x_{v'}\left[2(B_1 - B) + \frac{m_1 - n_1}{2}\right].$$

Das heisst:

2) *Eine Fläche, auf der ein den Voraussetzungen $m_1 = \pm n_1$, $E = -G$, $F = 0$ entsprechendes Coordinatensystem existirt, ist eine Regelfläche. Sie ist insbesondere eine negativ gekrümmte Fläche zweiten Grades, wenn $m_1 = n_1 = 0$ ist.*

3) *Eine Regelfläche kann stets auf conjugirte Coordinatensysteme bezogen werden, für die $E = -G$ und die beiden Invarianten m_1 und n_1 gleich oder entgegengesetzt gleich sind.*

4) *Ist eine negativ gekrümmte Fläche zweiten Grades auf das System ihrer Erzeugenden u, v bezogen, so ist jedes conjugirte Coordinatensystem, für das $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$ ist, durch die Gleichungen*

$$u = F(u_1 + v_1),$$
$$v = \Phi(u_1 - v_1)$$

gegeben, und für dasselbe verschwinden zugleich die beiden Invarianten m_1 und n_1, während $E = -G$ ist.

Für jedes conjugirte Coordinatensystem auf einer positiv gekrümmten Fläche zweiten Grades, in Bezug auf das die Gleichung $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$ stattfindet, verschwinden die beiden Invarianten m und n, während $E = G$ ist.

§ VII.

Von der Transformation einer Fläche durch parallele Normalen im Zusammenhang mit der Aufgabe des § V.

Der im § V behandelten Aufgabe, alle conjugirten Coordinatensysteme auf einer Fläche zu bestimmen, für die

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v} \tag{1}$$

ist, lässt sich auch noch eine andere Deutung geben. Ist nämlich eine Fläche F auf ein Coordinatensystem so bezogen, dass die rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z der partiellen Differentialgleichung

(2) $$\frac{\partial}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial}{\partial u} + B_1 \frac{\partial}{\partial v}$$

genügen, während die Gleichung (1) erfüllt ist, so kann man setzen

(3) $$B = \frac{1}{2} \frac{\partial l N}{\partial v}, \quad B_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial l N}{\partial u}.$$

Dann aber geht (2) über in

(4) $$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial u}\right) = 0.$$

Es existiren daher drei Functionen X, Y, Z, welche den Gleichungen

(5) $$\begin{aligned} x_u &= N X_u, & y_u &= N Y_u, & z_u &= N Z_u, \\ -x_v &= N X_v, & -y_v &= N Y_v, & -z_v &= N Z_v \end{aligned}$$

genügen. Die Fläche F*), welche von den Punkten X, Y, Z gebildet wird, ist offenbar *durch parallele Normalen auf F bezogen*, allerdings in specieller Weise. Ich betrachte daher zunächst den *allgemeinen Fall*, wo zwei Flächen F und F, deren rechtwinklige Coordinaten durch kleine und grosse Buchstaben von einander unterschieden werden sollen, *überhaupt durch parallele Normalen auf einander bezogen sind.* Es ist dann

(6) $$\begin{aligned} X_u &= \alpha x_u + \beta x_v, \\ X_v &= \alpha_1 x_u + \beta_1 x_v, \end{aligned}$$

nebst analogen Gleichungen für y und z. Dem Längenelemente von F, das den Incrementen du, dv entspricht, wird ein *parallel gerichtetes auf* F entsprechen, wenn du, dv so gewählt werden, dass

(7) $$\begin{aligned} \alpha\, du + \alpha_1\, dv &= \lambda\, du, \\ \beta\, du + \beta_1\, dv &= \lambda\, dv \end{aligned}$$

ist. Bezeichnet man die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung in Bezug auf F und F durch E, F, G; E', F', G', so ist nach (6)

$$\begin{aligned} E' &= \alpha E + \beta F, \\ F' &= \alpha F + \beta G = \alpha_1 E + \beta_1 F, \\ G' &= \alpha_1 F + \beta_1 G, \\ E' G' - F'^2 &= (\alpha \beta_1 - \beta \alpha_1)(EG - F^2), \end{aligned}$$

mithin wird aus (7)

(7a) $$\begin{aligned} E'\, du + F'\, dv &= \lambda(E\, du + F\, dv), \\ F'\, du + G'\, dv &= \lambda(F\, du + G\, dv). \end{aligned}$$

*) Da X, Y, Z nur bis auf Constanten bestimmt sind, so erhält man eigentlich ∞^3 viele congruente Flächen. An Stelle der *drei* Systeme der Gleichungen (5) ist im Folgenden der Kürze halber nur immer das *erste auf x bezügliche* hingeschrieben.

Die beiden Flächen F und F *haben demnach gleiche resp. entgegengesetzt gleiche Curvatura integra, je nachdem die Determinante*

$$\Delta = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1$$

*positiv oder negativ ist.**)

Die Gleichung (7) für λ hat daher immer *zwei reelle Wurzeln,* wenn eine der beiden Flächen *positiv* gekrümmt ist, d. h. bei negativem Δ. Sind dieselben überhaupt λ_1, λ_2, so gehört zu jeder derselben nach (7) ein bestimmtes Verhältniss $du:dv$, das durch $\varkappa_1, \varkappa_2$ bezeichnet sein möge, so dass

$$\frac{du}{dv} = \varkappa_1, \quad \frac{du}{dv} = \varkappa_2 \tag{8}$$

ist. Alsdann folgt aus (6)

$$\begin{aligned} X_u\varkappa_1 + X_v &= \lambda_1(x_u\varkappa_1 + x_v), \\ X_u\varkappa_2 + X_v &= \lambda_2(x_u\varkappa_2 + x_v). \end{aligned} \tag{9}$$

Integrirt man die Gleichungen (8) durch die Gleichungen

$$\varphi_1(u, v) = u_1,$$
$$\varphi_2(u, v) = v_1,$$

und führt die willkürlichen Constanten u', v' als neue Variabele ein, so wird aus (9)

$$\begin{aligned} X_{u'} &= \lambda_1 x_{u'}, \\ X_{v'} &= \lambda_2 x_{v'}. \end{aligned} \tag{10}$$

Das Entsprechen (6) *kann daher stets auf die Form* (10) *gebracht werden, welche aussagt, dass es ein System conjugirter Curven auf F giebt, dem ein ebensolches auf* F *so entspricht, dass die Tangenten entsprechender Curven in entsprechenden Punkten parallel sind.* Aber diese Beziehung ist nur dann reell, wenn λ_1 und λ_2 reell sind.

Vermöge der Gleichungen (6) ist das Entsprechen der Richtungen zu einander gehöriger Längenelemente in je zwei entsprechenden Punkten ein *projectives. Diese projective Beziehung wird zur Involution,* wenn

$$\Delta' = \beta_1 + \alpha = 0,$$

und dann wird zugleich

$$\lambda^2 + \Delta = 0,$$

so dass die Gleichungen (10) die Form

*) Δ ist natürlich von Null verschieden vorauszusetzen. Ist Δ gleich Null, so verschwindet

$$\left\| \begin{matrix} X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{matrix} \right\|$$

d. h. die Punkte X, Y, Z bilden nur eine Curve. Vergl. die erste Anmerkung in § IX.

$$X_{u'} = \sqrt{-\Delta}\, x_{u'},$$
$$X_{v'} = -\sqrt{-\Delta}\, x_{v'}$$

annehmen.

Um imaginäre Beziehungen zu vermeiden, kann man für den Fall der *Involution* die Gleichungen (6) auch auf folgende Form bringen. Ist nämlich die Bedingung der Involution erfüllt, so kann man bei *willkürlichem* $\varkappa$ und λ

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \alpha\varkappa + \alpha_1 &= \lambda l, \\ \beta\varkappa + \beta_1 &= \lambda, \\ \alpha l + \alpha_1 &= -\frac{\Delta}{\lambda}\varkappa, \\ \beta l + \beta_1 &= -\frac{\Delta}{\lambda} \end{aligned}$$

setzen. Werden nun aus den Gleichungen

$$\text{(12)} \qquad \varkappa = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}}, \quad l = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}$$

die Functionen $\psi(uv) = u'$, $\varphi(uv) = v'$ bestimmt, und u', v' als neue Variabele eingeführt, so entsteht als *allgemeine Form der involutorischen Beziehung* nach (1) und (6)

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} X_{u'} &= \lambda x_{v'} \frac{\frac{\partial v}{\partial v'}}{\frac{\partial v}{\partial u'}} = \omega x_{v'}, \\ X_{v'} &= -\frac{\Delta}{\lambda} x_{u'} \frac{\frac{\partial v}{\partial u'}}{\frac{\partial v}{\partial v'}} = -\frac{\Delta}{\omega} x_{u'}. \end{aligned}$$

Bei reellen Doppelelementen (Δ negativ) kann dieselbe daher auf unendlich viele Art in die Form

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} X_{u'} &= \mu x_{v'}, \\ X_{v'} &= \mu x_{u'}, \end{aligned}$$

bei imaginären Doppelelementen (Δ positiv) ebenso in die Form

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} X_{u'} &= \mu x_{v'}, \\ X_{v'} &= -\mu x_{u'} \end{aligned}$$

gebracht werden. In der That, damit die Gleichungen (13) die unter (14), (15) angegebene Form annehmen, hat man

$$\lambda \frac{\frac{\partial v}{\partial v'}}{\frac{\partial v}{\partial u'}} = - \tau \frac{\Delta}{\lambda} \frac{\frac{\partial v}{\partial u'}}{\frac{\partial v}{\partial v'}},$$

oder

$$\lambda = \sqrt{-\tau \Delta} \frac{\frac{\partial v}{\partial u'}}{\frac{\partial v}{\partial v'}} \tag{16}$$

zu setzen. Bei positivem Δ ist $\tau = -1$ zu nehmen, und es ergeben sich die Gleichungen (15); bei negativem Δ dagegen führt $\tau = +1$ auf die Form (14). Nunmehr folgt aus den bekannten Gleichungen

$$\delta \frac{\partial u}{\partial u'} = - \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \delta \frac{\partial u}{\partial v'} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

$$\delta \frac{\partial v}{\partial u'} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \delta \frac{\partial v}{\partial v'} = - \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\delta = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

dass

$$\lambda = - \sqrt{-\tau \Delta} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial u}}$$

wird, also folgt nach (11) und (12)

$$\begin{aligned} - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \sqrt{-\tau \Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \beta \frac{\partial \psi}{\partial v} - \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \sqrt{-\tau \Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned} \tag{17}$$

so dass die Function ψ aus der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{- \alpha \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{-\tau \Delta}} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\beta \frac{\partial \psi}{\partial v} - \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{-\tau \Delta}} \right)$$

zu bestimmen ist, deren Lösung in der allgemeinsten Gestalt die kanonischen Formen der involutorischen Beziehung (14) *und* (15) *vermittelt.*

Hierbei scheint die folgende Bemerkung nicht überflüssig. Wird die Beziehung (6) durch Einführung beliebiger neuer Coordinaten u'' und v'', welche irgend welche von einander unabhängige Functionen von u und v sind, in die Form

$$\begin{aligned} X_{u''} &= A x_{u''} + B x_{v''}, \\ X_{v''} &= A_1 x_{u''} + B_1 x_{v''} \end{aligned} \tag{6a}$$

gebracht, *so bestehen die invarianten Relationen**)

$$B_1 + A = \beta_1 + \alpha = \Delta',$$
$$AB_1 - BA_1 = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = \Delta,$$

und gleichzeitig wird für eine beliebige Function f:

$$-A\frac{\partial f}{\partial v''} + A_1\frac{\partial f}{\partial u''}$$
$$= -\left[\frac{\partial v}{\partial v''}\left(-\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + \alpha_1\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial u}{\partial v''}\left(\beta\frac{\partial f}{\partial v} - \beta_1\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right],$$
$$B\frac{\partial f}{\partial v''} - B_1\frac{\partial f}{\partial u''}$$
$$= -\left[\frac{\partial v}{\partial u''}\left(-\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + \alpha_1\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial u}{\partial u''}\left(\beta\frac{\partial f}{\partial v} - \beta_1\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right],$$

so dass, wenn man die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial u}{\partial v''}\frac{\partial v}{\partial u''} - \frac{\partial v}{\partial v''}\frac{\partial u}{\partial u''}$$

mit σ bezeichnet, die identische Relation

$$\frac{\partial}{\partial u''}\left[\frac{-A\frac{\partial f}{\partial v''} + A_1\frac{\partial f}{\partial u''}}{\mathsf{M}}\right] - \frac{\partial}{\partial v''}\left[\frac{B\frac{\partial f}{\partial v''} - B_1\frac{\partial f}{\partial u''}}{\mathsf{M}}\right]$$
$$= \sigma\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{-\alpha\frac{\partial f}{\partial v} + \alpha_1\frac{\partial f}{\partial u}}{\mathsf{M}}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\beta\frac{\partial f}{\partial v} - \beta_1\frac{\partial f}{\partial u}}{\mathsf{M}}\right]\right\}$$

besteht, wo M eine beliebige Function der *absoluten Invarianten* $B_1 + A$, $AB_1 - BA_1$ sein kann. Die Differentialgleichung (18), deren invarianter Charakter durch die soeben gemachte Bemerkung gekennzeichnet ist, hat die merkwürdige Eigenschaft, durch eine

---

*) Diese Invarianz ist übrigens eine unmittelbare Folge davon, dass nach den unter (7) angegebenen Formeln

$$\Delta_1 = \frac{E'G + G'E - 2F'F}{EG - F^2},$$
$$\Delta = \frac{E'G' - F'^2}{EG - F^2}$$

ist, aus denen hervorgeht, dass Δ und Δ' aus den simultanen Invarianten der beiden quadratischen Differentialausdrücke

$$Edu^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$E'du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2$$

zusammengesetzt sind.

particuläre Lösung für den Fall der Involution*) vollständig integrirt werden zu können. Hat man nämlich eine solche Lösung gefunden,

---

*) Im allgemeinen Falle (6) findet dies nicht statt. Setzt man nämlich, der Differentialgleichung (18) zufolge:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} -\alpha \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \sqrt{-\tau\Delta}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \beta \frac{\partial \psi}{\partial v} - \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} &= \sqrt{-\tau\Delta}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned}$$

so folgt aus (6)

$$-X_u \frac{\partial \psi}{\partial v} + X_v \frac{\partial \psi}{\partial u} = \sqrt{-\tau\Delta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} x_u - \frac{\partial \varphi}{\partial u} x_v\right),$$

oder, wenn an Stelle der ursprünglichen Variabeln, unter der Voraussetzung, *dass φ und ψ von einander unabhängig sind*, u' und v' eingeführt werden,

$$X_u \frac{\partial u}{\partial v'} + X_v \frac{\partial v}{\partial v'} = \sqrt{-\tau\Delta}\left(x_u \frac{\partial u}{\partial u'} + x_v \frac{\partial v}{\partial v'}\right).$$

Demnach verwandeln sich die Gleichungen (6) in

$$\begin{aligned} X_{u'} &= A x_{v'} + B x_{v'}, \\ X_{v'} &= \sqrt{-\tau\Delta}\, x_{u'}, \end{aligned}$$

oder, da $A = \Delta_1$, $-B\sqrt{-\tau\Delta} = \Delta$ sein muss, in

$$\text{(6*)} \qquad \begin{aligned} X_{u'} &= \Delta_1 x_{u'} + \tau\sqrt{-\tau\Delta}\, x_{v'}, \\ X_{v'} &= \sqrt{-\tau\Delta}\, x_{u'}. \end{aligned}$$

Dies ist eine *canonische*, *nämlich nur von den Invarianten Δ und Δ_1 abhängige Gestalt der Formeln* (6), welche für $\Delta_1 = 0$ wieder in die der Involution übergeht. Ist die Form (6*) durch eine particuläre Lösung ψ der Differentialgleichung (a) gewonnen, so hängt die Bestimmung aller anderen Gleichungen von der Form (6*) von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-\Delta_1}{\sqrt{-\tau\Delta}}\,\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \tau\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0$$

ab. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(-\alpha \frac{\partial \psi}{\partial v} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\beta \frac{\partial \psi}{\partial v} - \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

ergiebt übrigens als eine andere *kanonische Form von* (6) die Gleichung

$$\text{(6**)} \qquad \begin{aligned} X_{u'} &= \Delta_1 x_{u'} - \Delta x_{v'}, \\ X_{v'} &= \quad x_{u'}. \end{aligned}$$

Wird eine Fläche durch parallele Normalen auf die Kugel vom Radius Eins bezogen, so ist, wie aus bekannten Formeln hervorgeht

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{eG + gE - 2fF}{eg - f^2}, \\ \Delta &= \frac{EG - F^2}{eg - f^2} = K. \end{aligned}$$

so kann man bei positivem Δ die Beziehung (6) auf die Form (15) bringen. Dann ist aber

$$\alpha = 0, \quad \alpha_1 = \mu,$$
$$\beta = -\mu, \quad \beta_1 = 0, \quad \Delta = \mu^2, \quad \tau = -1.$$

Die Gleichung (18) wird daher

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u'^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v'^2} = 0.$$

In der That geht durch die Substitution

$$u' + iv' = F(u'' + iv''),$$
$$u' - iv' = F_1(u'' - iv'')$$

die Gleichung (15) über in

$$X_{u''} = \mu x_{v''},$$
$$X_{v''} = -\mu x_{u''}.$$

Hat man andererseits bei negativem Δ die Form (14) hergestellt, so ist

$$\alpha = 0, \quad \alpha_1 = \mu,$$
$$\beta = \mu, \quad \beta_1 = 0, \quad \tau = +1, \quad \Delta = -\mu^2$$

und aus (18) wird dann

Das heisst: *Die einzigen Flächen, welche involutorisch durch parallele Normalen auf die Kugel bezogen werden können, sind die Minimalflächen.*

Sollen zwei Flächen involutorisch durch parallele Normalen so auf einander bezogen sein, dass in correspondirenden Punkten entgegengesetzt gleiches Krümmungsmass stattfindet, so ist in (10) $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$ zu setzen. Aus den Gleichungen

$$X_u = +x_u,$$
$$X_v = -x_v$$

folgt dann

$$X = f(u) + \varphi(v), \quad x = f(u) - \varphi(v)$$

nebst den analogen Werthen für Y, Z; y, z. *Es können daher nur solche conjugirte Translationsflächen in dieser Beziehung stehen.*

Soll dagegen das Krümmungsmass für beide Flächen dasselbe sein, so folgt ebenso aus den Gleichungen

$$X_u = x_v,$$
$$X_v = -x_u$$

für die Coordinaten X, x der Ausdruck

$$X = f(u+iv) + f_1(u-iv),$$
$$ix = f(u+iv) - f_1(u-iv)$$

und diese Flächen haben in der That in correspondirenden Punkten gleiches Krümmungsmass. Vgl. z. B. Briot und Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, S. 10, sowie die ausführlichen Untersuchungen von Herrn v. Lilienthal, Journal von Kronecker, Bd. 98, Allgemeine Eigenschaften von Flächen, deren Coordinaten sich durch die reellen Theile dreier analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen darstellen lassen.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u'^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v'^2}.$$

In der That ergiebt sich auch durch die Substitution

$$u'' = F(u' + v'),$$
$$v'' = G(u' - v')$$

die Beziehung

$$X_{u''} = \mu x_{u''},$$
$$X_{v''} = \mu x_{v''}.$$

In beiden Fällen bleibt μ invariant.

In Bezug auf reelle Verhältnisse besteht demnach ein sehr wesentlicher Unterschied, je nachdem die Involution reelle oder imaginäre Doppelelemente hat. Im ersten Falle mögen die beiden Flächen *conjugirt*, im zweiten *contrajugirt* heissen. Für die conjugirte Beziehung, wie sie durch (5) ausgedrückt wird, gelten nun insbesondere die folgenden Bemerkungen.*)

1) *In entsprechenden Punkten sind die Tangentenrichtungen der entsprechenden Curven u, v parallel.*

2) Das Längenelement dS der Fläche F ist gegeben durch

$$dS^2 = \frac{1}{N^2}\,[e\,du^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2],$$

wenn

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

das von F ist. *Die Verhältnisse der Längenelemente auf den Coordinatenlinien u, v bleiben daher durch die Transformation ungeändert.*

3) Die Coordinaten X, Y, Z der Fläche F genügen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial l N}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial l N}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = 0;$$

d. h. F *ist wieder auf ein conjugirtes System derselben Art wie F bezogen.*

4) Zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung und den charakteristischen Coefficienten $A, B, C, \ldots$ beider Flächen bestehen die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} [E]N &= E\,, & [e]N^2 &= e,\\ [F]N &= F = 0, & [f]N^2 &= -f,\\ [G]N &= -G\,, & [g]N^2 &= g, \end{aligned}$$

*) Ein specieller besonders bemerkenswerther Fall dieser Transformation ist von Herrn Christoffel erörtert: Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimalflächen, Journ. v. Crelle, Bd. 67, S. 218. Vgl. auch die von Herrn Darboux gegebene Darstellung, a. a. O. Tom II, S. 239 sowie die Dissertation von Reinbeck Ueber diejenigen Flächen, auf welche die Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden, Göttingen 1886.

$$\begin{aligned} [A] &= A - 2B_1, & [A_1] &= -A_1, \\ [C] &= -C, & [C_1] &= C_1 - 2B, \\ [B] &= -B, & [B_1] &= -B_1. \end{aligned}$$

Sind also die Coordinatenlinien auf F conjugirt *geodätische Curven*, — wie dies z. B. unendlich vielfach auf der windschiefen Minimalfläche erreicht werden kann*) — *so sind sie es auch auf der zweiten entgegengesetzt gekrümmten Fläche* F.

5) Die Schmiegungsebenen der Coordinatenlinien u, v sind in entsprechenden Punkten einander parallel. *Und zugleich findet zwischen den Krümmungsradien R, R' der Coordinatenlinien in entsprechenden Punkten die Beziehung*

$$R' = \frac{1}{N} R$$

statt.

Für den Torsionsradius τ der Curve u hat man die Gleichung

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R^2 \Delta}{e^3}$$

wo Δ die Determinante des ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten der x, y, z nach u ist. Ebenso wird für die entsprechende Curve auf der zweiten Fläche

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{R'^2 \Delta'}{e'^3}.$$

Aus der leicht zu erweisenden Gleichung

$$\Delta = N^3 \Delta'$$

folgt dann

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{N\tau'}$$

und dieselbe Beziehung findet auch für die Curven v statt.**)

Die Aufgabe, auf einer gegebenen Fläche alle conjugirten Coordinatensysteme der im § V definirten Art zu bestimmen, kommt nun auf die folgende hinaus:

Man soll einer Fläche F alle diejenigen Flächen F *zuordnen, bei denen in entsprechenden Punkten die Tangenten an zwei Systeme einander entsprechender Curven parallel sind, und zugleich die Verhältnisse correspondirender Längenelemente auf diesen Curven ungeändert bleiben.* Jedes unendlich kleine Parallelogramm auf der ersten Fläche, dessen Seiten von Elementen der genannten Curven gebildet werden, soll

*) Vgl. hierüber die Anmerkung am Schlusse des § IX.

**) Sind zwei Flächen überhaupt auf einander bezogen, so giebt es im allgemeinen immer ein reelles oder imaginäres System conjugirter Curven, das sich vermöge der Beziehung entspricht. Bei der Verwandtschaft durch parallele Normalen zeigen diese Curven ähnliche Eigenschaften, wie die im Text unter 1), 2), 5) angegebenen. Vgl. Peterson a. a. O. S. 50 ff.

also in ein parallel gelegenes auf der zweiten Fläche übergehen, bei dem die Verhältnisse der Seiten ungeändert bleiben. Es giebt allerdings *zwei wesentlich verschiedene Transformationen dieser Art*, je nachdem der Winkel des Parallelogrammes erhalten oder durch sein Supplement ersetzt wird. *Aber die Transformationen der ersten Art sind nur Aehnlichkeitstransformationen.* Denn setzt man, den Forderungen der Aufgabe entsprechend,

$$x_u : y_u : z_u = X_u : Y_u : Z_u,$$
$$x_v : y_v : z_v = X_v : Y_v : Z_v,$$

so ist überhaupt

$$x_u = \alpha X_u,$$
$$x_v = \beta X_v$$

und hieraus folgt für die Quadrate ds_u^2, ds_v^2, dS_u^2, dS_v^2 correspondirender Längenelemente

$$\frac{ds_u^2}{ds_v^2} = \frac{dS_u^2}{dS_v^2} \frac{\alpha^2}{\beta^2};$$

es muss also

$$\alpha = \pm \beta$$

sein. Ist aber $\alpha = \beta$, so wird

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

d. h. es ist α eine Function von x allein, also eine Constante, da es aus demselben Grunde auch nur von y und z allein abhängen kann. Dann wird aber

$$x = \alpha X + c,$$
$$y = \alpha Y + c_1,$$
$$z = \alpha Z + c_2.$$

Im Falle $\alpha = -\beta$ wird man dagegen gerade auf die Aufgabe des § V zurückgeführt, denn es wird dann

$$2\alpha x_{uv} = \alpha_v x_u + \alpha_u x_v,$$

nebst den analogen Gleichungen für y und z.

Die Gesammtheit der Flächen, welche einer negativ gekrümmten Fläche zweiten Grades conjugirt sind, lässt sich mit Hülfe des § VI, Satz 4) allgemein charakterisiren.*) Denn da für jedes conjugirte Coordinatensystem, welches zur Existenz einer conjugirten Beziehung Veranlassung giebt, bei einer negativ gekrümmten Fläche zweiten Grades die Gleichungen

$$m_1 = n_1 = 0, \quad E = -G, \quad B = \frac{1}{2} \frac{\partial l N}{\partial v}, \quad B_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial l N}{\partial u},$$

*) Die zu einer abwickelbaren Fläche conjugirten (abwickelbaren) Flächen sind im § VI, Nr. 1) bestimmt.

bestehen, so wird

$$x_{uu} + x_{vv} = 2x_u B_1 + 2x_v B_1,$$
$$x_{uv} = x_u B + x_v B,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{N}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_v}{N}\right) = 0,$$

(19)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_u}{N}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_v}{N}\right) = 0.$$

Setzt man nach der zweiten der Gleichungen (19)

$$x_u = \quad N X_u,$$
$$x_v = -N X_v,$$

so wird zufolge der ersten

$$X_{uu} = X_{vv}$$

oder

$$X = f(u+v) + \varphi(u-v).$$

Das heisst: *Die conjugirten Flächen der Flächen zweiter Ordnung mit negativer Krümmung sind Translationsflächen, deren Translationscurven den Erzeugenden der Fläche als entsprechende zugehören.* Dieser Satz lässt sich umkehren:

Jeder Translationsfläche, deren Haupttangentencurven von der Form $u \pm iv = const.$ sind, ist conjugirt eine Fläche zweiten Grades, deren Erzeugende den Translationscurven entsprechen.

Ist nämlich, wie unter dieser Voraussetzung für jene Translationsfläche stattfinden muss,

$$B = B_1 = F = 0, \quad E = G = P$$

so wird

$$x_{uu} = \quad \frac{\partial l\sqrt{\mathrm{H}}}{\partial u} x_u - \frac{\partial l P}{\partial v} x_v + Pp,$$
$$x_{vv} = -\frac{\partial l P}{\partial u} x_u + \frac{\partial l\sqrt{\mathrm{H}}}{\partial v} x_v + Pp;$$

also auch

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{P\sqrt{\mathrm{H}}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_v}{P\sqrt{\mathrm{H}}}\right),$$

oder

$$X_v = \frac{x_u}{P\sqrt{\mathrm{H}}}, \quad X_u = \frac{x_v}{P\sqrt{\mathrm{H}}}.$$

Die Gleichungen

$$X_{uu} = -X_u \frac{\partial l(P\sqrt{\mathrm{H}})}{\partial u},$$
$$X_{vv} = -X_v \frac{\partial l(P\sqrt{\mathrm{H}})}{\partial v},$$

zeigen, dass die von den Coordinaten X, Y, Z gebildete Fläche eine auf ihre Haupttangenten bezogene Fläche zweiten Grades ist.

Die Gleichungen (19) geben aber zugleich zu einer *contrajugirten* Beziehung Veranlassung. Setzt man nämlich

$$x_u = -N\xi_v, \quad x_v = N\xi_u$$

so wird wieder

$$\xi_{uu} = \xi_{vv}.$$

Auch diese Fläche ist eine Translationsfläche, deren Translationscurven den Erzeugenden der Fläche entsprechen. Und umgekehrt gilt:

Jeder Translationsfläche, deren Haupttangentencurven von der Form $u + v = const.$ *sind, ist contrajugirt eine Fläche zweiten Grades, deren Erzeugende den Translationscurven als entsprechende zugehören.*

Ganz ähnliche Beziehungen gelten für die *positiv gekrümmten Flächen zweiten Grades.* Da wieder nach § VI, Satz 4) für jedes conjugirte Coordinatensystem auf der Fläche zweiten Grades, für das $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$ ist, die beiden Invarianten m und n verschwinden, so wird

$$x_{uu} - x_{vv} = 2B_1 x_u - 2Bx_v,$$
$$x_{uv} = Bx_u + B_1 x_v;$$

oder

$$(20) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_u}{N}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_v}{N}\right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{N}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_v}{N}\right) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$x_u = \quad NX_u,$$
$$x_v = -NX_v,$$

so wird

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0.$$

Das heisst: *Diejenigen Flächen, deren rechtwinklige Coordinaten der partiellen Differentialgleichung* $\Delta = 0$ *genügen, und auf denen die Curven* u, v *zugleich ein conjugirtes System bilden, werden durch die Gesammtheit der den Flächen zweiten Grades von positiver Krümmung conjugirten Flächen gebildet.* Den imaginären Erzeugenden der Fläche zweiter Ordnung entsprechen dabei die imaginären Translationscurven der genannten Fläche.

Setzt man dagegen

$$x_u = N\xi_v,$$
$$x_v = N\xi_u,$$

so wird ebenfalls

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = \Theta.$$

Diese Fläche hat die Curven u, v zu *Haupttangentencurven.* Und umgekehrt wird jeder Fläche, deren Coordinaten der partiellen Differential-

gleichung $\Delta = 0$ so genügen, dass die Curven u, v zugleich Haupttangentencurven sind, eine Fläche zweiten Grades von positiver Krümmung conjugirt sein.

Ueberhaupt wird jede Fläche, deren Coordinaten x, y, z der partiellen Differentialgleichung $\Delta = 0$ in Bezug auf ein conjugirtes Coordinatensystem genügen, durch die Transformation

$$u = u_1 + v_1,$$
$$v = u_1 - v_1$$

auf ein Coordinatensystem bezogen, für das Δ gleich Null bleibt, während $E = G = 0$ wird. Die Fläche ist daher auf ihre Haupttangentencurven bezogen. Hieraus geht hervor, dass die an die Gleichungen (20) anknüpfenden beiden Flächenclassen nicht wesentlich von einander verschieden sind.

§ VIII.

Die Ebenencoordinaten einer Fläche und ihre projective Transformation.

Nach den bereits in der Einleitung gemachten Bemerkungen kann man *in dualistischer Weise an Stelle der vier Punkte $P\, P_1\, P_2\, P_3$ der Fläche die zu diesen gehörigen vier Tangentenebenen treten lassen.* Dabei wird man an Stelle des *Inhaltes des Tetraeders $P P_1 P_2 P_3$, d. h. an Stelle der Determinante seiner vier Eckpunkte die Determinante der Ebenencoordinaten jener vier Tangentenebenen einzuführen haben.* Hierzu ist zunächst die Entwicklung einiger allgemeinen Formeln, welche die Anwendung der *Ebenencoordinaten* in der allgemeinen Flächentheorie betreffen, erforderlich.

Bezeichnet man die Richtungscosinus der Flächennormale wie früher durch

$$p,\ q,\ r$$

die Gleichung der Tangentenebene im Punkte P mit

$$(X-x)p + (Y-y)q + (Z-z)r = 0$$

oder

(1) $$XU + YV + ZW = 1$$

so sind die *Ebenencoordinaten* U, V, W*) definirt durch die Gleichungen

---

*) Herr Knoblauch bezeichnet a. a. O. S. 89 als Ebenencoordinaten die drei Richtungscosinus p, q, r und s. Herr Darboux benutzt meistens *homogene* Ebenencoordinaten; indessen kommen auch die hier gewählten vor, z. B. S. 141 und a. a. O.

$$(2)\qquad \begin{aligned} sU &= p, \\ sV &= q, \\ sV &= r, \end{aligned}$$

$$s = px + qy + rz = \frac{1}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}.$$

Da

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_u p + y_u q + z_u r &= 0, \\ x_v p + y_v q + z_v r &= 0, \end{aligned}$$

so wird

$$(4)\qquad \begin{aligned} s_u &= xp_u + yq_u + zr_u, \\ s_v &= xp_v + yq_v + zr_v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{uu} &= -E + xp_{uu} + yq_{uu} + zr_{uu}, \\ s_{uv} &= -F + xp_{uv} + yq_{uv} + zr_{uv}, \\ s_{vv} &= -G + xp_{vv} + yq_{vv} + zr_{vv}; \end{aligned}$$

und ferner nach (2)

$$(5)\qquad \begin{aligned} sU_u + Us_u &= p_u, \\ sU_v + Us_v &= p_v; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sU_{uu} + 2U_u s_u + Us_{uu} &= p_{uu}, \\ sU_{uv} + U_v s_u + U_u s_v + Us_{uv} &= p_{uv}, \\ sU_{vv} + 2U_v s_v + Us_{vv} &= p_{vv}. \end{aligned}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$(6)\qquad \begin{aligned} xU_u + yV_u + zW_u &= 0, \\ xU_v + yV_v + zW_v &= 0; \end{aligned}$$

also auch nach (1)

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_u U + y_u V + z_u W &= 0, \\ x_v U + y_v V + z_v W &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} xU_u + yU_u + zW_u &= 0, \\ xU_v + yU_v + zW_v &= 0, \\ xU + yV + zW &= 1, \end{aligned}$$

bestimmen zu jedem System der U, V, W die zugehörigen x, y, z, d. h. den Berührungspunkt der betreffenden Ebene.

Bezeichnet man mit e', f', g' die Grössen

$$U_u^2 + V_u^2 + W_u^2, \quad U_u U_v + V_u V_v + W_u W_v, \quad U_v^2 + V_v^2 + W_v^2,$$

so wird

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
U_{uu} &= \mathrm{A}\, U_u + \mathrm{A}_1\, U_v + \frac{x}{\varrho}\, \mathrm{E},\\
U_{uv} &= \mathrm{B}\, U_u + \mathrm{B}_1\, U_v + \frac{x}{\varrho}\, \mathrm{F},\\
U_{vv} &= \mathrm{C}\, U_u + \mathrm{C}_1\, U_v + \frac{x}{\varrho}\, \mathrm{G},
\end{aligned}
$$

in welchen Gleichungen die charakteristischen Coefficienten

$$\mathrm{A},\ \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{C}_1$$

nur von den e', f', g' und deren ersten Differentialquotienten abhängen. Unter ϱ ist dabei der Abstand des Punktes P vom Anfang der Coordinaten verstanden.

Bezeichnet man den Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} U_u & V_u & W_u \\ U_v & V_v & W_v \\ U & V & W \end{vmatrix}$$

mit D, so ist nach (5)

$$
(10) \qquad D = \frac{1}{s^3} \begin{vmatrix} p_u & q_u & r_u \\ p_v & q_v & r_v \\ p & q & r \end{vmatrix} = \frac{EG - F^2}{s^3 \sqrt{\mathrm{H}}}
$$

wie aus der Multiplication der letzteren Determinante mit $(x_u\, x_v\, p)$ hervorgeht. Multiplicirt man andererseits D mit der Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} U_u & V_u & W_u \\ U_v & V_v & W_v \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

so wird

$$D\delta = e'g' - f'^2.$$

Durch Vergleichung der Werthe $D\delta$ und δ^2 erhält man aber

$$\delta^2 = D\delta(x^2 + y^2 + z^2) = D\delta\, \varrho^2,$$

oder

$$\delta = \varrho^2 D.$$

Demnach wird

$$
(11) \qquad e'g' - f'^2 = \frac{\varrho^2}{s^6}\, \frac{(EG - F^2)^2}{\mathrm{H}}.
$$

Es sollen nun die charakteristischen Coefficienten in den Gleichungen (9) durch die entsprechenden auf Punktcoordinaten bezüglichen Grössen ausgedrückt werden. Da die directe Definition der A, $\mathrm{A}_1, \ldots$ mit Hülfe der e', f', g' hierzu wenig geeignet scheint, so schlage ich folgenden Weg ein.

Setzt man

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
p_{uu} &= \alpha_0 p + \alpha p_u + \alpha_1 p_v,\\
p_{uv} &= \beta_0 p + \beta p_u + \beta_1 p_v,\\
p_{vv} &= \gamma_0 p + \gamma p_u + \gamma_1 p_v,
\end{aligned}
$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für q, r, so ist nach (4)

$$s_{uu} = -E + \alpha_0 s + \alpha s_u + \alpha_1 s_v,$$
$$s_{uv} = -F + \beta_0 s + \beta s_u + \beta_1 s_v,$$
$$s_{vv} = -G + \gamma_0 s + \gamma s_u + \gamma_1 s_v;$$

und hieraus folgt nach (5)

$$(13)\qquad \begin{aligned} s\,U_{uu} + U_u(2s_u - \alpha s) + \alpha_1 s\,U_v) &= UE, \\ s\,U_{uv} + U_u(s_v - \beta s) + U_v(s_u - \beta_1 s) &= UF, \\ s\,U_{vv} + \gamma s\,U_u + U_v(2s_v - \gamma_1 s) &= UG; \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für die V, W. Es erübrigt noch die Bestimmung der Coefficienten $\alpha, \alpha_1; \beta, \beta_1; \gamma, \gamma_1$. Aus der Gleichung § I, (5)

$$x_u p_u + y_u q_u + z_u r_u = -E$$

folgt:

$$x_u p_{uv} + y_u q_{uv} + z_u r_{uv} + x_{uv} p_u + y_{uv} q_u + z_{uv} r_u = \frac{\partial E}{\partial v}.$$

Da nun nach § I, (5)

$$x_{uv} p_u + y_{uv} q_u + z_{uv} r_u = -EB - FB_1$$

ist, so folgt, wenn man zur Abkürzung

$$x_u p_{uv} + y_u q_{uv} + z_u r_u = \sum x_u p_{uv}$$

setzt,

$$\sum x_u p_{uv} = EB + FB_1 - \frac{\partial E}{\partial v}.$$

Auf ähnliche Art gewinnt man so das System der Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} \sum x_u p_{uv} &= EB + FB_1 - \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \sum x_u p_{uv} &= AF + A_1 G - \frac{\partial F}{\partial u}, \\ \sum x_v p_{uv} &= CE + C_1 F - \frac{\partial F}{\partial v}, \\ \sum x_v p_{uv} &= BF + B_1 G - \frac{\partial G}{\partial u}, \\ \sum x_u p_{uu} &= EA + FA_1 - \frac{\partial E}{\partial u}, \\ \sum x_u p_{vv} &= BF + B_1 G - \frac{\partial F}{\partial v}, \\ \sum x_v p_{uu} &= BE + B_1 F - \frac{\partial F}{\partial u}, \\ \sum x_v p_{vv} &= CF + C_1 G - \frac{\partial G}{\partial v}; \end{aligned}$$

also nach (12)

$$
(15) \quad
\begin{aligned}
-(\alpha E + \alpha_1 F) &= AE + A_1 F - \frac{\partial E}{\partial u},\\
-(\alpha F + \alpha_1 G) &= BE + B_1 F - \frac{\partial F}{\partial u},\\
-(\gamma E + \gamma_1 F) &= BF + B_1 G - \frac{\partial F}{\partial v},\\
-(\gamma F + \gamma_1 G) &= CF + C_1 G - \frac{\partial G}{\partial v},\\
-(\beta E + \gamma_1 F) &= BE + B_1 F - \frac{\partial E}{\partial v},\\
&= AF + A_1 G - \frac{\partial F}{\partial u},\\
-(\beta F + \beta_1 G) &= CE + C_1 F - \frac{\partial F}{\partial v},\\
&= BF + B_1 G - \frac{\partial G}{\partial u}.
\end{aligned}
$$

Schreibt man an Stelle der Gleichungen (13) die folgenden

$$
(16) \quad
\begin{aligned}
U_{uu} &= a\,U_u + a_1\,U_v + \frac{E}{s}\,U,\\
U_{uv} &= b\,U_u + b_1\,U_v + \frac{F}{s}\,U,\\
U_{vv} &= c\,U_u + c_1\,U_v + \frac{G}{s}\,U,
\end{aligned}
$$

so lassen sich die Werthe der Coefficienten $a, a_1, \ldots, c, c_1$ unmittelbar nach den Gleichungen (15) angeben. Ich werde dieselben indessen nur unter der Voraussetzung eines conjugirten Coordinatensystems anführen.*) Setzt man in den Formeln (14) $F = 0$, so wird

*) Ist die Fläche auf *Haupttangentencurven* bezogen, so wird

$$
\begin{aligned}
-a &= B_1 + \frac{\partial l\left(\frac{s^2}{F}\right)}{\partial u},\\
-c_1 &= B + \frac{\partial l\left(\frac{s^2}{F}\right)}{\partial v}.\\
-a_1 &= A_1, \qquad -c = C,\\
-b &= B + \frac{\partial l s}{\partial v},\\
-b_1 &= B_1 + \frac{\partial l s}{\partial u}.
\end{aligned}
$$

$$(17)\quad \begin{aligned}
a &= -A + \frac{\partial l\left(\frac{E}{s^2}\right)}{\partial u}, \\
a_1 &= -B\,\frac{E}{G}, \\
b &= -B + \frac{\partial l\left(\frac{E}{s}\right)}{\partial v} = -\frac{\partial l s}{\partial v} - A_1\frac{G}{E}, \\
b_1 &= -B_1 + \frac{\partial l\left(\frac{G}{s}\right)}{\partial u} = -\frac{\partial l s}{\partial u} - C\,\frac{E}{G}, \\
c &= -B_1\frac{G}{E}, \\
c_1 &= -C_1 + \frac{\partial l\left(\frac{G}{s^2}\right)}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (16) stellen die partiellen Differentialgleichungen, denen die Ebenencoordinaten einer Fläche genügen, auf die einfachste Weise dar, während die Gleichungen (9) sich in vollkommener Analogie mit den Gleichungen für Punktcoordinaten § I, (5) befinden. Setzt man die rechten Seiten von (16) und (9) einander gleich, so lassen sich nun auch die Werthe der $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1; \ldots; \mathrm{C}, \mathrm{C}_1$ berechnen. Multiplicirt man die so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
U_{uu} &= a U_u + a_1 U_v + \frac{VE}{s} = \mathrm{A}\, U_u + \mathrm{A}_1 U_v + \frac{x}{\varrho}\,\mathrm{E}, \\
V_{uu} &= a V_u + a_1 V_v + \frac{VE}{s} = \mathrm{A}\, V_u + \mathrm{A}_1 V_v + \frac{x}{\varrho}\,\mathrm{E}, \\
W_{uu} &= a W_u + a_1 W_v + \frac{WE}{s} = \mathrm{A}\, W_u + \mathrm{A}_1 W_v + \frac{x}{\varrho}\,\mathrm{E},
\end{aligned}$$

mit den x, y, z und addirt, so entsteht

$$(18)\qquad \varrho s\mathrm{E} = E$$

und auf dieselbe Weise

$$\varrho s\mathrm{F} = F,$$
$$\varrho s\mathrm{G} = G.$$

Multiplicirt man in derselben Weise mit den $x_u, y_u, z_u;\ x_v, y_v, z_v$ so entsteht

$$\begin{aligned}
\varrho_u \mathrm{E} &= (a - \mathrm{A})(U_u x_u + V_u y_u + W_u z_u) + (a_1 - \mathrm{A}_1)(U_v x_u + V_u y_u + W_u z_u), \\
\varrho_v \mathrm{E} &= (a - \mathrm{A})(U_u x_v + V_u y_v + W_u z_v) + (a_1 - \mathrm{A}_1)(U_v x_v + V_v y_v + W_v z_v).
\end{aligned}$$

Und da nach (6), (7)

$$\begin{aligned}
x_u U_u + y_u V_u + z_u W_u &= -(x\, U_{uu} + y\, V_{uu} + z\, W_{uu}), \\
x_u U_v + y_u V_v + z_u W_v &= x_v U_u + y_v V_u + z_v W_u = -(x U_{uv} + y V_{uv} + z W_{uv}), \\
x_v U_v + y_v V_v + z_v W_v &= -(x\, U_{vv} + y\, V_{vv} + z\, W_{vv}),
\end{aligned}$$

so wird nach (16)

$$x_u U_u + y_u V_u + z_u W_u = -\frac{E}{s},$$

$$x_u U_v + y_u V_v + z_u W_v = x_v U_u + y_v V_u + z_v W_u = -\frac{F}{s},$$

$$x_v U_v + y_v V_v + z_v W_v = -\frac{G}{s}.$$

Hieraus erhält man unter Benutzung von (18)

$$\begin{aligned} &a - \mathrm{A} = \frac{E}{\varrho M}(F\varrho_v - G\varrho_u), \quad c - \mathrm{C} = \frac{G}{\varrho M}(F\varrho_v - G\varrho_u),\\ (19)\quad &a_1 - \mathrm{A}_1 = \frac{E}{\varrho M}(F\varrho_u - E\varrho_v), \quad c_1 - \mathrm{C}_1 = \frac{G}{\delta M}(F\varrho_v - E\varrho_u),\\ &b - \mathrm{B} = \frac{F}{\varrho M}(F\varrho_v - G\varrho_u), \quad b_1 - \mathrm{B}_1 = \frac{F}{\varrho M}(F\varrho_u - E\varrho_v), \end{aligned}$$

wenn

$$M = EG - F^2$$

gesetzt wird.

Für $F = 0$ wird also insbesondere

$$\begin{aligned} &\mathrm{F} = 0, \quad \mathrm{B} = b, \quad \mathrm{B}_1 = b_1,\\ &\mathrm{A} = a + \frac{\partial l\varrho}{\partial u}, \quad \mathrm{C} = c + \frac{G}{E}\frac{\partial l\varrho}{\partial u},\\ &\mathrm{A}_1 = a_1 + \frac{E}{G}\frac{\partial l\varrho}{\partial v}, \quad \mathrm{C}_1 = c_1 + \frac{\partial l\varrho}{\partial v}, \end{aligned}$$

und, wenn noch $G = \alpha E$ vorausgesetzt wird,

$$\begin{aligned} &\alpha\mathrm{A} - \mathrm{C} - 2\mathrm{B}_1\alpha = \alpha a - c - 2b_1\alpha = -(\alpha A - C - 2B_1\alpha),\\ &\alpha\mathrm{A}_1 - \mathrm{C}_1 + 2\mathrm{B} = \alpha a_1 - c_1 + 2b = -(\alpha A_1 - C_1 + 2B), \end{aligned}$$

so dass auch diese Invarianten den bezüglichen Invarianten für Punktcoordinaten § III, III) und IV) *bis aufs Vorzeichen gleich sind.*

Die *projective Transformation der Ebenencoordinaten* braucht nun nicht weiter behandelt zu werden; sie erfolgt übrigens in Beziehung auf die Gleichungen (9) ganz analog mit den in § III entwickelten Formeln. Es ergeben sich dabei ganz ähnliche Beziehungen für das Flächenelement und das Krümmungsmass, wie sie in § III unter 7) und 10) zum Ausdruck gekommen sind.

Es sei endlich noch eine Bemerkung über die *dualistische Transformation einer Fläche* hinzugefügt. Betrachtet man die Ebenencoordinaten U, V, W als Punktcoordinaten einer neuen Fläche F_1, so hat man eine dualistische Transformation, mit welcher nur noch eine beliebige Collineation zu verbinden sein würde, wenn man die allgemeinste Transformation dieser Art erhalten will. Das Krümmungsmass der Fläche F_1 ist

$$K_1 = \frac{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}{e'g' - f'^2} = \frac{EG - F^2}{(e'g' - f'^2)}\frac{1}{\varrho^2 s^2}.$$

Setzt man den aus (11) folgenden Werth für den Nenner ein, so wird

$$K_1 K = \left(\frac{s}{\varrho}\right)^4.$$

Nun ist s der Abstand der Tangentenebene der Fläche F vom Anfang der Coordinaten, welcher jetzt mit π bezeichnet werden mag. Der Abstand der Tangentenebene von F_1 im entsprechenden Punkte ist aber

$$\pi_1 = \frac{Ux + Vy + Wz}{\varrho} = \frac{1}{\varrho}.$$

Demnach findet zwischen den Krümmungsmassen K_1, K der dualistisch entsprechenden Flächen F, F_1 die Beziehung

$$K_1 K = (\pi \pi_1)^4$$

statt, welche sich im wesentlichen auf die dualistische Transformation überhaupt überträgt, sowie man die in § III abgeleitete Formel (10) hinzuzieht.

§ IX.

Parameterkrümmung in Ebenencoordinaten und dualistische Coordinatensysteme.

Auf die Differentialgleichungen des § VIII, (9), (16) kann man nun unter der Voraussetzung $F = 0$ dieselben Betrachtungen, wie in § I anwenden. Man erhält dann, da an Stelle von p, q, r die Grössen $\frac{x}{\varrho}, \frac{y}{\varrho}, \frac{z}{\varrho}$, an Stelle von E und G aber $\frac{E}{\varrho s}$ und $\frac{G}{\varrho s}$ eintreten, und wenn zugleich unter 6T die Grösse

$$\begin{vmatrix} D_u U & D_u V & D_u W \\ D_v U & D_v V & D_v W \\ D_{uv} U & D_{uv} V & D_{uv} W \end{vmatrix}$$

verstanden wird, nach § I, (4)

$$72\mathrm{T} = t^6 \frac{h'^2 k'^2}{\varrho^2 s} [E h'^2 (b_u - b b_1) + G k'^2 (b_{1v} - b b_1)] (U_u V_v x) + \cdots$$

oder, da nach VIII, (11)

$$\frac{1}{\varrho}(U_u U_v x) = \frac{\delta}{\varrho} = D\varrho = \frac{(EG - F^2)\varrho}{\sqrt{\mathrm{H}}\, s^3},$$

wird,

$$72\mathrm{T} = t^6 h'^2 k'^2 \varrho \frac{(EG - F^2)}{\sqrt{\mathrm{H}}\, s^4} [E h'^2 (b_u - b b_1) + G k'^2 (b_{1v} - b b_1)] + \cdots;$$

also, wenn man durch das Quadrat des Längen- und Flächenelementes dividirt, *für die Grösse der parametrischen Krümmung in Ebenencoordinaten*

$$\lim \left| \frac{72\mathrm{T}}{\Omega^2 S^2} \right|_{t=0} = \frac{1}{\mathrm{P}'} = \frac{K}{s^4 \sqrt{\mathrm{H}}} \frac{[E(b_u - b b_1)\, du^2 + G(b_{1v} - b b_1)\, dv^2]}{ds^2}.$$

Im allgemeinen hat daher die als Parameterkrümmung bezeichnete Grösse keinen dualistischen Charakter. Dies würde nur dann der Fall sein, wenn

$$\frac{B_u - BB_1}{B_v - BB_1} = \frac{b_u - bb_1}{b_{1v} - bb_1}$$

ist. Diese Relation soll hier nicht weiter untersucht werden, da sie in Bezug auf projective Transformationen überhaupt keinen invarianten Charakter hat. Findet aber, *wie von nun an vorausgesetzt werden soll,* bereits die Relation

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$$

statt, so wird vermöge der Gleichung

$$\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial b_1}{\partial v} = \frac{\partial^2 l\left(\frac{E}{G}\right)}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial B_1}{\partial v}\right)$$

dann und nur dann auch in Ebenencoordinaten die Parameterkrümmung als Ausdruck für die Normalkrümmung gelten, wenn

$$\frac{\partial l\left(\frac{E}{G}\right)}{\partial u \partial v} = 0,$$

oder bei geeigneter Wahl der Argumente u, v

$$E = \pm G$$

ist. Hiermit ist von neuem auf die besondere Rolle hingewiesen, welche derartige Coordinatensysteme in Bezug auf die Krümmungsverhältnisse spielen; sie besitzen hinsichtlich der hier vorliegenden Gesichtspunkte einen in sich dualistischen Charakter und mögen daher als *dualistische Coordinatensysteme* bezeichnet werden.

Auf den Flächen zweiten Grades ist für jedes Coordinatensystem u, v, das den Bedingungen $F = 0$, $\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}$ genügt, auch $E = \pm G$. Auf einer beliebigen Fläche existirt dagegen im allgemeinen überhaupt kein conjugirtes Coordinatensystem dieser Art. Nach § V ist nämlich beim Uebergange zu beliebigen Parametern u' v'

$$E' = E\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial u'} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2,$$

$$G' = E\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial v'} + G\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2$$

und die Bedingung $E' = \pm G'$ wird daher durch

$$E\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2$$

$$= \pm\left[E\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + G\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2\right]$$

oder, wenn man die in § V, (9) gegebenen Ausdrücke benutzt, durch

$$\lambda^2(EG - F^2) = \pm 1$$

ausgedrückt.

Ist nun die Fläche negativ gekrümmt, so nehme man $E = G = 0$ oder

$$\lambda F = \pm 1,$$

also wird

$$\frac{\partial v'}{\partial u} = \pm \frac{\partial u'}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v'}{\partial v} = \mp \frac{\partial u'}{\partial u};$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial u \partial v} = 0.$$

Demnach ist

$$u' = f(u) + \varphi(v),$$

$$v' = f(u) - \varphi(v),$$

und

$$z = \frac{f'}{\varphi'}.$$

Dieser Werth muss nun der Gleichung § V, (24) genügen; also die Relation

$$f'^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C}{\varphi'^2}\right) = \varphi'^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A_1}{f'^2}\right)$$

erfüllt sein. Schreibt man sie in der Form

$$\frac{\partial}{\partial v''}\left(\frac{Cf'^2}{\varphi'^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u''}\left(\frac{A_1\varphi'^2}{f'^2}\right),$$

indem man

$$\varphi' dv = dv'',$$

$$f' du = du''$$

setzt, so erkennt man, nach den Gleichungen § III, (13) dass

$$(1) \qquad \frac{\partial\{C\}}{\partial v''} - \frac{\partial\{A_1\}}{\partial u''} = 0$$

sein, *d. h. diese Invariante in Bezug auf das von den Haupttangentencurven gebildete System verschwinden muss.* Zugleich wird dann

$$u' = u'' + v'',$$

$$v' = u'' - v''.$$

Setzt man umgekehrt, der zuletzt erhaltenen Gleichung (1) entsprechend, voraus, dass

$$A_1 = \frac{\partial S}{\partial v}, \qquad C = \frac{\partial S}{\partial v}$$

ist, so reducirt sich die Gleichung, welche zur Bestimmung der beiden Functionen f und φ erhalten wurde, auf

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{f'^2}{\varphi'^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi'^2}{f'^2}\,\frac{\partial S}{\partial v}\right);$$

oder wenn

$$f'^2 = U,\quad \varphi'^2 = V,$$

gesetzt wird, auf

$$\frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{U}{V} = \frac{\partial \Omega}{\partial u},$$

$$\frac{\partial S}{\partial v}\,\frac{V}{U} = \frac{\partial \Omega}{\partial v}.$$

Diese Gleichungen liefern aber

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}\,\frac{1}{V^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{\partial \frac{1}{V^2}}{\partial v} = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}\,\frac{1}{U^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial S}{\partial v}\,\frac{\partial \frac{1}{U^2}}{\partial u}$$

oder für

$$\frac{1}{V^2} = \omega',\quad \frac{1}{U^2} = \omega,$$

$$2\,\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} + \frac{\partial S}{\partial v}\,\frac{\partial l(\omega' - \omega)}{\partial u} + \frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{\partial l(\omega' - \omega)}{\partial v} = 0,$$

und diese Bedingung drückt aus, dass der Differentialausdruck

$$(\omega' - \omega)\left(\frac{\partial S}{\partial u}\,du - \frac{\partial S}{\partial v}\,dv\right)$$

ein vollständiges Differential sein muss. Kann man also einen integrirenden Factor des Differentialausdruckes

$$\frac{\partial S}{\partial u}\,du - \frac{\partial S}{\partial v}\,dv$$

finden, der die Differenz zweier Functionen von u und v ist, so wird

$$f' - \sqrt[4]{\frac{1}{\omega + c}},$$

$$\varphi' = \sqrt[4]{\frac{1}{\omega' + c}}$$

wo c eine willkürliche Constante. Es existirt dann eine Schaar solcher Coordinatensysteme, während im allgemeinen nur ein einziges (reelles) vorhanden ist. In speciellen Fällen kann natürlich, wie das Beispiel der Schraubenfläche zeigt, die Mannigfaltigkeit dieser Coordinatensysteme viel grösser sein.

Eine Fläche F, welche auf ein conjugirtes Coordinatensystem bezogen ist, für das

$$G = \alpha E,\quad B = \frac{1}{2}\,\frac{\partial l N}{\partial v},\quad B_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial l N}{\partial u}$$

ist, wo α die positive oder negative Einheit bedeutet, gestattet immer zwei Transformationen in andere Flächen, welche ein Coordinatensystem desselben Charakters besitzen.

Da nämlich unter den angegebenen Voraussetzungen

$$C = \alpha \frac{\partial l\left(\frac{\sqrt{N}}{E}\right)}{\partial u}, \quad C_1 = \frac{\partial l \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{N}}}{\partial v};$$

$$A_1 = \alpha \frac{\partial l\left(\frac{\sqrt{N}}{E}\right)}{\partial v}, \quad A = \frac{\partial l \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{N}}}{\partial u},$$

ist, so genügen die Coordinaten x (y, z) den Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_u}{N}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_v}{N}\right) = 0. \\ \alpha \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u N}{E\sqrt{\mathsf{H}}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{x_v N}{E\sqrt{\mathsf{H}}}\right) = 0, \end{gathered}$$

Setzt man nach der ersten derselben

$$x_u = N X_u, \quad x_v = N X_v,$$

so erhält man eine der Fläche F conjugirte Fläche F, welche ebenfalls auf ein dualistisches Coordinatensystem bezogen ist. Setzt man aber, der zweiten Gleichung zufolge:

$$(3) \qquad x_u = \frac{E\sqrt{\mathsf{H}}}{N}\xi_v, \quad x_v = -\alpha \frac{E\sqrt{\mathsf{H}}}{N}\xi_u,$$

so erhält man eine neue Fläche $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ welche zu F conjugirt oder contrajugirt ist, jenachdem α positiv oder negativ angenommen wird.*) Die charakteristischen Grössen für diese zweite Fläche sind

$$[B] = \frac{\partial l\left(\frac{\sqrt{N}}{E}\right)}{\partial v}, \quad [B_1] = \frac{\partial l \sqrt{\frac{N}{E}}}{\partial u}, \quad [G] = [E] = 0,$$

$$[C] = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial l N}{\partial u}, \quad [C_1] = -\frac{\partial l\left(E\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{N^3}}\right)}{\partial v},$$

$$[A] = -\frac{\partial l\left(E\sqrt{\frac{\mathsf{H}}{N^3}}\right)}{\partial u}, \quad [A_1] = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial l(N)}{\partial v},$$

$$[F] = \frac{N}{\sqrt{\mathsf{H}}}, \quad [\mathsf{H}] = \frac{N}{E^2\mathsf{H}}.$$

---

*) Bezeichnet man mit k eine willkürliche Constante, so kann man auch setzen:

$$\Xi_u = \frac{x_u}{N} - \frac{kN}{E\sqrt{\mathsf{H}}}x_v,$$

$$-\Xi_v = \frac{k\alpha x_u N}{E\sqrt{\mathsf{H}}} + \frac{x_v}{N},$$

falls Ξ, H, Z die Coordinaten einer neuen Fläche bedeuten, welche ebenfalls durch parallele Normalen involutorisch auf F bezogen ist. Auch diese Trans-

Die Fläche Φ ist also auf ihre Haupttangentencurven bezogen und genügt zugleich der Bedingung

$$\frac{\partial [C]}{\partial v} = \frac{\partial [A_1]}{\partial u},$$

wie zu zeigen war.

War nun insbesondere die Fläche F auf ein *conjugirt geodätisches System* bezogen, so wird

$$\frac{E}{\sqrt{N}} = \text{const.} = c.$$

Demnach wird das Krümmungsmass der Fläche Φ

$$[K] = -\frac{[F^2]}{[H]} = -c^4.$$

Mit jeder Fläche F, welche ein conjugirt geodätisches System von dualistischem Charakter besitzt, steht also eine Fläche constanter negativer Krümmung in conjugirter resp. contrajugirter Beziehung.

Diese Bemerkung lässt sich umkehren. Ist eine Fläche constanter negativer Krümmung auf ihre Haupttangentencurven bezogen, so ist das Längenelement durch den Ausdruck*)

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\cos z\, du\, dv$$

gegeben. Soll nun vermöge dieser Coordinatenbestimmung derselben eine Fläche mit den Coordinaten ξ, η, ζ conjugirt oder contrajugirt sein, so ist zu setzen

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi_u &= \lambda x_v, \\ \xi_v &= \alpha \lambda x_u, \end{aligned}$$

wo α die positive oder negative Einheit bedeutet, und λ eine gewisse Function von u und v sein wird. Da die charakteristischen Coefficienten für die Fläche constanter Krümmung

$$B = B_1 = 0,\quad A = \operatorname{cotg} z\, z_u,\quad C_1 = \operatorname{cotg} z\, z_v$$
$$A_1 = -\frac{z_u}{\sin z},\quad C = -\frac{z_v}{\sin z}$$

sind, so lautet die Bedingung der Integrabilität für die Gleichungen (4)

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{z_v}{\sin z}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z_u}{\sin z}\right)$$

oder

$$\frac{\partial C}{\partial v} = \frac{\partial A_1}{\partial u}$$

formation giebt zu mehrfachen Betrachtungen Veranlassung, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen gedenke. Auch kann es von Interesse erscheinen, dass z. B. bei Anwendung dieser Transformation auf die Formeln (19) des § VII für $k = \pm 1$ der Fall entsteht, wo die Invariante Δ verschwindet, also die zugeordneten Flächen in Curven degeneriren.

*) Vgl. z. B. meine Arbeit: „Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen", diese Annalen Bd. 19, S. 1.

d. h. die Fläche constanter Krümmung muss ein dualistisches Coordinatensystem besitzen. Unter dieser Voraussetzung wird ferner

$$\xi_{uu} = \lambda F p + \xi_u \frac{\partial l \lambda}{\partial u},$$

$$\xi_{vv} = \alpha \lambda F p + \xi_v \frac{\partial l \lambda}{\partial v},$$

$$\xi_{uv} = -\alpha \frac{z_u}{\sin z} \xi_u + \left(z_u \operatorname{cotg} z + \frac{\partial l \lambda}{\partial u}\right) \xi_v.$$

Bezeichnet man daher die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Fläche $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ durch e', f', g'; E', F', G', so wird

$$e' = g' = \lambda^2, \quad f' = \alpha \lambda^2 \cos z,$$
$$E' = \lambda F, \quad G' = \alpha \lambda F, \quad F' = 0.$$

Die Fläche Φ ist daher eine Minimalfläche, wenn $\alpha = -1$ ist; *sie ist zugleich isometrisch auf ein conjugirt geodätisches System bezogen.*

Für $\alpha = +1$ entsteht eine Fläche positiver Krümmung, und die ihren Punkten zugehörigen Richtungslinien gleicher Normalkrümmung hüllen auch hier ein isometrisch conjugirt geodätisches System ein.*)

Man hat daher folgenden Satz:

Jede Fläche, welche auf ein geodätisch conjugirtes Coordinatensystem von dualistischem Charakter bezogen werden kann, ist eine Minimalfläche resp. eine derselben conjugirte Fläche.

Die einzige Minimalfläche, welche ein conjugirt geodätisches System — dann aber gleich eine ∞^1 Schaar solcher Systeme — zulässt, ist die *Schraubenfläche.***) *Hiermit sind zugleich alle Flächen constanter negativer Krümmung bestimmt, welche ein Coordinatensystem von dualistischem Charakter enthalten.*

Es ist übrigens leicht, die letzteren auch direct genauer zu charakterisiren. Aus der Gleichung (5) folgt nämlich, wenn

$$\frac{z_v}{\sin z} = \frac{\partial P}{\partial u}, \quad \frac{z_u}{\sin z} = \frac{\partial P}{\partial v}$$

---

*) Vgl. die Anmerkung auf Seite 220.

**) In einer in den Berichten der Münchener Academie veröffentlichten Note habe ich die Beziehung aller Flächen, auf denen ein conjugirt geodätisches System existirt, zu den Flächen constanter negativer Krümmung angegeben und die partielle Differentialgleichung aufgestellt, von der die Bestimmung solcher Flächen abhängt. Die Bemerkung, dass nur *eine* Minimalfläche dieser Art existirt, ist bald darauf von Herrn Razzaboni hinzugefügt. Vgl. Voss, Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden, Sitzb. d. math. phys. Klasse d. kgl. bayr. Ac. d. Wiss. 1888, S. 95, und Razzaboni, Delle Superficie, sulle quale due serie di geodetiche formano un sistema conjugato, Mem. dell. Acc. di Bologna, Tomo IX, 1889. Eine specielle Lösung der genannten Differentialgleichungen hat auch Herr Guichard angegeben (sur les surfaces qui possèdent un réseau de géodésiques conjuguées Comptes Rendus, 1890, S. 995).

gesetzt wird,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial v^2},$$

oder

$$\mathrm{tg}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{U}{V},$$

wo U nur von $u+v$, V nur von $u-v$ abhängt. Die Fläche constanter negativer Krümmung muss daher in Bezug auf ihre Krümmungslinien das Längenelement

$$\frac{du'^2 + dv'^2}{R}$$

haben, wo R von u' allein abhängt. Eine ausgeführtere Untersuchung über den Zusammenhang jener Rotations-Flächen constanter Krümmung mit der Schraubenfläche soll hier nicht gegeben werden.

§ X.

Transformation einer Fläche in Ebenencoordinaten.

Wenn eine Fläche F in Ebenencoordinaten auf ein System conjugirter Curven bezogen ist, so genügen die letzteren den partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} U_{uu} &= a\,U_u + a_1\,U_v + \frac{U}{s}\,E, \\ U_{vu} &= b\,U_u + b_1\,U_v, \\ U_{vv} &= c\,U_u + c_1\,U_v + \frac{U}{s}\,G. \end{aligned} \tag{1}$$

Wird dieses System so gewählt, dass

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{\partial l n}{\partial v}, \qquad C_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\partial l n}{\partial u},$$

ist, so wird

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{U_u}{n}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U_v}{n}\right) = 0;$$

also

$$\begin{aligned} U_u &= n\,U'_u, \\ U_v &= -n\,U'_v; \end{aligned} \tag{2}$$

und U', V', W' sind die Ebenencoordinaten einer neuen Fläche F,*) deren rechtwinklige Coordinaten x', y', z' heissen mögen.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x'U'_u + y'V'_u + z'W'_u &= 0, \\ x'U'_v + y'V'_v + z'W'_v &= 0, \end{aligned}$$

oder, nach (2)

*) Da die U', V', W' nur bis auf willkürliche Constanten bestimmt sind, erhält man eigentlich eine ∞^3 Gruppe von perspectiv collinearen Flächen.

$$x' U_u + y' V_u + z' W_u = 0,$$
$$x' U_v + y' V_v + z' W_v = 0,$$

folgt aber in Rücksicht auf die Gleichungen § VIII, (3)

$$(3) \qquad \begin{aligned} x' &= \sigma x, \\ y' &= \sigma y, \\ z' &= \sigma z. \end{aligned}$$

Die beiden Flächen F und F *stehen also in der Beziehung, dass correspondirende Punkte auf demselben durch den Anfang des Coordinatensystems gehenden Radiusvector liegen.* Und da F wieder *auf ein System conjugirter Curven bezogen ist*, so muss § III, (14)

$$\frac{1}{\sigma} = U'x + V'y + W'z$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\sigma}}{\partial u \partial v} = B \frac{\partial \frac{1}{\sigma}}{\partial u} + B_1 \frac{\partial \frac{1}{\sigma}}{\partial v}$$

genügen, was sich auch leicht bestätigen lässt. Vermöge der Quadratur (2) kann man daher immer eine neue Lösung dieser Differentialgleichung finden.

Ist insbesondere $G = \alpha E$, $B = \frac{1}{2} \frac{\partial l N}{\partial v}$, $B_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial l N}{\partial u}$, also die Fläche F auf ein dualistisches Coordinatensystem bezogen, so wird nach § VIII, (17)

$$b = -\frac{\partial l \left(\frac{s \sqrt{N}}{E}\right)}{\partial v}, \quad b_1 = -\frac{\partial l \left(\frac{s \sqrt{N}}{E}\right)}{\partial u}$$

also

$$n = \frac{E^2}{s^2 N}.$$

Setzt man ferner

$$m = \frac{EN}{s^2 \sqrt{\mathsf{H}}},$$

so ergiebt sich vermöge der Werthe

$$a = -\frac{\partial l \left(\frac{s^2}{E} \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{N}}\right)}{\partial u}, \quad a_1 = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial l \sqrt{N}}{\partial v},$$

$$c = -\alpha \frac{\partial l \sqrt{N}}{\partial u}, \qquad c_1 = -\frac{\partial l \frac{s^2}{E} \sqrt{\frac{\mathsf{H}}{N}}}{\partial v}$$

aus den Gleichungen (1) dass

$$(4) \qquad \begin{aligned} \alpha U_u &= m U_v'', \\ U_v &= m U_u'', \end{aligned}$$

gesetzt werden kann, nebst den analogen Gleichungen für V und W.

Die U'', V'', W'' bilden die Ebenencoordinaten einer neuen Fläche Φ, *deren entsprechende Punkte mit denen der Fläche F auf demselben vom Anfang der Coordinaten ausgehenden Radius Vector liegen. Die Fläche* Φ *ist*, wie leicht aus der Verbindung von (4) und (1) folgt, *auf ihre Haupttangentencurven bezogen;* F *und* Φ *sind überhaupt wieder Flächen, welche ein dualistisches Coordinatensystem zulassen.*

Für die beiden *Invarianten*

$$\alpha a - c - 2b_1\alpha, \qquad \alpha a_1 - c_1 + 2b$$

erhält man vermöge der Werthe $a, b \ldots c_1$ die Ausdrücke

$$-\alpha \frac{\partial l\left(\frac{E\sqrt{\mathrm{H}}}{N^2}\right)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial l\left(\frac{E\sqrt{\mathrm{H}}}{N^2}\right)}{\partial v}.$$

Dieselben verschwinden, wenn $m = n$ ist. Die Fläche F ist dann eine Fläche zweiten Grades, und die Coordinaten der Flächen F *und* Φ *genügen der Gleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 0.$$

Es hat keine Schwierigkeit, auch im allgemeinen Falle die Fundamentalgrössen und charakteristischen Coefficienten der Flächen F und Φ anzugeben, doch treten dabei keine so übersichtlichen Beziehungen hervor, wie bei der Anwendung von Punktcoordinaten. Wie man sieht, lassen sich aus einer Fläche, die ein dualistisches Coordinatensystem zulässt, unbegrenzt viele andere, nicht nur collinear verwandte, Flächen derselben Art, durch die gleichzeitige Anwendung der beiden auf Quadraturen beruhenden Transformationen der §§ VII und X bestimmen.

München, im Mai 1891.

Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen.

Von

Wilhelm Killing in Braunsberg, Ostpr.

Die Arbeit „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie", welche Hr. Klein im 37. Bande der Annalen (S. 544—572) veröffentlicht hat, könnte mich freilich zu mancherlei Auseinandersetzungen mit ihrem Verfasser veranlassen. Namentlich kann ich die Bedenken des Herrn Klein gegen meine Bezeichnung: Polarform des Riemann'schen Raumes, als berechtigt nicht anerkennen. Indessen hoffe ich, diesen Punkt und manche andere an einer andern Stelle näher besprechen zu können. Hier beschränke ich mich auf denjenigen Theil seiner Arbeit, betreffs dessen zwischen uns volle Uebereinstimmung herrscht und welcher von den neu eingeführten Raumformen handelt. Bisher hat man nur solche Raumformen betrachtet, bei denen die Bewegung eines Theiles auch für jeden andern Theil jedesmal eine einzige Bewegung bestimmt, welche also bei jeder starren Bewegung eines Theiles auch als Ganze in sich bewegt werden. Diese Voraussetzung habe ich in mehreren Abhandlungen, sowie in meinem Buche: Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung (Leipzig 1885) ebenfalls gemacht. Allerdings hatte schon lange vorher Clifford in einem ungedruckten Vortrage eine zweidimensionale Raumform angegeben, welche der früheren Voraussetzung nicht genügte. Den von Clifford nur angedeuteten Gedanken hat Hr. Klein weiter entwickelt und seine Berechtigung näher begründet.

Die auf diese Weise erhaltenen Raumformen sind dadurch merkwürdig, dass sie mehrfachen Zusammenhang besitzen. Aber diese Eigenschaft kommt auch der elliptischen Raumform des Herrn Klein, der Polarform des Riemann'schen Raumes nach meiner Bezeichnung, zu. Dagegen ist es für die neuen Raumformen charakteristisch, nur bei speciellen Bewegungen als Ganze in sich bewegt werden zu können. In Ermangelung eines Ausdruckes, der diese Eigenschaft kurz und einfach bezeichnet, möchte ich vorschlagen, die hierdurch charakterisirten Raumformen als Clifford-Klein'sche zu bezeichnen, im Hinblick

darauf, dass Clifford an einem speciellen Beispiel den Grundgedanken angedeutet und Hr. Klein denselben zuerst vollständig entwickelt hat.

Was die Berechtigung der neuen Raumformen betrifft, so wird sie rein geometrisch nicht bestritten werden können. Die Erfahrung liefert keinen Grund, der uns nöthigt anzunehmen, dass durch die Bewegung eines Theiles jedesmal für einen andern Theil eine einzige Bewegung bestimmt wird; die festen Körper, deren Bewegung wir beobachten können, sind so klein im Vergleich zu den Entfernungen, welche im Raume vorkommen, dass alle Folgerungen aus der neuen Voraussetzung ganz gut mit der Erfahrung vereinbar sind. Die Nothwendigkeit aber, bevor man zu den neuen Raumformen gelangt, vorher einen endlichen, allseitig begrenzten Bereich zu Grunde zu legen und dessen Eigenschaften zu untersuchen, schliesst keineswegs einen Mangel ein, sondern muss als ein Vorzug bezeichnet werden.

Nur ein Bedenken glaube ich kurz aussprechen zu sollen. Wenn eine Raumform diesen Namen vollauf verdienen soll, so muss für sie auch eine einwurfsfreie Mechanik aufgebaut werden können. Für die bisher untersuchten Raumformen ist die Mechanik im Wesentlichen dieselbe wie für den Euklidischen Raum. Auch für die neuen Raumformen bleiben einzelne Theile der Mechanik ganz ungeändert; andere dagegen, namentlich diejenigen, in denen die sog. Fernwirkung eine Rolle spielt, bedürfen zum Mindesten einer wesentlichen Umgestaltung. Zwar drängen sich sofort Hypothesen auf, von denen man eine Beseitigung der noch bestehenden Schwierigkeiten erwarten kann; aber die endgültige Lösung dürfte vielleicht nicht ganz einfach sein. Ich will hierauf nicht eingehen, sondern nur erwähnen, dass man aus einzelnen Bedenken niemals einen Grund zur vollen Ablehnung herleiten darf. Im vorliegenden Falle bietet die Thatsache, dass in geometrischer Hinsicht die neuen Raumformen voll berechtigt sind, Grund genug zu der festen Hoffnung, dass die auf der Mechanik ruhenden Bedenken sich bei genauerer Entwicklung beseitigen lassen.

In der vorliegenden Arbeit bin ich zunächst auf die principielle Berechtigung der neuen Raumformen eingegangen und leite sie aus den allgemeinen Gesetzen über die Bewegung her. Das erachte ich um so mehr für erforderlich, da die Bedeutung, welche der Bewegung für die Grundlagen der Geometrie zukommt, seit den letzten Decennien, namentlich seit der bekannten Arbeit des Herrn v. Helmholtz, in immer weiteren Kreisen anerkannt wird. Dann gelingt es mir, für ein positives constantes Krümmungsmass alle möglichen Fälle aufzuzählen. Dabei stellt sich das merkwürdige Resultat heraus, dass für eine gerade Zahl von Dimensionen Raumformen von der verlangten Eigenschaft überhaupt nicht existiren, und dass für eine ungerade Zahl von Dimensionen die möglichen Raumformen sehr nahe mit einander

verwandt sind. Für ein verschwindendes oder ein negatives constantes Krümmungsmass ist das Resultat nicht so einfach. Hier bin ich auch noch nicht im Stande, alle Raumformen anzugeben; vielmehr muss ich mich in beiden Fällen damit begnügen, das analytische Problem aufgestellt zu haben, dessen Lösung uns zu sämmtlichen Raumformen führt.

§ 1.

Allgemeine Vorbemerkungen.

Für die Bewegung eines starren Körpers gelten die allgemeinen Gesetze:

Wenn ein Körper zu irgend einer Zeit den früheren Raum eines zweiten Körpers deckt, so kann er zur Deckung mit jedem Raume gebracht werden, welchen der zweite zu irgend einer Zeit einnimmt.

Jeder Körper kann so bewegt werden, dass einer seiner Punkte zur Deckung mit einem beliebigen Punkte des Raumes gelangt.

Für einen Körper ist die Lage eines jeden seiner Punkte vollständig und eindeutig bestimmt, sobald die Lage aller einem beliebigen Theile des Körpers angehörigen Punkte bestimmt ist.

Diese Gesetze sind nothwendig, um Untersuchungen über den Raum anstellen zu können. Das dritte Gesetz, welches uns hier vor allem beschäftigen soll, kann auch folgenden Ausspruch erhalten:

Bewegen wir irgend einen Körper, so ist dadurch auch für jeden andern Körper, welcher mit dem ersten fest verbunden ist, eine gewisse Bewegung eindeutig bestimmt.

Betrachten wir also einen festen Körper und denken uns unbegrenzt weitere Körper damit fest verbunden, so bedingt die Bewegung des ersten Körpers auch die eines jeden damit fest verbundenen, und zwar gelangt man, wenn die Bewegung des ersten und die Verknüpfung der einzelnen Körper gegeben ist, auch für jeden weitern Körper zu einer eindeutig bestimmten Bewegung. So mögen die Körper K_1 und K_s keinen Zusammenhang haben; es seien aber die Körper $K_2, K_3 \dots K_{s-1}$ derartig hinzugefügt, dass K_1 mit K_2, K_2 mit $K_3 \dots K_{i-1}$ mit $K_i \dots K_{s-1}$ mit K_s fest verbunden ist. Dann ist durch die Bewegung von K_1 und durch die Körper $K_2 \dots K_s$, welche der angegebenen Bedingung genügen, auch die Bewegung von K_s eindeutig bestimmt. Nachdem die Bewegung von K_1 und die Anfangslage von K_s gegeben ist, wird die Bewegung von K_s auch wieder eindeutig bestimmt sein, wenn zwischen K_1 und K_s irgend andere Körper $K_2' \dots K_p'$ in der bezeichneten Weise eingeschoben sind. Dieselbe Bewegung von K_1 bedingt also einmal in Folge der Einschiebung von $K_2 \dots K_{s-1}$ eine bestimmte Bewegung, und dann eine

zweite in Folge der Einschiebung von $K_2' \ldots K_p'$; wir fragen uns, ob diese zwei Bewegungen von K_s nothwendig identisch sind. Dürfte man annehmen, dass ein einziger fester Körper gleichzeitig die von $K_1, K_2 \ldots K_s$ und von $K_2' \ldots K_p'$ gedeckten Räume einnehmen kann, so müsste die aufgeworfene Frage unbedingt bejaht werden. Aber diese Annahme ist keineswegs nothwendig, vielmehr nehmen alle Körper, welche die Erfahrung liefert, nur einen recht kleinen Raum ein. Wir müssen daher auch die Möglichkeit offen lassen, dass sich für K_s bei der obigen Festsetzung verschiedene Bewegungen ergeben, wenn verschiedene Reihen von festen Körpern eingeschoben werden.

Betrachten wir jetzt die beiden Reihen $K_1, K_2 \ldots K_{s-1}, K_s$ und $K_1, K_2', K_3' \ldots K_p', K_s$. Wir geben K_1 irgend eine Bewegung; dadurch wird $K_2, K_3 \ldots$ bis auf K_s eine bestimmte Bewegung zugeordnet; diese Bewegung bestimmt wieder eindeutig eine Bewegung von $K_p', K_{p-1}' \ldots K_3', K_2'$, bis sich auch für K_1 selbst eine bestimmte Bewegung herausstellt. Diese zweite Bewegung von K_1 muss aber von der ersten verschieden sein, weil sich sonst auf beide Weisen für K_s dieselbe Bewegung herausstellen würde. Somit ist es unter der gemachten Voraussetzung möglich, eine Reihe von Körpern $K_1, K_2, K_3 \ldots K_{t-1}, K_t$, wo K_t mit K_1 identisch ist, so zu bestimmen, dass je zwei auf einander folgende zusammenhangen und dass die durch diese Reihe für K_t *vermittelte* Bewegung von der dem K_1 *beigelegten* verschieden ist.

Statt von der Bewegung eines Körpers können wir, (was allerdings an sich nicht genau ist), auch von der eines Raumtheiles sprechen. Dann sagen wir, die Bewegung eines Raumtheiles bedinge auch die eines jeden benachbarten. Denken wir uns jetzt eine stetige Folge von mit einander congruenten Raumtheilen so gegeben, dass der letzte mit dem ersten identisch ist, so wird die Bewegung des ersten der Reihe nach die Bewegung eines jeden der congruenten bestimmen; in unserm Falle muss die durch die Fortsetzung für den ersten Raumtheil erhaltene Bewegung von der ursprünglichen verschieden sein.

Damit also eine Raumform nicht bei jeder starren Bewegung eines Theiles als Ganzes in sich bewegt werden könne, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

Ein Raumtheil R_1 werde zu einer gewissen Zeit von einem Körper K_1 gedeckt; man bringe K_1 aus dieser Lage heraus und bringe es durch Zwischenlagen $R_2, R_3 \ldots$ wieder nach R_1 zurück. Ordnet man dem Raumtheil R_1 eine gewisse Bewegung zu und sucht für $R_2, R_3 \ldots$ die dieser stetig entsprechende Bewegung, so muss bei passender Wahl von $R_2, R_3 \ldots$ die zweite dem R_1 zugeordnete Bewegung im Allgemeinen von der ersten verschieden sein.

Was den Inhalt dieses Satzes anbetrifft, so sind die Worte „im Allgemeinen" bisher noch nicht bewiesen; es ist nur gezeigt worden, dass bei Voraussetzung einer gewissen Bewegung die zweite von der ersten verschieden ist. Dabei ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass zuweilen die zweite Bewegung mit der ersten identisch werden kann. Indessen sieht man leicht ein, dass, wenn überhaupt eine Verschiedenheit zwischen der ersten und zweiten Bewegung möglich ist, die Uebereinstimmung beider nur die Ausnahme bilden kann.

Die im Vorstehenden besprochene Reihe $R_1, R_2, R_3 \ldots R_s$ kann hier nicht vollständig bestimmt werden; aber wir können wenigstens die eine Eigenschaft angeben, dass kein einzelner fester Körper möglich ist, welcher alle Raumtheile zu gleicher Zeit vollständig deckt.

Mit R_1 denke ich jetzt einen zweiten Raum R_1' zusammenhängend. Dann wird die angegebene Bewegung, welche das R_1 durch die Lagen $R_2, R_3, \ldots$ nach R_1 hindurchbringt, auch R_1' durch Lagen $R_2', R_3' \ldots$ hindurch in die Anfangslage bringen. Wir betrachten jetzt eine Bewegung von R_1, welche in Folge der Fortsetzung über $R_2, R_3 \ldots$ für das neu erhaltene R_1 eine von der ersten verschiedene Bewegung liefert, so muss hierbei für R_1' ganz dasselbe gelten: macht bei der vorausgesetzten Bewegung von R_1 das R_1' eine Bewegung β', so kommt dem $R_2', R_3' \ldots$ jedesmal eine ganz bestimmte Bewegung zu, und diejenige Bewegung von R_1', welche ihm in Folge der Reihe $R_2', R_3' \ldots$ zukommt, ist von β' verschieden. Zugleich darf es auch jetzt nicht möglich sein, dass ein einziger fester Körper die sämmtlichen Räume $R_1', R_2', R_3' \ldots$ zugleich deckt.

Die vorstehenden Bedingungen genügen, um uns zu den in Betracht kommenden Raumformen zu führen.

§ 2.

Zweidimensionale Raumformen verschwindender Krümmung.

Angenommen, eine zweidimensionale Raumform habe in einem allseitig begrenzten Bereiche die Eigenschaften der Euklidischen Ebene; wir betrachten alle Bewegungen, welche hiermit vorgenommen werden können und bei denen er in theilweiser Deckung mit seiner Anfangslage bleibt. Dadurch wird auch jedem andern Raumtheile jedesmal eine bestimmte Bewegung zugeordnet. Tritt die Bedingung hinzu, dass zusammenfallenden Raumtheilen auch jedesmal dieselbe Bewegung zukommt, so werden wir nur auf die Euklidische Ebene geführt. Wenn man also auch in irgend einer andern Raumform, welche der angegebenen Bedingung für einen endlichen Bereich genügt, von dem Zusammenfallen der Punkte absieht und nur die Art der Bewegung betrachtet, so ist sie wieder mit dieser Ebene identisch. Jede derartige

Raumform kann aber auf die Euklidische Ebene so „abgewickelt“ werden, dass den geraden Linien der Raumform wieder gerade Linien der Ebene von gleicher Länge und gleicher Neigung entsprechen: man muss aber die Möglichkeit offen lassen, dass demselben Theile der Raumform mehrere Theile der Ebene entsprechen. So mögen von den beiden Punkten A und B der Raumform dem ersteren in der Ebene die Punkte A_1 und A_2 und dem zweiten die Punkte B_1 und B_2 entsprechen, und wir dürfen dabei noch voraussetzen, dass die Länge AB gleich A_1B_1 und gleich A_2B_2 ist. Hiernach sind zwei Theile einer Euklidischen Ebene so auf einander bezogen, dass entsprechende Gebilde mit einander durch eine in der Ebene vor sich gehende Bewegung zur Deckung gebracht werden können. Bei der getroffenen Anordnung entspricht die gerade Strecke A_1B_1 der geraden Strecke A_2B_2 und die Punkte auf der Geraden A_1B_1 solchen, welche auf der Geraden A_2B_2 liegen. Treffen sich diese Geraden in einem Punkte O und ist $A_1O = A_2O$, $B_1O = B_2O$, so entspricht der Punkt O sich selbst, und einem Punkte C_1 auf A_1B_1 in beliebiger Nähe von O entspricht ein solcher Punkt C_2 auf A_2B_2. Ein solches Entsprechen ist aber, wie jetzt gezeigt werden soll, ausgeschlossen.

Verlängern wir nämlich in der betrachteten Raumform die gerade Linie AB, so kommen wir zu einem Punkte $\overline{O}$, für welchen $A\overline{O} = A_1O$, $B\overline{O} = B_1O$ ist. Es muss also auch eine „Abbildung“ der Raumform auf die Ebene geben, bei welcher der Punkt $\overline{O}$ dem Punkte O und die Gerade $\overline{O}A$ der Geraden OA_1 entspricht, und eine zweite, bei welcher $\overline{O}$ dem O und OA der Geraden OA_2 entspricht. Sobald aber der Punkt O seine Anfangslage behält, muss auch jeder Körper, dem er angehört, in theilweiser Deckung mit seiner Anfangslage bleiben. Nun entspricht die hier durchgeführte Abbildung der Bewegung eines festen Körpers, bei welcher jeder seiner Theile aus dem anfangs gedeckten Raume heraustritt. Daher muss die hier beschriebene Abbildung ausgeschlossen werden.

Wenn aber umgekehrt zwei Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ in der Ebene in gleichem Sinne congruent sind, so giebt es stets einen endlichen oder unendlich fernen Punkt O von der Beschaffenheit, dass eine Drehung um O die Dreiecke zur Deckung bringt. Liegt O im Endlichen, so ist $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$, $\sphericalangle A_1OB_1 = A_2OB_2 \ldots$, und so entsprechen einander die Geraden OA_1 und OA_2, OB_1 und $OB_2 \ldots$. Dieser Fall muss also ausgeschlossen werden und es bleibt nur der Fall übrig, dass O unendlich fern liegt, dass also $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$ und $A_1A_2 // B_1B_2 // C_1C_2$ ist. Gehen wir auf die gegebene Raumform zurück, so erhalten wir den Satz:

Soll eine zweidimensionale Raumform in jedem Theile verschwindendes Krümmungsmass besitzen, ohne mit der Euklidischen identisch zu sein, so muss jeder ihr angehörige (zweidimensionale) Körper durch Parallelverschiebung in seine Anfangslage zurückgeführt werden können. Jede andere Bewegung, welche einen Körper in seine Anfangslage zurückbringt, lässt sich zurückführen auf eine volle Umdrehung um einen Punkt.

Demnach gehen wir in der zu untersuchenden Raumform von einem Dreieck ABC aus, welchem in der Euklidischen Ebene die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ entsprechen mögen. Wenn man dann in der Geraden A_1A_2 den Punkt A_3, in B_1B_2 den Punkt B_3 und in C_1C_2 den Punkt C_3 so wählt, dass $A_2A_3 = A_1A_2$, $B_2B_3 = B_1B_2$, $C_2C_3 = C_1C_2$ ist, so ist auch $A_3B_3C_3$ eine Abbildung von ABC. Man erhält auf diese Weise und durch Umkehr des Verfahrens eine einfach unendliche Zahl von Abbildungen. Wofern eine weitere Abbildung nicht möglich ist, hat die Raumform selbst die Gestalt einer gewöhnlichen Cylinderfläche, so dass wir von einer nähern Beschreibung absehen können.

Zum Zweck der Auffindung weiterer Raumformen legen wir ein rechtwinkliges Cartesisches Coordinatensystem zu Grunde; dasselbe kann dann beliebig fortgesetzt werden; aber man muss jetzt den Fall offenhalten, dass demselben Punkte mehrere Coordinatenwerthe (x, y) und (x', y') entsprechen; dann muss in Folge der obigen Entwicklung $x' = x + w_1$ und $y = y + w_2$ sein, wo w_1 und w_2 Constante sind. Angenommen, der Punkt (x, y) sei identisch mit $(x + w_1, y + w_2)$ und mit $(x + w_1', y + w_2')$, so wird er auch für alle ganzzahligen Werthe von m und m' zusammenfallen mit

$$(x + mw_1 + m'w_1', \quad y + mw_2 + m'w_2').$$

Wäre hier $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1'}{w_2'}$, so würden alle mit einem festen Punkte zusammenfallenden Punkte einer Geraden angehören, und wenn dann die Entfernungen commensurabel sind, so erhalten wir nur eine einzige Periode; wären sie aber incommensurabel, so würden wir in jedem Körper zusammenfallende Punkte erhalten, was unmöglich ist. Wir können also den Fall, dass $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1'}{w_2'}$ ist, ganz ausschliessen. Indem wir das thun, erhalten wir als Bilder zusammenfallender Punkte je die Eckpunkte eines gewissen Parallelogramms und dessen Wiederholungen, wie es die Figur 2, S. 500 der Klein'schen Arbeit zeigt. Eine genaue Darlegung wird nicht nöthig sein, da Hr. Klein selbst auf die Einzelheiten mit grosser Sorgfalt eingegangen ist. Während Hr. Klein die selbständige Existenz dieser Raumform im dreifach ausgedehnten Riemann'schen Raume besonders betont, darf ich wohl

an ihr Vorkommen in einem vierfach ausgedehnten Euklidischen Raume erinnern. Hierher gehört namentlich die Fläche, auf welche ich in meinem schon erwähnten Buche S. 240, Nr. 127 hingewiesen habe. Betrachte ich $x_1 \ldots x_4$ als rechtwinklige Coordinaten, so wird diese Fläche bei unbeschränkt veränderlichen Werthen von u und v durch die Gleichungen dargestellt:

$$x_1 = a \sin \frac{u}{a}, \quad x_2 = a \cos \frac{u}{a}, \quad x_3 = b \sin \frac{v}{b}, \quad x_4 = b \cos \frac{v}{b}.$$

Im vierdimensionalen Raume lässt sich also ein ebenes Rechteck auf eine ringförmige Fläche abwickeln.

Träte zu den Periodenpaaren (w_1, w_2) und (w_1', w_2') ein drittes hinzu, so könnten die drei Paare entweder nicht sämmtlich Fundamentalperioden sein, oder die Eindeutigkeit der Bewegung würde auch in einem beliebig kleinen Gebiete aufhören; diese Annahme darf daher nicht gemacht werden.

Bei der Wichtigkeit, welche dieser einfachste Fall für die Behandlung der ganzen Frage besitzt, darf ich wohl das Resultat des Hrn. Klein noch auf einem zweiten Wege herleiten. Angenommen, eine gewisse Bewegung führe einen Körper aus seiner Anfangslage in dieselbe zurück. Dabei darf diese Bewegung als eine gleichförmige vorausgesetzt werden; wenn also $A'B'$, $A''B'' \ldots A^{(\nu-1)}B^{(\nu-2)}$ Lagen sind, welche die Strecke AB bei dieser Bewegung annimmt, so können dieselben so gewählt werden, dass

$$AB = A'B' = A''B'' = \cdots = A^{(\nu-1)}B^{(\nu-1)}$$

und zugleich der Winkel

$$(AB, A'B') = (A'B', A''B'') = (A''B'', A'''B''') = \cdots$$
$$= (A^{(\nu-1)}B^{(\nu-2)}, AB)$$

ist. Ich verlängere die Geraden AB und $A'B'$ ohne Rücksicht darauf, ob ich wieder zu früheren Punkten gelange oder nicht. Entweder sind sie parallel oder sie treffen sich in einem Punkte S. Dann folgt leicht durch Betrachtung zusammenstossender Theile, dass $SA = SA'$, $SB = SB'$ ist. Somit muss auch die Verlängerung von $A''B''$ durch S hindurchgehen u. s. w. Wird aber $A^{(\nu)}$ als mit A zusammenfallend betrachtet, so muss auch die Gerade $SA^{(\nu)}$ mit SA identisch sein. Das ist nur möglich, wenn SA bei dieser Bewegung eine volle Umdrehung von vier Rechten beschreibt. Legt man jetzt dem Körper in seiner ersten Lage irgend eine Bewegung bei und bestimmt die entsprechende Bewegung für die Zwischenlagen, so erhält man für die Endlage wieder dieselbe Bewegung, von der man ausgegangen ist. Soll also die Fortsetzung für den Körper zu verschiedenen Bewegungen führen, so müssen die Geraden AB, $A'B'$, A'', $B'' \ldots$ einander parallel sein. Das ist aber das oben angegebene Resultat.

§ 3.

Raumformen von verschwindender Krümmung und mit einer höheren Zahl von Dimensionen.

Es ist hier nicht der Ort, die allgemeine Theorie der Raumformen von mehr als drei Dimensionen zu erörtern. Ich muss aber daran erinnern, dass eine Theorie, welche die mehrdimensionale Geometrie bloss als bequemen Ausdruck für analytische Wahrheiten betrachtet, für unsern Zweck nicht genügt, dass vielmehr ein Unterschied zwischen dem Punkte und dem Werthsystem $(x_1 \dots x_n)$ zu machen ist, da es möglich sein soll, dass demselben Punkte verschiedene Werthsysteme entsprechen.

Wir gehen von einem endlichen n-dimensionalen Gebiet aus, dessen Krümmungsmass gleich Null ist. Hierin wählen wir n auf einander senkrecht stehende Ebenen von $n-1$ Dimensionen zu Coordinatenebenen und bezeichnen die darauf von einem Punkte gefällten Senkrechten (durch dasselbe Längenmass gemessen), als die Coordinaten des Punktes. Dann erscheint der Ausdruck für das Quadrat der Entfernung zweier Punkte x' und x'' unter der Form

$$(x_1' - x_1'')^2 + \cdots + (x_n' - x_n'')^2,$$

und hieraus leiten sich die Formeln für die starre Bewegung her. Wir nehmen jetzt an, eine gewisse Bewegung führe einen Körper wieder in seine Anfangslage. Dabei ändern sich die Coordinaten stetig. Sind aber $(x_1 \dots x_n)$ die Coordinaten, von denen wir ausgehen, und entsprechen ihnen die $(y_1 \dots y_n)$, also $(y_1' \dots y_n')$ den $(x_1' \dots x_n')$, $(y_1'' \dots y_n'')$ den $(x_1'' \dots x_n'')$, so muss die Gleichung bestehen:

$$(1) \qquad \sum (y_\varkappa' - y_\varkappa'')^2 = \sum (x_\varkappa' - x_\varkappa'')^2.$$

Somit ist (zunächst für einen bestimmten endlichen Bereich):

$$(2) \qquad y_\varkappa = \sum^\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa + b_\varkappa \quad (\text{für } \varkappa = 1 \dots n),$$

und es bestehen die Beziehungen:

$$(3) \qquad \sum^\varrho a_{\varkappa\varrho} a_{\lambda\varrho} = \delta_{\varkappa\lambda} \quad \text{für } \delta_{\varkappa\varkappa} = 1,$$

$$\delta_{\iota\varkappa} = 0, \quad \text{wofern } \iota \gtrless \varkappa \text{ ist},$$

und Determinante $|a_{\varkappa\lambda}| = 1$.

Hier können wir offenbar von der identischen Substitution

$$(y_1 = x_1 \ \dots \ y_n = x_n)$$

absehen, da demselben Werthsystem auch stets derselbe Punkt entspricht. Zweitens darf in dem betrachteten Bereich, auf welchen die Untersuchung zunächst beschränkt ist, der Werth von

$$(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2$$

nicht unterhalb einer bestimmten positiven Grenze sinken, weil sonst in diesem Theile des Raumes kein fester Körper liegen könnte. Wenn nämlich den Punkten (x) eine gewisse Bewegung beigelegt wird, so wird für die Punkte (y) dadurch eine Bewegung bestimmt, welche im allgemeinen von der ersten verschieden ist; das ist aber für Punkte desselben Körpers nicht möglich. Endlich darf aber auch die hier angegebene Zuordnung, wofern sie auf weitere Raumtheile nach den Festsetzungen des ersten Paragraphen ausgedehnt wird, nicht auf Werthsysteme führen, deren Coordinaten beliebig nahe kommen.

Um zu erkennen, welches die geeigneten Raumtheile sind, die zu den zunächst betrachteten hinzugenommen werden müssen, untersuchen wir die Gleichungen (2) rein analytisch und betrachten das System der n Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} (a_{11}-1)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n + b_1 = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-1)\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n + b_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + (a_{nn}-1)\xi_n + b_n = 0. \end{cases}$$

Wenn hier, was für ein gerades n das Allgemeine ist, die Determinante

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, so giebt es ein einziges reelles Werthsystem $(\xi_1 \ldots \xi_n)$, welches den Gleichungen genügt. Wenn aber die Determinante verschwindet, so müssen für ein gerades n, welches zuerst betrachtet werden soll, auch alle Unterdeterminanten $n-1^{\text{ten}}$ Grades gleich Null sein. Wofern dann die Unterderminanten $n-1^{\text{ten}}$ Grades, welche aus der Matrix

$$(6)\quad \begin{Vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 & b_n \end{Vmatrix}$$

gebildet werden können, nicht sämmtlich verschwinden, genügt den Gleichungen (4) ein einziges unendlich grosses Werthsystem*); ver-

---

*) Man gestatte mir diesen kurzen Ausdruck, welcher für die Darlegung der verschiedenen in Betracht kommenden Beziehungen sehr bequem ist. Ein einzelnes unendlich fernes Werthsystem giebt für das Endliche eine ganz bestimmte Richtung an und ordnet jeder Geraden, der diese Richtung zukommt, eine andere Gerade von derselben Richtung zu. Ebenso entspricht einer Mannigfaltigkeit von unendlich fernen Punkten für das Endliche eine solche von Richtungen.

schwinden aber auch die sämmtlichen zuletzt genannten Determinanten, so bilden die endlichen Lösungen von (4) eine zweifache Unendlichkeit. Ebenso verschwinden mit allen Unterdeterminanten $n-2^{\text{ten}}$ Grades von (5) auch alle vom $n-3^{\text{ten}}$ Grade; es handelt sich also darum, ob auch die entsprechenden aus (6) gebildeten Determinanten verschwinden oder nicht; im letzteren Falle genügt den Gleichungen (4) nur eine zweifache Unendlichkeit von unendlich grossen Werthen, im ersteren aber eine vierfache Unendlichkeit von endlichen Werthsystemen. Wenn endlich alle Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden, so muss allgemein $a_{\iota\varkappa}=\delta_{\iota\varkappa}$ (0 oder 1) sein; sind nicht zugleich alle $b_\varkappa$ null, so genügt den Gleichungen eine $(n-2)$-fache Unendlichkeit von unendlich grossen Werthsystemen; verschwinden aber zugleich alle $b_\varkappa$, so werden die Gleichungen identisch befriedigt.

Für ein ungerades n wird die Determinante (5) stets verschwinden; wenn dann nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix (6) gleich null sind, so wird den Gleichungen kein endliches oder unendlich grosses Werthsystem genügen; verschwinden aber diese $n+1$ Determinanten, so genügen den Gleichungen (4) alle Werthsysteme einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Wofern jetzt die sämmtlichen ersten Unterdeterminanten von (5) verschwinden, werden auch alle zweiten Unterdeterminanten gleich null; sind aber nicht zugleich alle $(n-2)$-reihigen Determinanten, welche aus (6) gebildet werden können, gleich null, so wird den Gleichungen (4) durch die Punkte einer unendlich fernen Geraden genügt; wenn aber auch die zuletzt genannten Determinanten sämmtlich verschwinden, so genügen den Gleichungen (4) endliche Werthsysteme, welche eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit anfüllen u. s. w. Schliesslich mögen alle Unterdeterminanten zweiten Grades von (5) verschwinden, dann müssen alle Elemente dieser Determinante gleich null sein; es kommt dann noch darauf an, ob auch alle $b_\varkappa$ verschwinden oder nicht; im letzteren Falle genügen den Gleichungen (4) nur unendlich grosse Werthe, und zwar füllen dieselben eine $(n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit an; im ersten Falle sind die Gleichungen (4) identisch erfüllt*).

Wir nehmen an, das endliche Werthsystem $(\xi_1 \ldots \xi_\varkappa)$ genüge den Gleichungen (4); dann folgt aus ihrer Verbindung mit (2), dass für ein ganz beliebiges p auch die Gleichungen bestehen:

$$\text{(7)} \qquad \frac{y_\varkappa+p\xi_\varkappa}{1+p}=\sum\nolimits^\lambda a_{\varkappa\lambda}\frac{x_\lambda+p\xi_\lambda}{1+p}+b_\varkappa .$$

Legen wir hier dem p hinreichend kleine positive oder negative Werthe bei, so liegen auch die Punkte $Z_\varkappa=\dfrac{x_\varkappa+p\xi_\varkappa}{1+p}$ innerhalb des

*) Ob die hier mitgetheilten Sätze bereits früher bewiesen sind, kann ich nicht sagen; jedenfalls bietet der Beweis keine grossen Schwierigkeiten.

Bereiches, welcher von dem betrachteten Körper in der Anfangslage eingenommen wird. Dieser ganze Bereich kann also mit geraden Linien angefüllt werden, welche einmal in der Form $\frac{x_\varkappa + p\xi_\varkappa}{1+p}$ und dann in der Form $\frac{y_\varkappa + p\xi_\varkappa}{1+p}$ dargestellt werden können. Nun füge man dem angenommenen Bereiche neue Raumtheile so hinzu, dass dadurch die Linien verlängert werden. Die Gleichungen (7) stellen also auch dann noch das Zusammenfallen von Punkten dar, wenn p immer mehr wächst. Zugleich entspricht dem Werthsystem $(\xi_1 \ldots \xi_n)$ ein bestimmter Punkt. Lasse ich von diesem Punkte eine gerade Linie ausgehen, so müssen deren Punkte identisch sein mit den Punkten einer zweiten Geraden, welche von demselben Punkte ausgeht; rückt der Punkt auf der ersten Linie immer näher an den Punkt (ξ), so thut dasselbe der Punkt auf der zweiten Linie. Wenn also die Werthsysteme (x) und (y) denselben Punkt darstellen, so kann der Ausdruck $\Sigma(y_\iota - x_\iota)^2$ einen beliebigen kleinen Werth erhalten, was nach den obigen Darlegungen unmöglich ist. Somit dürfen die Gleichungen (4) durch kein im Endlichen liegendes Werthsystem befriedigt werden.

Das erkennt man auf einem einfacheren Wege. Jedem Werthsystem $(x_1 \ldots x_n)$, also auch dem System $(\xi_1 \ldots \xi_n)$ entspricht ein einziger Punkt der Raumform. Denken wir jetzt einen Körper, welcher diesen Punkt in sich einschliesst, so wird die Umgebung des Punktes ganz von dem Körper eingenommen. Sollten aber die Punkte $\frac{y_\varkappa + p\xi_\varkappa}{1+p}$ für ein hinlänglich grosses p mit den Punkten $\frac{x_\varkappa + p\xi_\varkappa}{1+p}$ identisch sein, so müssten im Körper selbst zwei von ξ ausgehende, ungleich gerichtete Gerade zusammenfallen, was nicht möglich ist.

Endlich darf daran erinnert werden, dass die Zuordnung der Punkte des Raumes zu den Coordinaten $(x_1 \ldots x_n)$ eine eindeutige sein muss, solange man innerhalb eines hinlänglich kleinen Bereiches bleibt. Indem man diesen Bereich um den Punkt $(\xi_1 \ldots \xi_n)$ annimmt und von diesen Coordinatenwerthen ausgeht, muss jedem Punkte ein einziges Werthsystem zugeordnet werden.

Umgekehrt dürfen wir aber annehmen, dass jede Zuordnung, bei welcher kein endliches Werthsystem sich selbst entspricht, ein Zusammenfallen von Punkten vermittelt. Sollen nämlich die Coordinaten (x) und (y) denselben Punkt bezeichnen, besteht zwischen ihnen die Beziehung (2) mit den weiteren Bedingungen (3), und haben die Gleichungen (4) keine endliche Lösung $(\xi_1 \ldots \xi_n)$: so giebt es für den Werth von $(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2$ ein von null verschiedenes endliches Minimum. Sobald wir jetzt annehmen, dass für keinen festen Körper der Abstand zweier Punkte dieses Minimum erreicht, lässt sich

der Körper ebenso bewegen wie im Euklidischen Raume. Zugleich erhalten wir für jeden Bereich, dessen Ausdehnung nach keiner Richtung hin an jenes Minimum herankommt, die Möglichkeit einer eindeutigen Beziehung zwischen den Punkten und Coordinaten. Das angegebene Minimum wird aber nicht verkleinert, wenn man die Transformation (2) beliebig oft wiederholt oder umkehrt. Wir erhalten somit den Satz:

Soll in einer Raumform mit überall verschwindender Krümmung derselbe Punkt durch die rechtwinkligen Coordinaten desselben Systems $(x_1 \ldots x_n)$ *und* $(y_1 \ldots y_n)$ *dargestellt werden, so sind die beiden Bedingungen nothwendig und hinreichend:*

1) *zwischen den x und y müssen diejenigen Beziehungen bestehen, welche durch die Gleichungen* (2) *und* (3) *angegeben werden;*

2) *das Gleichungssystem* (4) *darf keine endliche Lösung besitzen.*

Der Kürze wegen bezeichnen wir die rechten Seiten der Gleichungen (2) durch $\varphi_1(x, 1) \ldots \varphi_n(x, 1)$; ersetzen wir hierin $x_1 \ldots x_n$ durch $\varphi_1(x, 1) \ldots \varphi_n(x, 1)$, so mögen die neuen Functionen durch $\varphi_1(x, 2) \ldots \varphi_n(x, 2)$ bezeichnet werden. Auf dieselbe Weise definirt man die Functionen $\varphi_1(x, m) \ldots \varphi_n(x, m)$ für jedes ganzzahlige positive m. Umgekehrt hat man $\varphi_\varkappa(x, 0) = x_\varkappa$ zu setzen und $\varphi_1(x, -m) \ldots \varphi_n(x, -m)$ als die reciproke Transformation von $\varphi_1(x, m) \ldots \varphi_n(x, m)$ zu wählen. Nun übersieht man unmittelbar, dass, wenn die Transformation $\varphi_1(x, 1) \ldots \varphi_n(x, n)$ einen Punkt in seine Anfangslage zurückführt, auch jede Transformation $\varphi_1(x, m) \ldots \varphi_n(x, m)$ für jedes ganzzahlige m dasselbe leistet. Wir müssen aber jetzt nach den Bedingungen fragen, unter denen mehrere Transformationen, deren jede einzelne den angegebenen Forderungen genügt, neben einander für dieselbe Raumform bestehen können. Diese Bedingungen können wir freilich hier nicht vollständig entwickeln, wir können aber wenigstens folgendes festsetzen.

Wir machen eine Transformation abhängig von r ganzen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_r$, wo die m_ι alle ganzen Zahlen annehmen können; es seien die Transformationen

$$y_\varkappa = \varphi_\varkappa(x, m_1, m_2, \ldots, m_r) \quad \text{für} \quad \varkappa = 1 \ldots n.$$

Dann muss jede solche Transformation wieder den angegebenen Bedingungen genügen. Zugleich muss aber die Verbindung von irgend zwei derartigen Transformationen wieder zu einer Transformation des Systems führen; d. h. wenn gesetzt wird:

$$z_\varkappa = \varphi_\varkappa(y, m_1' \ldots m_r'),$$

so muss auch sein

$$z_\varkappa = \varphi_\varkappa(x, m_1'' \ldots m_r''),$$

wo die $m_\iota, m_\iota', m_\iota''$ sämmtlich ganze Zahlen sind; die Transformationen müssen also eine Gruppe bilden.

Dadurch ist die Aufsuchung aller in Betracht kommenden Raumformen auf das analytische Problem zurückgeführt, diejenigen discontinuirlichen Gruppen von Substitutionen der Form (2) mit den Bedingungen (3) anzugeben, welche von einer endlichen Anzahl r von ganzen Zahlen $m_1 \dots m_r$ abhängen und für welche bei jeder Auswahl der Zahlen $m_1 \dots m_r$ die Gleichungen (4) nur unendlich grosse Lösungen besitzen. Man kann dieses Problem auch in folgender Weise aussprechen: die Punkte des n-dimensionalen Euklidischen Raumes sollen congruenten Zuordnungen unterworfen werden; alle diese Zuordnungen sollen von r ganzen Zahlen abhängen, und jeder Auswahl der ganzen Zahlen soll eine einzige Zuordnung entsprechen; bei jeder solchen Zuordnung soll kein endlicher Punkt sich selbst entsprechen; die Vereinigung von irgend zwei solchen Zuordnungen soll wieder eine Zuordnung derselben Schaar liefern.

Es kann nicht meine Absicht sein, das vorgelegte Problem vollständig zu lösen; es muss genügen, diejenigen Gruppen anzugeben, welche sich unmittelbar ohne Rechnung darbieten. Nun zerfallen für eine beliebige Zahl n von Dimensionen die vorhandenen Gruppen in eine grosse Zahl von Arten; die Arten lassen sich aber in $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Gattungen zusammenfassen, je nach der geringsten Zahl von Dimensionen desjenigen unendlich fernen Gebildes, welches bei jeder Substitution der Gruppe sich selbst entspricht.

Erste Gattung, für welche jeder in die Anfangslage zurückführenden Transformation eine $(n-2)$-fach unendliche Mannigfaltigkeit von unendlich grossen, den Gleichungen (4) genügenden Werthsystemen entspricht, oder wie wir jetzt kürzer sagen, für welche bei jeder solchen Transformation ein $(n-2)$-dimensionales unendlich fernes Gebilde in Ruhe bleibt. Hierbei soll, wie auch stets im folgenden, von der identischen Transformation abgesehen werden. In dieser Gattung sind n verschiedene Arten enthalten. Um irgend eine derselben zu charakterisiren, stelle man r Periodensysteme auf:

$$\begin{array}{l} \omega_1^{(1)},\ \omega_2^{(1)},\ \dots,\ \omega_n^{(1)}, \\ \omega_1^{(2)},\ \omega_2^{(2)},\ \dots,\ \omega_n^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_1^{(r)},\ \omega_2^{(r)},\ \dots,\ \omega_n^{(r)}. \end{array}$$

Hier müssen alle Determinanten, welche aus dem vorstehenden System durch Auswahl von irgend r Verticalreihen gebildet werden können, von null verschieden sein. Durch passende Wahl des Coordinatensystems lässt sich bewirken, dass jede $\omega_\varkappa^{(\iota)}$ für $\varkappa > \iota$ gleich null ist.

Dies vorausgesetzt, ist der Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ identisch mit demjenigen Punkt, dessen Coordinaten sind:

$$\begin{array}{l} x_1 + m_1\omega_1^{(1)} + m_2\omega_1^{(2)} + \cdots + m_r\omega_1^{(r)}, \\ x_2 + m_1\omega_2^{(1)} + m_2\omega_2^{(2)} + \cdots + m_r\omega_2^{(r)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n + m_1\omega_n^{(1)} + m_2\omega_n^{(2)} + \cdots + m_r\omega_n^{(r)}, \end{array}$$

wo die $m_1, m_2, \ldots, m_r$ beliebige ganze Zahlen sind. Jede einzelne Art ist durch die Zahl r der Periodensysteme bestimmt, und die Zahl r kann gleich jeder der Zahlen $1 \ldots n$ sein.

Zweite Gattung, für welche bei jeder in die Anfangslage zurückführenden Bewegung mindestens ein $(n-4)$-dimensionales unendlich fernes Gebilde in Ruhe bleibt. Wir machen eine derartige Transformation abhängig von r ganzen Zahlen $m_1 \ldots m_r$ und setzen, indem wir dem η und den $\omega_\iota^{(\varrho)}$ für $\iota = 3 \ldots n$, $\varrho = 1 \ldots n$ feste Werthe beilegen:

$$\begin{array}{l} y_1 = x_1 \cos m_1\eta - x_2 \sin m_1\eta, \\ y_2 = x_2 \sin m_1\eta + x_2 \cos m_1\eta, \\ y_3 = x_3 + m_1\omega_3^{(1)} + \cdots + m_r\omega_3^{(r)}, \\ y_4 = x_4 + m_1\omega_4^{(1)} + \cdots + m_r\omega_4^{(r)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = x_n + m_1\omega_n^{(1)} + \cdots + m_r\omega_n^{(r)}. \end{array}$$

Hierbei kann r höchstens gleich $n-2$ sein, so dass wir $n-2$ verschiedene Arten erhalten.

Dritte Gattung. Sie ist dadurch charakterisirt, dass bei jeder in die Anfangslage zurückführenden Bewegung mindestens ein $(n-6)$-dimensionales unendlich fernes Gebilde in Ruhe bleibt. Dieser Bedingung genügt man durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} y_1 = x_1 \cos m_1\eta - x_2 \sin m_1\eta, \\ y_2 = x_2 \sin m_1\eta + x_2 \cos m_1\eta, \\ y_3 = x_3 \cos m_1\eta' - x_4 \sin m_1\eta', \\ y_4 = x_3 \sin m_1\eta' + x_4 \cos m_1\eta', \\ y_5 = x_5 + m_2\omega_5^{(1)} + \cdots + m_r\omega_5^{(r)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n = x_n + m_1\omega_n^{(1)} + \cdots + m_r\omega_n^{(r)}. \end{array}$$

Auf diese Weise kann man weiter fortfahren, und man erhält bereits zahlreiche Arten, wobei noch zu beachten ist, dass die zu derselben Art gehörenden Raumformen nicht als identisch angesehen werden dürfen.

Die vorstehende Liste ist aber keineswegs vollständig. Selbst wenn keine weitere Beziehung zwischen den η und ω festgestellt wird, kann

man z. B. für $n = 6$ die zusammenfallenden Punkte durch die Transformation erhalten:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \cos m_1 \eta - x_2 \sin m_1 \eta, \\
y_2 &= x_1 \sin m_1 \eta + x_2 \cos m_1 \eta, \\
y_3 &= x_3 \cos m_2 \eta' - x_4 \sin m_2 \eta', \\
y_4 &= x_3 \sin m_2 \eta' + x_4 \cos m_2 \eta', \\
y_5 &= x_5 + m_1 \omega_5 + m_2 \omega_5', \\
y_6 &= x_6 + m_1 \omega_6 + m_2 \omega_6'.
\end{aligned}$$

Man kann aber auch zwischen den Werthen der η und ω besondere Beziehungen festsetzen, welche es ermöglichen, noch weitere Transformationen hinzuzufügen. So liefert die mitgetheilte Tabelle für $n = 3$ zwei Gattungen, deren erste drei und deren zweite eine Art enthält. Zu ihnen tritt die Raumform hinzu, in welcher das Zusammenfallen von Punkten durch die Gleichungen angegeben wird:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1(-1)^m + m' \omega', \\
y_2 &= x_2(-1)^m + m'' \omega'', \\
y_3 &= x_3 + m\omega.
\end{aligned}$$

§ 4.

Raumformen von constanter nicht verschwindender Krümmung.

Wenn eine n-dimensionale Raumform in einem endlichen Gebiete das constante Krümmungsmass $1 : k^2$ besitzt, so lässt sich immer das Gebiet dadurch untersuchen, dass man zur Bestimmung eines jeden Punktes $n + 1$ Variabele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ einführt, zwischen denen die Beziehung:

$$k^2 x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = k^2 \tag{1}$$

besteht, und dass festgesetzt wird:

a) die Beziehung (1) soll bei jeder Transformation welche einer starren Bewegung entspricht, ungeändert bleiben,

b) für je zwei Punkte x und x' soll sich auch die Beziehung

$$k^2 x_0 x_0' + x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n' = k^2 \cos \frac{a}{k} \tag{2}$$

nicht ändern.

Dann kann man die Raumform geometrisch weiter fortsetzen und man erhält alle diejenigen Coordinatenwerthe, welche mit (1) vereinbar sind und zu denen man analytisch bei stetiger Veränderung von dem Werthsystem $(1, 0, \ldots, 0)$ aus gelangt.

Für ein positives k^2 erhält man, wofern die Voraussetzung gemacht wird, dass die Bewegung irgend einer Stelle auch die einer jeden

andern eindeutig bestimmt, zwei Raumformen, deren analytische Behandlung dadurch ganz gleichförmig wird, dass beidemal dieselben Formeln gelten und dass man das eine mal verschiedenen Werthsystemen auch verschiedene Punkte zuordnet, während im andern Falle demselben Punkte zwei Werthsysteme

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n) \text{ und } (-x_0, -x_1, \cdots, -x_n)$$

entsprechen. Sehen wir aber jetzt von der Forderung ab, dass die Raumformen bei jeder Bewegung eines Körpers auch als Ganze bewegt werden, so möge eine gewisse starre Bewegung einen Körper in seine Anfangslage bringen. Dadurch mögen die Coordinaten $x_0, x_1 \ldots, x_n$ in $y_0, y_1, \ldots, y_n$ übergehen, indem die Beziehungen bestehen:

$$(3) \qquad y_0 = \sum_{\varkappa=0}^{n} a_{0\varkappa}\, x_\varkappa, \;\ldots,\; y_n = \sum_{\varkappa=0}^{n} a_{n\varkappa} x_\varkappa .$$

Die Relationen, welche zwischen den Coefficienten a bestehen, ergeben sich aus den Gleichungen (1) und (2). Die identische Transformation ist ausgeschlossen.

Wir untersuchen, ob es ein Werthsystem $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ giebt, welches den $n+1$ Gleichungen genügt:

$$(4) \qquad \begin{array}{c} (a_{00}-1)\xi_0 + a_{01}\xi_1 + \cdots + a_{0n}\xi_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}\xi_0 + a_{n1}\xi + \cdots + (a_{nn}-1)\xi_n = 0. \end{array}$$

Für ein gerades n giebt es immer ein Werthsystem, welches diesen Gleichungen genügt. Dann zeigen wir auf dieselbe Weise, wie im vorigen Paragraphen, dass eine solche Transformation für den angegebenen Zweck nicht geeignet ist. Somit giebt es überhaupt in diesem Falle nur die beiden längst bekannten Raumformen, und die starre Bewegung irgend eines Theiles in einem Raume constanter positiver Krümmung bestimmt bei einer geraden Zahl von Dimensionen die Bewegung für jeden andern Theil eindeutig.

Wenn dagegen n ungerade ist, so kommt es auf den Werth der Determinante an:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{00}-1 & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11}-1 & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}.$$

Sobald sie null ist, genügt den Gleichungen (4) mindestens eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Werthen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, und jede derartige Transformation ist auszuschliessen. Soll also eine von der identischen verschiedene Transformation einen Körper in seine Anfangslage zurückbringen, so muss die Determinante einen von null

verschiedenen Werth haben (und zwar wird dieser nothwendig positiv sein). Dann besteht die Bewegung in einer gleichzeitigen Verschiebung längs $\frac{n+1}{2}$ verschiedenen geraden Linien. Umgekehrt kann man zur Bestimmung einer jeden Bewegung, bei welcher kein Punkt in Ruhe bleibt, zunächst die $\frac{n+1}{2}$ Geraden auswählen; nur muss jede von ihnen eine absolute Polare aller übrigen sein; dann hat man für jede dieser Geraden eine Verschiebung von gewisser Grösser festzusetzen. Wenn dabei die Verschiebung für zwei solche gerade Linien gleich gross ist, so werden auch alle Punkte einer dreidimensionalen Ebene in geraden Linien (die zu einander nach Cliffords Ausdruck parallel sind) bewegt und längs aller dieser Linien ist die Verschiebung gleich gross. Ist noch die Verschiebung längs einer dritten unter jenen $\frac{n+1}{2}$ Linien ebenso gross wie längs der beiden ersten, so gilt entsprechendes für eine Schaar von Geraden, welche eine fünfdimensionale Ebene anfüllen u. s. w.

Da in einer Riemann'schen Raumform von einer ungeraden Zahl von Dimensionen je zwei Gebilde congruent sind, wenn jedes die Gegenpunkte des andern enthält, so können wir ganz davon absehen, welche von beiden Raumformen zu grunde gelegt wird*). Wir betrachten jetzt die Verschiebung L längs einer der angegebenen Geraden und nehmen an, wir hätten die kleinste gewählt, welche dem angegebenen Zweck längs dieser Geraden genügt. Da eine solche existiren muss, ist der Fall ausgeschlossen, dass L zu πk incommensurabel ist. Wäre $L = \frac{r}{p} \pi k$, wo r und p relativ prim zu einander sind, so könnte man zu einem kleineren Werthe, speciell zu $\frac{1}{p} \pi k$ gelangen. Wir setzen also $L = \frac{1}{p} \pi k$. Dann führt eine p-malige Wiederholung der angegebenen Transformation zu den entgegengesetzt gleichen Coordinaten für die Punkte der bezeichneten Geraden. Wäre aber die Verschiebung längs einer andern aus den $\frac{n+1}{2}$ Geraden nicht ebenfalls gleich $\frac{1}{p} \pi k$, so könnte man auf die durch p-malige Wiederholung erhaltene Transformation wieder die im vorigen Paragraphen (S. 11. 12) durchgeführte Betrachtung anwenden. Wenn also die Coordinatenwerthe für die Punkte der einen Geraden ihre entgegengesetzten Werthe erhalten, so muss dasselbe allgemein eintreten. Somit müssen alle

---

*) Das ist bei der Herleitung gestattet; die gewonnenen Resultate werden im allgemeinen verschiedene, jenachdem sie aus der Riemann'schen Raumform oder ihrer Polarform gewonnen werden.

$\frac{n+1}{2}$ Geraden in sich gleichweit verschoben werden; jeder Punkt des Raumes bewegt sich in einer geraden Linie; der Raum ist also mit geraden Linien angefüllt, welche überall von einander gleich weit entfernt und nach Clifford's Ausdruck zu einander parallel sind. Eine solche Bewegung entspricht aufs schönste der Parallelverschiebung des Euklidischen Raumes. Hiernach entsprechen auch alle im vorliegenden Falle möglichen Raumformen der ersten Gattung, welche im vorigen Paragraphen für verschwindendes Krümmungsmass aufgestellt ist. Wir erhalten n verschiedene Arten je nach der Zahl der von einander unabhängigen Transformationen, welche, ohne identisch zu sein oder auf blossen Zeichenwechsel hinauszukommen, einen Körper in seine Anfangslage bringen. Für drei Dimensionen kann man von einer Schaar von Parallelen ausgehen und alle diese um $\frac{k\pi}{p}$ verschieben, wo p eine ganze Zahl ist. Hierzu kann eine Verschiebung von der Grösse $\frac{k\pi}{q}$ (für ein ganzzahliges q) längs einer zweiten Schaar von Parallelen treten, welche im ganzen willkürlich ist, nur muss der Sinn des Parallelismus (die Windung nach rechts oder links) mit dem für die erstere Schaar geltenden übereinstimmen. Endlich kann man noch eine dritte Schaar von gleich gewundenen Parallelen hinzunehmen und auf ihnen eine Verschiebung $\frac{k\pi}{r}$ festsetzen. Aehnlich verfährt man bei einer grösseren Zahl von Dimensionen. Ich erinnere noch daran, dass die so erhaltenen (discontinuirlichen) Gruppen von Substitutionen der Gruppe der Parallelverschiebungen des Euklidischen Raumes auch insofern entsprechen, als je zwei Substitutionen mit einander vertauschbar sind.

Wir fassen das gefundene Resultat in folgender Weise zusammen: *Für eine gerade Zahl n von Dimensionen wird jede Raumform constanter positiver Krümmung bei der starren Bewegung eines Theiles auch als Ganzes in sich bewegt; es giebt dann also nur die beiden früher gefundenen Raumformen, und jede solche Raumform wird entweder durch ein einziges oder doch durch zwei geschlossene $(n-1)$-dimensionale Gebilde zerlegt.*

Bei einer ungeraden Zahl n von Dimensionen giebt es ausser den früher bekannten noch weitere Raumformen constanter positiver Krümmung; wenn $1:k^2$ das Krümmungsmass und p irgend eine ganze Zahl ist, so kann man dadurch in die Anfangslage zurückgelangen, dass man den Raum längs (Clifford'scher) parallelen Geraden um die Strecke $\frac{k\pi}{p}$ bewegt; solcher Verschiebungen kann man n von einander unabhängige zu einer Gruppe verbinden.

Um die Raumformen constanter negativer Krümmung in gleicher

Weise zu behandeln, wird man wieder von den Gleichungen (1)—(4) ausgehen und dem k^2 einen negativen Werth beilegen. Für ein ungerades n braucht die Determinante (5) nicht zu verschwinden; ist sie von null verschieden, so wird (ausser Geraden des ideellen Gebietes) eine Gerade des reellen Gebiets in sich verschoben; wenn die Determinante und damit ihre sämmtlichen ersten Unterdeterminanten verschwinden, so bleibt eine Gerade in Ruhe u. s. w. Für ein gerades n verschwindet die Determinante und somit wird mindestens ein Punkt ungeändert bleiben. Das ruhende Gebilde kann aber entweder Punkte des reellen Bereichs enthalten, d. h. solche Werthe $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, für welche

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < 0$$

ist, oder es kann das unendlich ferne Gebilde berühren, d. h. für kein Werthsystem gilt die Gleichung:

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < 0,$$

aber für ein solches besteht die Beziehung:

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 0,$$

und für alle übrigen die Gleichung:

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 > 0;$$

endlich kann es ganz dem idealen Bereiche angehören, d. h. es ist allgemein:

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 > 0.$$

Der Fall, dass die Gleichung (4) keine Lösung hat, also die Determinante (5) nicht verschwindet, befriedigt, wie man leicht sieht, alle Bedingungen, welche hier erfüllt werden müssen; ebenso genügt der Fall, dass die Lösungen vollständig dem idealen Gebiete angehören, ohne das unendlich ferne Gebilde zu berühren. Dagegen ist der Fall auszuschliessen, dass den Gleichungen (4) Werthsysteme des reellen Bereiches genügen, wie die im vorigen Paragraphen entwickelten Gründe lehren. Zugleich müssen wir aber auch diejenigen Substitutionen ausschliessen, bei denen ein unendlich ferner Punkt in Ruhe gehalten wird. Das ergiebt sich schon daraus, dass die Lobatschewsky'schen Parallelen nach der einen Richtung unbegrenzt sich nähern, somit jeder Körper so bewegt werden kann, dass er zwei beliebige parallele Linien in entsprechenden Punkten trifft. Man kann dies auch auf rein analytischem Wege zeigen, indem man das Minimum des Abstandes von einem Punkte (x) zu einem damit zusammenfallenden Punkte (y) bestimmt; dieser Abstand muss ein bestimmtes endliches Minimum besitzen und darf nicht unter jede Grenze sinken. Dieser Bedingung wird aber nur genügt, wenn die Gleichungen (4) keine Lösung haben oder wenn alle Lösungen dem idealen Gebiete angehören, dagegen

wird der Abstand unterhalb jede beliebige Grenze sinken, sowohl wenn für eine Lösung (ξ) die Gleichung

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < 0,$$

als auch wenn dafür die Gleichung

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 0$$

erfüllt wird. Der Beweis für diese Behauptung ist so einfach, dass er nicht mitgetheilt zu werden braucht. Wir sprechen das Resultat in folgenden Worten aus:

Soll die Substitution (3) *für ein negatives k^2 geeignet sein, zusammenfallende Punkte zu bezeichnen, so muss die Gleichung* (4) *entweder keine Lösung besitzen oder doch nur solche, für welche ist:*

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 > 0.$$

Für zwei Dimensionen entspricht die einzige Substitution, welche in betracht kommt, der Verschiebung längs einer geraden Linie. Wie mehrere solche zu einer discontinuirlichen Gruppe vereinigt werden können, ist, wie Herr Klein bereits erwähnt hat, in neuerer Zeit für Zwecke der Functionentheorie untersucht worden. Namentlich kommt die Arbeit des Herrn Poincaré sur les groupes fuchsiens, im ersten Bande der Acta mathematica in betracht. Ganz ähnlich, wie ich bei einer früheren Gelegenheit (Crelle's Journal Bd. 89, S. 286) die Lobatschewsky'sche Ebene auf eine Halbkugel abgebildet habe, wird sie hier auf eine Euklidische Halbebene abgebildet, wobei den geraden Linien der ersteren diejenigen Kreise der Halbebene entsprechen, welche auf der begrenzenden Geraden senkrecht stehen. Der starren Bewegung der Lobatschewsky'schen Ebene in sich entspricht, wenn man $z = x + yi$ setzt, wo die Halbebene durch die Gerade $y = 0$ begrenzt wird, die Substitution

$$(6) \qquad t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{für} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

und reelle Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Dann können die hier gestatteten Substitutionen dadurch charakterisirt werden, dass die Gleichung

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

zwei reelle ungleiche Wurzeln hat (hyperbolische Substitution). Wir sprechen also für $n = 2$ das Problem in folgender Weise aus:

Man gebe eine endliche Zahl von Substitutionen der Form (6) an, welche beliebig oft wiederholt und in beliebiger Folge verbunden, eine discontinuirliche Gruppe bestimmen, in der nur hyperbolische Substitutionen vorkommen.

Passende Beispiele findet man in der bezeichneten Arbeit des Herrn Poincaré; ebenso werden durch einige unter den von ihm mitgetheilten Sätzen bereits ganze Classen von Gruppen ausgeschlossen;

ich glaube jedoch nicht näher auf die einzelnen Gruppen eingehen zu sollen.

Ebenso muss es mir fern liegen, die Frage für ein grösseres n hier weiter zu behandeln; es genüge, das analytische Problem nochmals anzugeben, auf welches wir das geometrische Problem hiermit zurückgeführt haben, und welches in folgender Form ausgesprochen werden kan:

Man soll für ein negatives k^2 die discontinuirlichen Gruppen von Substitutionen bestimmen, welche den Bedingungen genügen:

1) jede Substitution hat die Form (3), lässt die linke Seite von (1) ungeändert und die Determinante ihrer Coefficienten hat den Werth eins:

2) für jede einzelne Substitution hat die Gleichung (4) entweder keine Lösung oder doch nur solche, für welche

$$k^2\xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 > 0$$

ist.

Braunsberg, den 23. Februar 1891.

Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Man kann bekanntlich jede Irrationalzahl α durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen

$$(1)\qquad \frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \cdots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$(2)\qquad \alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist. Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus der Lehre von den Kettenbrüchen; er lässt sich aber auch durch andere sehr verallgemeinerungsfähige Methoden beweisen. Ich erinnere insbesondere an die Methode von Hermite*), welche insofern bemerkenswerth ist, als sie ein weitergehendes Resultat liefert.

Die Methode von Hermite ergiebt nämlich zu jeder Irrationalzahl α eine Reihe (1) von rationalen Brüchen, für welche an Stelle der Ungleichung (2) die folgende tritt:

$$(3)\qquad \alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{3}\,y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob der Factor $\sqrt{3}$ durch eine noch grössere Zahl ersetzt werden kann, ob also zu jeder Irrationalzahl α eine Reihe (1) herstellbar ist, welche die Zahl α noch stärker annähert, als die Reihe, welche sich nach der Methode von Hermite ergiebt. Diese Frage erledigt sich (und zwar im bejahenden Sinne) durch die nachstehenden Sätze, welche ich im Folgenden beweisen will:

Satz I. *Jede Irrationalzahl α lässt sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \cdots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{5}\,y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist.

---

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 41, pag. 195.

Satz II. *Bedeutet λ eine Zahl, die grösser ist als $\sqrt{5}$, so giebt es Irrationalzahlen α, welche sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots$$

nicht derart annähern lassen, dass, abgesehen vom Vorzeichen

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda \cdot y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist.

Der zweite Satz bildet eine wesentliche Ergänzung des ersten, insofern er zeigt, dass in dem Ausspruch des ersten Satzes $\sqrt{5}$ nicht durch eine grössere Zahl ersetzt werden kann.

Um den Satz I. zu beweisen, entwickeln wir die Irrationalzahl α in einen Kettenbruch. Wir setzen also

$$(4) \quad \alpha = \mu_1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \mu_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \cdots, \alpha_{n-1} = \mu_n + \frac{1}{\alpha_n}, \cdots,$$

indem wir allgemein mit μ_n die grösste in α_{n-1} enthaltene ganze Zahl bezeichnen. Die Entwicklung von α in einen Kettenbruch, welche sich aus den ersten n Gleichungen (4) ergiebt, wollen wir zur Abkürzung durch die Gleichung

$$(5) \qquad \alpha = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \alpha_n)$$

andeuten, und wir wollen ferner den n^{ten} Näherungsbruch mit

$$(6) \qquad \frac{p_n}{q_n} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

bezeichnen. Es ist nun bekanntlich

$$(7) \qquad \alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\pm 1}{q_n(\alpha_n q_n + q_{n-1})} = \frac{\pm 1}{r_n q_n^2},$$

wenn wir Kürze halber

$$(8) \quad r_n = \alpha_n + \frac{q_{n-1}}{q_n} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \cdots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \cdots, \mu_2)$$

setzen. Offenbar genügt es nun zu zeigen, dass für unendlich viele Indices n die Ungleichung

$$(9) \qquad r_n > \sqrt{5}$$

stattfindet. Denn, der Gleichung (7) zufolge, werden die diesen Indices entsprechenden Brüche $\frac{p_n}{q_n}$ eine Reihe bilden, welche die in unserem Satze angegebene Beschaffenheit besitzt.

Um nun die Existenz von unendlich vielen Indices n nachzuweisen, für welche die Ungleichung (9) erfüllt ist, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

1. **Fall:** Unter den Zahlen $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$ giebt es unendlich viele, welche grösser als 2 sind.

Da nach Gleichung (8) $r_n > \mu_{n+1}$ ist, so giebt es in diesem Falle unzählig viele Indices n, für welche $r_n > 3$, also um so mehr $r_n > \sqrt{5}$ ist.

2. Fall: Von einer gewissen Stelle ab kommt in der Reihe $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$ keine Zahl mehr vor, welche grösser als 2 ist.

In diesem Falle kann man also den Index k so bestimmen, dass jede Zahl der Reihe

$$(R) \qquad \mu_k, \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots$$

entweder den Werth 1 oder den Werth 2 besitzt. Hier unterscheiden wir nun zwei Unterfälle. Nämlich:

2a. In der Reihe (R) tritt die Zahl 2 unendlich oft auf.

Es giebt dann unendlich viele Indices $n > k$, für welche $\mu_{n+1} = 2$, also

$$r_n = (2, \mu_{n+2}, \mu_{n+3}, \ldots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \ldots, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_2)$$

wird. Wir vergleichen diesen Werth von r_n mit

$$r_n' = (2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots) + (0, 2, 1, 2, 1, \ldots, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_2).$$

Offenbar ist

$$(10) \qquad r_n \geqq r_n';$$

denn der Werth eines Kettenbruches wird verkleinert, wenn man die Theilnenner ungerader Ordnung durch grössere, die Theilnenner gerader Ordnung durch kleinere Zahlen ersetzt.

Der periodische Kettenbruch $(0, 2, 1, 2, 1, \ldots)$ besitzt nun den Werth $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, und hieraus ergiebt sich leicht

$$\lim_{n=\infty} r_n' = 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3} + 1 > \sqrt{5}.$$

Von einem bestimmten Index n ab ist also beständig $r_n' > \sqrt{5}$ und es giebt daher, zufolge der Ungleichung (10), auch unendlich viele Indices n, für welche $r_n > \sqrt{5}$ ist.

Wir haben nun noch den zweiten Unterfall zu betrachten:

2b. In der Reihe (R) tritt die Zahl 2 nur endlich oft auf.

Dann dürfen wir annehmen, dass alle Glieder der Reihe (R) den Werth 1 besitzen. Denn andernfalls können wir dieses dadurch erreichen, dass wir einige Anfangsglieder der Reihe (R) fortlassen, oder, was dasselbe ist, den Index k durch einen geeignet gewählten grösseren Index ersetzen. Da nun alle Glieder der Reihe (R) den Werth 1 besitzen, so ist für jeden Index $n > k$:

$$r_n = (1, 1, 1, \ldots) + (0, 1, 1, \ldots, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_2).$$

Für den Grenzwerth von r_n findet man

$$\lim_{n=\infty} r_n = \sqrt{5},$$

und zwar liegen die Werthe von r_n abwechselnd über und unter $\sqrt{5}$, so dass es unzählig viele Indices n giebt, für welche $r_n > \sqrt{5}$ wird. —

Wir sehen also, dass die Ungleichung (9) in jedem Falle für unendlich viele Indices n erfüllt ist. Hieraus geht, wie wir schon oben bemerkt haben, die Richtigkeit des Satzes I. unmittelbar hervor.

Zum Beweise des Satzes II. betrachten wir diejenigen Zahlen, deren Kettenbruchentwicklung mit der Periode $(1, 1, 1, \ldots)$ endigt. Wir wollen zeigen, dass jede solche Zahl α die in unserem Satze behauptete Eigenschaft besitzt. Diese Eigenschaft lässt sich aber offenbar so aussprechen: Es giebt entweder überhaupt keinen oder doch nur eine endliche Anzahl von rationalen Brüchen $\frac{x}{y}$, welche der Bedingung

$$\alpha - \frac{x}{y} < \frac{1}{\lambda y^2} \tag{11}$$

genügen, wo λ eine Zahl grösser als $\sqrt{5}$ bedeutet.

Um dieses nun zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass nach einem bekannten Satze von Lagrange*) sich jeder Bruch, welcher der Ungleichung (11) genügt, unter den Näherungsbrüchen

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \tag{12}$$

der Zahl α befinden muss. Setzen wir nun, wie oben,

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\pm 1}{r_n q_n^2},$$

so ist $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \sqrt{5}$, und da $\lambda > \sqrt{5}$ ist, so wird von einem bestimmten Index n ab r_n beständig kleiner als λ, also

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} > \frac{1}{\lambda q_n^2}$$

sein. Es giebt also in der That in der Reihe (12), wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von Brüchen, welche der Bedingung (11) genügen.

Unter den hier betrachteten Zahlen α ist die einfachste die Zahl

$$\varrho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = (1, 1, 1, \ldots),$$

und es ergiebt sich aus einem bekannten Satze**) unmittelbar, dass alle anderen Zahlen α der Zahl ϱ äquivalent, d. h. in der Form

$$\alpha = \frac{a\varrho + b}{c\varrho + d}$$

enthalten sind, wo a, b, c, d ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung $ad - bc = \pm 1$ genügen.

*) Vgl. Serret, Cours d'algèbre supérieure (Paris 1877) Bd. I, pag. 19.

**) Serret, Cours d'algèbre supérieure (Paris 1877) Bd. I, pag. 34.

Wir wollen nun an die vorstehend bewiesenen Sätze noch einige Bemerkungen anknüpfen.

Es sei α irgend eine Irrationalzahl und es sei ferner

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots$$

eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen, deren Grenze die Zahl α ist. Wenn nun λ eine positive Zahl bezeichnet, so kann man die Frage erheben, ob jene Reihe so bestimmt werden kann, dass abgesehen vom Vorzeichen

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Betrachten wir das System aller Zahlen λ, für welche diese Frage zu bejahen ist! Zu diesen Zahlen gehören nach Satz I. stets diejenigen Zahlen, welche $\sqrt{5}$ nicht überschreiten. Ueberhaupt leuchtet ein, dass, wenn λ_0 irgend eine zu dem Systeme der Zahlen λ gehörige Zahl bedeutet, auch jede Zahl, welche kleiner als λ_0 ist, zu dem Systeme gehört. Um alle Zahlen λ angeben zu können, braucht man hiernach nur die obere Grenze dieser Zahlen zu bestimmen. Wenn nämlich g diese obere Grenze bezeichnet, so wird das System der Zahlen λ aus allen positiven Zahlen bestehen, welche g nicht überschreiten (wobei indessen möglicher Weise die Zahl g selber auszuschliessen ist).

Die Zahl g ist durch die Irrationalzahl α offenbar vollständig bestimmt; es gelten von ihr die nachstehenden Sätze:

1) „Wenn in der Kettenbruchentwicklung von α unendlich viele verschiedene Theilnenner auftreten, so ist die zu α gehörige Zahl g unendlich gross".

2) „Wenn in der Kettenbruchentwicklung von α nur eine endliche Anzahl verschiedener Theilnenner auftreten, so besitzt die Zahl g einen endlichen Werth, welcher folgendermassen näher bestimmt werden kann:

Es sei, wie oben, $\alpha = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$, sowie

$$r_n = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \ldots, \mu_2).$$

Man bilde nun die Häufungsstellen der Werthemenge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots.$$

Dann wird die obere Grenze dieser Häufungsstellen die zur Zahl α gehörige Zahl g sein".

Infolge des letzteren Satzes führt die nähere Untersuchung der Zahlen g auf Betrachtungen, wie sie sich in dem Aufsatz von Herrn Markoff „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies"*) finden.

*) Mathematische Annalen, Bd. 15, pag. 381. Der Zusammenhang, in welchem die Untersuchungen des Herrn Markoff mit der von uns behandelten Frage

Um die hauptsächlichsten Resultate, zu welchen die Untersuchung der Zahlen g führt, in einfacher Form aussprechen zu können, wollen wir eine Eintheilung der Gesammtheit aller Irrationalzahlen in Classen vornehmen. Und zwar soll diese Eintheilung nach der Massgabe geschehen, dass zwei Zahlen α und α' stets und nur dann in dieselbe Classe gerechnet werden, wenn sie äquivalent sind, d. h. wenn zwischen ihnen eine Gleichung der Gestalt

$$\alpha' = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

besteht, wo a, b, c, d vier ganze, der Bedingung $ad - bc = \pm 1$ genügende Zahlen bedeuten. Dies vorausgeschickt bestehen nun die folgenden Sätze, deren Beweise man leicht den Markoff'schen Betrachtungen entnimmt:

1) *Irrationalzahlen, welche in dieselbe Classe gehören, entspricht dieselbe Zahl g.*

2) *Jede Irrationalzahl α, mit Ausschluss der zu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ äquivalenten Zahlen, lässt sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \ldots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{8}\cdot y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist.

3) *Ist die Zahl λ grösser als $\sqrt{5}$, so lässt sich jede Irrationalzahl α, mit Ausschluss gewisser Irrationalzahlen, durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \ldots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Die auszuschliessenden Irrationalzahlen bilden eine endliche Anzahl von Classen, wenn $\lambda < 3$ ist; sie bilden unendlich viele Classen, wenn $\lambda \geqq 3$ ist.

Königsberg i./Pr., 16. Juni 1891.

---

stehen, erklärt sich aus dem Umstande, dass diese Frage auf die Untersuchung der Werthe hinausläuft, welche die quadratische Form $y(\alpha y - x)$ für ganzzahlige Werthe der Unbestimmten x, y annimmt.

Ueber algebraische und durch Quadraturen algebraischer Functionen darstellbare Integrale partieller Differentialgleichungssysteme.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Ein algebraisches partielles Differentialgleichungssystem beliebiger Ordnung lässt sich bekanntlich auf ein solches erster Ordnung von der Form reduciren

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum f_{\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, u_1^{\alpha_{11}} \ldots u_\nu^{\alpha_{1\nu}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)^{\beta_{11}} \ldots \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_n}\right)^{\beta_{1n}} \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial z_1}\right)^{\delta_{11}} \ldots \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial z_n}\right)^{\delta_{1n}} = 0, \\
&\sum f_{\alpha_{12},\alpha_{22},\ldots}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, u_1^{\alpha_{21}} \ldots u_\nu^{\alpha_{2\nu}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)^{\beta_{21}} \ldots \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_n}\right)^{\beta_{2n}} \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial z_1}\right)^{\delta_{21}} \ldots \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial z_n}\right)^{\delta_{2n}} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sum f_{\alpha_{\nu 1},\alpha_{\nu 2},\ldots}(z_1, z_2, \ldots, z_n)\, u_1^{\alpha_{\nu 1}} \ldots u_\nu^{\alpha_{\nu\nu}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)^{\beta_{\nu 1}} \ldots \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_n}\right)^{\beta_{\nu n}} \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial z_1}\right)^{\delta_{\nu 1}} \ldots \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial z_n}\right)^{\delta_{\nu n}} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

worin die Functionen $f_{\alpha_{\varrho 1},\alpha_{\varrho 2},\ldots}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen und die $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ ganze positive Zahlen bedeuten, und es werde angenommen, dieses Differentialgleichungssystem besitze ein particuläres Integralsystem von der Form

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_{11} &= F_1\left(z_1, \ldots, z_n,\ v_1, \ldots, v_\lambda,\ \int^{s_1} f_1(s)\, ds, \ldots \int^{s_\mu} f_\mu(s)\, ds\right), \\
u_{21} &= F_2\left(z_1, \ldots, z_n,\ v_1, \ldots, v_\lambda,\ \int^{s_1} f_1(s)\, ds, \ldots \int^{s_\mu} f_\mu(s)\, ds\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{\nu 1} &= F_n\left(z_1, \ldots, z_n,\ v_1, \ldots, v_\lambda,\ \int^{s_1} f_1(s)\, ds, \ldots \int^{s_\mu} f_\mu(s)\, ds\right),
\end{aligned}
\right.
$$

worin $F_1, F_2, \ldots$ algebraische Functionen der eingeschlossenen Grössen, $v_1, \ldots, v_\lambda$, $s_1, \ldots, s_\mu$ irreductible algebraische Functionen von $z_1, \ldots, z_n$, ferner $f_1(s), \ldots, f_\mu(s)$ irreductible algebraische Functionen von s bedeuten, und die Integrale

$$\text{(a)} \qquad \int^{s_1} f_1(s)\, ds, \quad \int^{s_2} f_2(s)\, ds, \quad \ldots, \quad \int^{s_\mu} f_\mu(s)\, ds$$

nicht schon unter sich und mit $z_1, \ldots, z_n$ in einem algebraischen Zusammenhange stehen sollen, was offenbar stets ohne Beschränkung vorausgesetzt werden darf, da im entgegengesetzten Falle vermöge bestehender algebraischer Beziehungen die abhängigen Integrale auf algebraischem Wege aus den Ausdrücken (2) herausgeschafft werden können. Bildet man nun in bekannter Weise eine algebraische Function t_1 von $z_1, z_2, \ldots, z_n$, welche die Lösung einer mit Adjungirung von $z_1, \ldots, z_n$ und den Coefficienten des Differentialgleichungssystems $f_{\alpha_{\varrho 1}, \alpha_{\varrho 2}, \ldots}(z_1, \ldots, z_n)$ irreductibeln Gleichung

$$\text{(3)} \quad t^\varkappa + r_1(z_1, \ldots, z_n, f_{\alpha_{\varrho 1}, \alpha_{\varrho 2}, \ldots})\, t^{\varkappa - 1} + \cdots + r_\varkappa(z_1, \ldots, z_n, f_{\alpha_{\varrho 1}, \alpha_{\varrho 2}, \ldots}) = 0$$

ist, in welcher $r_1, \ldots, r_\varkappa$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten, und durch welche die Grössen

$$\text{(b)} \qquad v_1, \ldots, v_\lambda, \; s_1, \ldots, s_\mu, \; f_1(s_1), \ldots, f_\mu(s_\mu)$$

rational in der Form ausdrückbar sind

$$\text{(4)} \qquad \left| \begin{aligned} v_\sigma &= \varphi_\sigma(z_1, \ldots, z_n, f_{\alpha_{\varrho 1}, \alpha_{\varrho 2}, \ldots}, t_1), \\ s_\sigma &= \psi_\sigma(z_1, \ldots, z_n, f_{\alpha_{\varrho 1}, \alpha_{\varrho 2}, \ldots}, t_1), \\ f_\sigma(s_\sigma) &= \chi_\sigma(z_1, \ldots, z_n, f_{\alpha_{\varrho 1}, \alpha_{\varrho 2}, \ldots}, t_1), \end{aligned} \right.$$

so werden die durch (4) transformirten Ausdrücke (2) in das Gleichungssystem (1) eingesetzt eine algebraische Gleichung in t_1 liefern, deren Coefficienten rational aus den unabhängigen Variabeln und den Coefficienten des Differentialgleichungssystems zusammengesetzt sind, da die Abel'schen Integrale (a) vermöge der Annahme der Nichtexistenz einer algebraischen Beziehung zwischen denselben aus den erlangten Substitutionsrésultaten herausfallen müssen*). Da aber die Gleichung (3) als irreductibel mit Adjungirung der angegebenen Grössen vorausgesetzt wurde, so müssen bekanntlich die durch Substitution erhaltenen algebraischen Gleichungen in t_1 durch sämmtliche Lösungen

$$\text{(c)} \qquad t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$$

der Gleichung (3) befriedigt werden, und man erhält somit aus (2)

---

*) Man sieht hieraus zugleich, dass, wenn die Abel'schen Integrale um willkürliche Constanten additiv vermehrt werden, die so entstehenden rechten Seiten der Gleichungen (2) wiederum ein ähnliches particuläres Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen (1) liefern werden.

$\varkappa$ verschiedene Integralsysteme, wenn man hierin die aus (4) sich ergebenden Werthe substituirt, in denen t_1 der Reihe nach durch die $\varkappa$ Grössen (c) ersetzt wird.

Wir erhalten daher den folgenden Satz:

Besitzt das algebraische partielle Differentialgleichungssystem (1) *ein aus algebraischen Functionen und Abel'schen Integralen algebraischer Functionen algebraisch zusammengesetztes Integralsystem**), *so kann man aus demselben $\varkappa$ andere solcher Integralsysteme herleiten, indem man in die Ausdrücke* (2) *die aus* (4) *hervorgehenden Werthe substituirt, welche erhalten werden, wenn statt t_1 sämmtliche Lösungen der Gleichung* (3) *gesetzt werden, und t_1 die Lösung einer mit Adjungirung der unabhängigen Variabeln und der Coefficienten des partiellen Differentialgleichungssystems irreductibeln algebraischen Gleichung ist.*

Ist das Integralsystem (2) ein rein algebraisches, so braucht man offenbar nur $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{\nu 1}$ als rationale Functionen von t_1 auszudrücken und erhält durch Substitution von $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ die $\varkappa$ anderen algebraischen Integralsysteme.

Setzen wir nun voraus, das Differentialgleichungssystem (1) sei ein lineares, habe also die Form

$$(5)\quad \begin{cases} A_{11}u_1 + \cdots + A_{1\nu}u_\nu + B_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \cdots + B_{1\nu}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial z_1} + \cdots \\ \qquad\qquad + C_{11}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_n} + \cdots + C_{1\nu}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial z_n} = A_1, \\ A_{21}u_1 + \cdots + A_{2\nu}u_\nu + B_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \cdots + B_{2\nu}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial z_1} + \cdots \\ \qquad\qquad + C_{21}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_n} + \cdots + C_{2\nu}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial z_n} = A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{\nu 1}u_1 + \cdots + A_{\nu\nu}u_\nu + B_{\nu 1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} + \cdots + B_{\nu\nu}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial z_1} + \cdots \\ \qquad\qquad + C_{\nu 1}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_n} + \cdots + C_{\nu\nu}\dfrac{\partial u_\nu}{\partial z_n} = A_\nu, \end{cases}$$

worin die Grössen $A, B, \ldots, C$ irreductible algebraische Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ bedeuten, und nehmen an, es habe dieses Differential-

*) Es ist unmittelbar zu sehen, dass der Satz bestehen bleibt, wenn statt der Abel'schen Integrale allgemeiner solche Integrale gewöhnlicher algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung eintreten, zwischen denen wiederum die Existenz einer algebraischen Beziehung ausgeschlossen ist.

gleichungssystem ein algebraisches Integralsystem, so werden sich nach den obigen Auseinandersetzungen mit Hülfe einer algebraischen Gleichung

$$(6)\quad t^\varkappa + r_1(z_1,\ldots,z_n,A,B,\ldots C)t^{\varkappa-1} + \cdots + r_\varkappa(z_1,\ldots,z_n,A,B,\ldots,C) = 0,$$

in welcher $r_1,\ldots,r_\varkappa$ rationale Functionen der eingeschlossenen Grössen bedeuten und welche mit Adjungirung dieser Grössen irreductibel ist, $\varkappa$ algebraische Integralsysteme in der Form ergeben

$$(7)\quad \begin{cases} u_{1\alpha} = \Re_1(z_1,\ldots,z_n,A,B,\ldots,C,t_\alpha), \\ u_{2\alpha} = \Re_2(z_1,\ldots,z_n,A,B,\ldots,C,t_\alpha), \quad \text{für } \alpha = 1,2,\ldots,k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n\alpha} = \Re_n(z_1,\ldots,z_n,A,B,\ldots,C,t_\alpha), \end{cases}$$

worin $\Re_1,\ldots,\Re_n$ rationale Functionen bedeuten, und man sieht aus der Form von (5) unmittelbar, dass die Ausdrücke

$$(\mathrm{d})\quad U_1 = \frac{u_{11}+u_{12}+\cdots+u_{1\varkappa}}{\varkappa},\quad U_2 = \frac{u_{21}+u_{22}+\cdots+u_{2\varkappa}}{\varkappa},\ldots,$$
$$U_\nu = \frac{u_{\nu 1}+u_{\nu 2}+\cdots+u_{\nu\varkappa}}{\varkappa}$$

wiederum ein Integralsystem der Differentialgleichungen (5) bilden, die somit, da

$$(8)\quad U_\varrho = \frac{1}{\varkappa}\sum_1^\varkappa{}^\alpha\, \Re_\varrho(z_1,\ldots,z_n,A,B,\ldots,C,t_\alpha)$$

als rationale symmetrische Function der Lösungen der Gleichung (6) sich rational durch die Coefficienten derselben ausdrücken lässt, *ein in den Variablen $z_1,\ldots,z_n$ und den Coefficienten $A,B,\ldots,C$ des Differentialgleichungssystems rationales Integralsystem besitzen,* — und die Elemente desselben können nicht sämmtlich Null sein, wenn nicht $A_1 = A_2 = \cdots = A_\nu = 0$ ist, und können auch nur dann sämmtlich constant, also $U_1 = c_1$, $U_2 = c_2,\ldots,U_\nu = c_\nu$ sein, wenn

$$A_{11}c_1 + \cdots + A_{1\nu}c_\nu = A_1,\ldots,A_{\nu 1}c_1 + \cdots + A_{\nu\nu}c_\nu = A_\nu$$

ist, in welchem Falle jedoch die Substitutionen

$$u_1 - c_1 = v_1,\ u_2 - c_2 = v_2,\ldots,u_\nu - c_\nu = v_\nu$$

das System (5) wiederum auf ein homogenes lineares zurückführen würden.

Hat somit ein lineares nicht homogenes partielles Differentialgleichungssystem ein algebraisches Integralsystem, so besitzt dasselbe auch ein System von rational in den unabhängigen Variabeln und den Coefficienten der Differentialgleichungen ausdrückbaren Integralen.

Besteht das partielle Differentialgleichungssystem nur aus *einer* linearen homogenen Differentialgleichung

$$(9)\quad f_1(z_1,\ldots,z_n)\frac{\partial u}{\partial z_1}+f_2(z_1,\ldots,z_n)\frac{\partial u}{\partial z_2}+\cdots+f_n(z_1,\ldots,z_n)\frac{\partial u}{\partial z_n} + f(z_1,\ldots,z_n)u=0,$$

worin $f_1,\ldots,f_n, f$ irreductible algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln bedeuten, und habe dieselbe ein algebraisches Integral u_1, welches als die Lösung einer mit Adjungirung der Grössen $z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n$ und f irreductibeln algebraischen Gleichung

$$(10)\quad u^\varkappa + r_1(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n,f)u^{\varkappa-1}+\cdots \cdots + r_\varkappa(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f)=0$$

dargestellt werden mag, deren Coefficienten rationale Functionen der bezeichneten Grössen sind, so werden nach den eben bewiesenen Sätzen sämmtliche Lösungen $u_1, u_2,\ldots, u_\varkappa$ der Gleichung (10) algebraische Integrale der Differentialgleichung (9) darstellen, die somit auch das in den Variabeln und Coefficienten der Differentialgleichung rationale Integral

$$(11)\quad u=u_1+u_2+\cdots+u_\varkappa=-r_1(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f)$$

besitzt, welches jedoch identisch Null sein kann. Ist das letztere der Fall, und nehmen wir sogleich allgemein an, es sei

$$(12)\quad r_1(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f)=r_2(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f)=\cdots \cdots = r_{\delta-1}(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f)=0,$$

so wird bekanntlich die δ^{te} Potenzsumme der Lösungen der Gleichung (10) durch den Ausdruck bestimmt

$$(13)\quad u_1^\delta+u_2^\delta+\cdots+u_k=-\delta r_\delta(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f);$$

setzt man nun

$$(14)\quad v=u^\delta,\quad \text{also}\quad \frac{\partial v}{\partial z_\varrho}=\delta u^{\delta-1}\frac{\partial u}{\partial z_\varrho},$$

so geht die Differentialgleichung (9) in

$$(15)\quad f_1(z_1,\ldots,z_n)\frac{\partial v}{\partial z_1}+f_2(z_1,\ldots,z_n)\frac{\partial v}{\partial z_2}+\cdots+f_n(z_1,\ldots,z_n)\frac{\partial v}{\partial z_n} + \delta f(z_1,\ldots,z_n)v=0$$

über und besitzt die particulären Integrale $u_1^\delta, u_2^\delta,\ldots, u_\varkappa^\delta$, also *nach* (13) *das rationale Integral* $r_\delta(z_1,\ldots,z_n, f_1,\ldots,f_n, f)$; es ergiebt sich somit aus (14),

dass, wenn die partielle Differentialgleichung (9) *ein algebraisches Integral hat, dieselbe auch ein Integral besitzt,*

welches sich als eine ganzzahlige Wurzel aus einer in den Variabeln und den Coefficienten der Differentialgleichung rationalen Function darstellen lässt,

und, wie unmittelbar zu sehen für den Fall, dass $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$ ist,

dass, wenn die partielle Differentialgleichung

$$f_1(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial u}{\partial z_1} + f_2(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial u}{\partial z_2} + \cdots \\ \cdots + f_n(z_1, \ldots, z_n) \frac{\partial u}{\partial z_n} = 0 \tag{16}$$

ein algebraisches Integral hat, dieselbe auch ein in den Variabeln und den Coefficienten der Differentialgleichung rationales Integral besitzt.

Es mag hervorgehoben werden, dass es bei der Herleitung dieser Sätze, welche die bekannten Abel'schen Sätze von den Quadraturen algebraischer Functionen als specielle Fälle einschliessen, sowie bei den sich daran schliessenden, in Kurzem erscheinenden Untersuchungen über die Irreducibilität algebraischer partieller Differentialgleichungssysteme wesentlich darauf ankommt, dieselben unabhängig von der Darstellung der allgemeinen Integrale der partiellen Differentialgleichungssysteme durchzuführen.

Schliesslich soll noch der oben bewiesene Satz für die Herleitung einer Eigenschaft totaler algebraischer Differentialgleichungssysteme verwerthet werden.

Wenn

$$u_1 = \omega(z_1, z_2, \ldots, z_n) \tag{17}$$

ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{\partial u}{\partial z_1} + f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{\partial u}{\partial z_2} + \cdots \\ \cdots + f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{\partial u}{\partial z_n} = 0 \tag{18}$$

ist, so wird die Gleichung

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{\partial \omega}{\partial z_1} + \cdots + f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) \frac{\partial \omega}{\partial z_n} = 0 \tag{19}$$

identisch befriedigt; geht man jedoch andererseits von dem totalen algebraischen Differentialgleichungssystem

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{f_2(z_1, \ldots, z_n)}{f_1(z_1, \ldots, z_n)}, \quad \frac{dz_3}{dz_1} = \frac{f_3(z_1, \ldots, z_n)}{f_1(z_1, \ldots, z_n)}, \ldots, \frac{dz_n}{dz_1} = \frac{f_n(z_1, \ldots, z_n)}{f_1(z_1, \ldots, z_n)} \tag{20}$$

aus, so wird bekanntlich $\omega(z_1, \ldots, z_n) = \alpha$ eine Integralgleichung und $\omega(z_1, \ldots, z_n)$ selbst eine Integralfunction des totalen Differentialgleichungssystems (20) genannt, wenn die Gleichung (19) identisch erfüllt wird, und es ist somit jedes Integral der partiellen Differential-

gleichung (18) eine Integralfunction des totalen Differentialgleichungssystems (20). Da nun unter der Voraussetzung eines algebraischen Integrales der Differentialgleichung (18) auf die Existenz eines in den Variabeln und Coefficienten dieser Gleichung rationales Integral geschlossen werden durfte, so erhalten wir den folgenden Satz:

Besitzt ein algebraisches totales Differentialgleichungssystem eine algebraische Integralfunction, so hat dasselbe auch stets eine solche in den Variabeln und Coefficienten der Differentialgleichungen rational ausdrückbare.

Da nun, wie leicht zu sehen, auch die höheren Potenzsummen als die δ^{te}, also sämmtliche Coefficienten

$$r_\delta(z_1,\ldots,z_n,f_1,\ldots,f_n),\ r_{\delta+1}(z_1,\ldots,z_n,f_1,\ldots,f_n),\ldots,r_\varkappa(z_1,\ldots,z_n,f_1,\ldots,f_n)$$

der Gleichung (10) Integrale der partiellen Differentialgleichung (16), also Integralfunctionen des totalen Differentialgleichungssystems (20) sind, so folgt der Satz,

dass, wenn ein algebraisches totales Differentialgleichungssystem eine algebraische Integralfunction besitzt, diese entweder selbst in den Variabeln und den Coefficienten der Differentialgleichungen rational ausdrückbar oder als algebraische Function von derartig beschaffenen Integralfunctionen darstellbar ist, dass aber jedenfalls auch andere in den angegebenen Grössen rational ausdrückbare Integralfunctionen existiren,

und *es gilt somit auch für die partielle Differentialgleichung* (18) *derselbe Satz für ein algebraisches Integral derselben.*

Aehnliche Sätze gelten, wie aus früher*) von mir dargelegten Gründen ersichtlich ist, für solche Integrale der partiellen Differentialgleichung (18), welche aus den Variabeln, Logarithmen von algebraischen Functionen dieser Variabeln und Abel'schen Integralen mit ebensolchen algebraischen Argumenten und dazugehörigen algebraischen Irrationalitäten algebraisch zusammengesetzt sind, und so ergiebt sich der allgemeine Satz:

Wenn eine lineare homogene algebraische partielle Differentialgleichung oder ein algebraisches totales Differentialgleichungssystem ein aus den unabhängigen Variabeln, Logarithmen von algebraischen Functionen $v_1, v_2, \ldots$ dieser Variabeln und Abel'schen Integralen mit ebensolchen algebraischen Argumenten $s_1, s_2, \ldots$ und dazu gehörigen algebraischen Irrationalitäten $f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots$ algebraisch zusammengesetztes Integral resp. Integralfunction besitzt, wobei angenom-

*) Vergl. das vierte Capitel meines Lehrbuches der Theorie der Differentialgleichungen.

men werden darf, dass zwischen den Variabeln, Logarithmen und Abel'schen Integralen eine algebraische Beziehung nicht besteht, so ist jenes Integral resp. jene Integralfunction entweder selbst eine rationale Function der Variabeln, der Coefficienten der partiellen Differentialgleichung resp. des totalen Differentialgleichungssystems, der algebraischen Functionen $v_1, v_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots, f_1(s_1), f_2(s_2), \ldots$, *der Logarithmen und Abel'schen Integrale oder als algebraische Function von derartig beschaffenen Integralen resp. Integralfunctionen darstellbar, jedenfalls existiren aber andere in den angegebenen Grössen rational ausdrückbare Integrale resp. Integralfunctionen.*

Heidelberg, den 30. Juni 1891.

Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen.

Von

Georg Scheffers in Leipzig.

Vorbemerkungen.

In zwei früheren Abhandlungen*) beschäftigte ich mich schon mit der Theorie der complexen Zahlensysteme. Seither ist es mir gelungen, eine Anzahl interessanter neuer Sätze über diese Systeme aufzufinden und zu beweisen. Es erschien mir daher angemessen, meine bisherigen Untersuchungen in dieser Richtung im Zusammenhang darzulegen. Die vorliegende Abhandlung ist somit eine Umarbeitung, Vervollständigung und in manchen Punkten eine Berichtigung meiner früheren Schriften.

So gelingt es im Zusammenhang mit der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen, die allgemeine Theorie der Zahlensysteme weiter auszubauen. Der Begriff der endlichen continuirlichen Transformationsgruppe umfasst den des Zahlensystems und daher fliessen aus den viel allgemeineren Sätzen der Gruppentheorie ohne weiteres eine Reihe wichtiger Folgerungen in betreff der Zahlensysteme.

In dieser Arbeit verwerthe ich insbesondere eine wichtige von Lie herrührende Scheidung aller Gruppen in zwei Categorien, in die integrabelen und nicht-integrabelen, für die Zahlentheorie. Diese für die Integrationsprobleme der vollständigen Systeme grundlegende Scheidung gewinnt auch für die Zahlensysteme deshalb besondere Bedeutung, weil die sogenannten nicht-integrabelen Gruppen nach einer Bemerkung von Engel noch anders definirt werden können. Der Engel'sche Satz, der m. W. in der Gruppentheorie bisher noch keine eigentliche Verwerthung gefunden hat, erweist sich gerade für die

*) „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen", Ber. d. Gesell. d. Wiss. zu Leipzig, 1889, S. 290—307, „Ueber die Berechnung von Zahlensystemen", ebenda S. 400—457.

Zahlensysteme von Wichtigkeit. Diese Uebertragung einer Classification der Gruppentheorie, durch welche alle Zahlensysteme in die Quaternion- und Nichtquaternionsysteme eingetheilt werden, zu deren ersteren insbesondere die Hamilton'schen Quaternionen gehören, verlangt natürlich die Benutzung mehrerer Begriffe der Theorie der Transformationsgruppen, die in § 2 dieser Abhandlung in der angegebenen Weise verwerthet werden, nachdem im ersten Paragraphen die Grunddefinitionen über Zahlensysteme sowie einige Sätze aufgestellt worden sind.

Von § 3 an beginnt die Untersuchung der Nichtquaternionsysteme. Es gelingt, dieselben in § 5 auf gewisse, freilich noch nicht definitive aber doch äusserst nützliche Formen zurückzuführen, die alsdann in §§ 6, 7 gestatten, mehrere zum Theil neue Sätze über diese Systeme auszusprechen. Danach macht *die Berechnung aller Nichtquaternionsysteme bis zu* 5 *Einheiten* in § 8 nur noch geringe Schwierigkeiten. Namentlich lassen sich die Nichtquaternionsysteme in 2, 3, 4 Einheiten fast ohne jede Rechnung sofort hinschreiben. In § 9 findet sich eine *Zusammenstellung aller nicht zerfallenden Zahlensysteme überhaupt in* 2, 3, 4, 5 *Einheiten.*

Von § 10 an handelt es sich um die Berechnung der Quaternionsysteme. Für gewisse derartige Systeme ergiebt sich ein durch seine Einfachheit überraschender Satz (2) in § 11. In § 12 werden *alle irreducibelen Quaternionsysteme in* 4, 5, 6, 7, 8 *Einheiten* wirklich berechnet, während § 13 noch einige allgemeine Sätze über gewisse Quaternionsysteme bringt.

In § 14 wird ein *kurzer historischer Ueberblick* über die Theorie der Zahlensysteme gegeben.

Der Hauptunterschied der jetzigen gegenüber meiner früheren Bearbeitung ruht in der besonders eingehenden Betrachtung der *Nichtquaternionsysteme*, die den sogenannten integrabelen Gruppen der Transformationstheorie entsprechen. Zum besonderen Nutzen gereichte der jetzigen Behandlungsweise die Verwerthung des Begriffes der *Reducibilität* eines Zahlensystems, auf dessen Wichtigkeit ich von Herrn Study besonders aufmerksam gemacht wurde. Ueberhaupt sind die von Herrn Study selbst herrührenden Abhandlungen*) über dasselbe Thema sowie briefliche Unterhaltungen mit ihm darüber für die Ziele dieser Abhandlung von bedeutendem Einfluss gewesen.

---

*) „Ueber Systeme von complexen Zahlen", Göttinger Nachr. 1889, S. 237—268. „Complexe Zahlen und Transformationsgruppen", Ber. d. Gesell. d. Wiss. zu Leipzig,

§ 1.

Begriff eines complexen Zahlensystems.

Wie man dem Principe der Permanenz der formalen Gesetze folgend nach und nach zu den negativen, gebrochenen, irrationalen und schliesslich zu den imaginären Zahlen gelangen kann, ist bekannt*). Um nun zu den allgemeinen Zahlen zu gelangen, um die es sich hier handelt, nimmt man anstatt der beiden Einheiten 1 und $i = \sqrt{-1}$ eine Anzahl von Einheiten an, die man etwa mit $e_1, e_2 \dots e_n$ bezeichnet, und bildet aus ihnen linear die allgemeine complexe Zahl

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

in der $x_1, x_2 \dots x_n$ Zahlen bedeuten, die den Regeln der elementaren Arithmetik folgen, also gewöhnlich complexe Zahlen. Was die Einheiten $e_1, e_2 \dots e_n$ an sich vorstellen, ist für unseren Calcul völlig gleichgültig; sie haben nur formale Bedeutung, und die Zahl x hätte auch, unter Verzicht auf die Einführung dieser Einheiten und die durch dieselben ermöglichte Schreibweise, einfach als der Inbegriff, der Complex von n beliebigen gewöhnlichen Zahlen $x_1, x_2 \dots x_n$ definirt werden können.

Addition wie Subtraction

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1)e_1 + (x_2 \pm y_2)e_2 + \cdots + (x_n \pm y_n)e_n,$$

wenn

$$x = \sum x_i e_i, \quad y = \sum y_i e_i$$

ist, folgen den gewöhnlichen Regeln, dem commutativen und dem associativen Gesetz: $a + b = b + a$, $(a+b) + c = a + (b+c)$ u. s. w. Um zu einer Productdefinition zu gelangen, nehmen wir die fortdauernde Gültigkeit des distributiven Gesetzes: $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$ an und haben demnach zunächst:

$$xy = \sum^i \sum^k x_i y_k e_i e_k.$$

Gewünscht wird nun, dass das Product sich wieder als eine allgemeine complexe Zahl der hier betrachteten Art darstelle, also eine lineare Function der Einheiten $e_1, e_2 \dots e_n$ werde. Dazu ist nothwendig

---

1889, S. 177—228. „Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen", Monatshefte für Math. u. Phys., I. Jahrg. (1890), Heft 8—10. „Recurrirende Reihen und bilineare Formen", ebenda, II. Jahrg. (1891), Heft 1. Diese vier Abhandlungen werde ich später mit Nummern I, II, III, IV citiren, also: Study I u. s. w.

*) Man sehe z. B. Hankel, „Vorlesungen über complexe Zahlen, I. Theil: Theorie der complexen Zahlensysteme", 1867, S. 10 ff.

und hinreichend, dass die Producte $e_i e_k$ selber diese Forderung erfüllen, also allgemein die Form haben:

$$(1) \qquad e_i e_k = \sum^s \gamma_{iks} e_s,$$

wo die γ_{iks} zunächst ganz beliebig, aber bestimmt zu wählende gewöhnlich complexe Zahlen bedeuten. Alsdann wird das Product

$$xy = \sum^s \sum^i \sum^k \gamma_{iks} x_i y_k e_s.$$

Man kann nun noch fordern, dass die so definirte Multiplication auch dem commutativen und dem associativen Gesetze genüge: $ab = ba$ und $(ab)c = a(bc)$. Aber wir wollen den neuen Zahlenbegriff nicht so eng einschränken, sondern nur das Fortbestehen des associativen Gesetzes verlangen*). Bildet man dementsprechend das Product $(xy)z$ und ferner $x(yz)$ aus den drei allgemeinen complexen Zahlen x, y, z und vergleicht beide miteinander, so findet man, da die $e_1, e_2 \dots e_n$ in beiden gleiche Coefficienten haben sollen, dass die γ_{iks} den folgenden Bedingungen unterworfen werden müssen:

$$(2) \qquad \sum^s \gamma_{iks} \gamma_{slt} = \sum^s \gamma_{kls} \gamma_{ist}$$

$$(i, k, l, t = 1, 2 \dots n).$$

Hat man die Constanten γ_{iks} im Einklang mit diesen Forderungen, sonst aber beliebig gewählt, so ist das associative Gesetz der Multiplication der neuen Zahlen erfüllt.

Wir machen noch eine Einschränkung: Im Gebiete der gewöhnlichen Zahlen existirt eine Zahl, die Eins, die, mit einer beliebigen Zahl multiplicirt, dieselbe nicht ändert. Analog setzen wir fest, dass es eine Zahl

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n$$

geben soll von der Beschaffenheit, dass jedes $x\varepsilon = \varepsilon x = x$ sei. Diese Zahl ε heisst der *Modul*. Diese Forderung deckt sich mit einer anderen**): Ist nämlich eine solche Zahl vorhanden und ist x eine allgemeine complexe Zahl $\sum x_i e_i$, so ist dann:

$$x\varepsilon = \sum^s \sum^i \sum^k \gamma_{iks} x_i \varepsilon_k e_s = \sum^s x_s e_s,$$

d. h.

*) In der That ist das associative Gesetz, das eine Verknüpfung zwischen *drei* Elementen herstellt, namentlich wegen seiner Verwandtschaft mit dem allgemeinen Gruppengesetz das weitaus wichtigere.

**) Es folgt dies aus einem Satz in Lie's „Theorie der Transformationsgruppen", Abschnitt I, 1888, S. 21, unmittelbar. Vgl. auch Study II, S. 239 sowie meine erste Abhandlung, S. 293. Study bezeichnet den Modul als die Zahl Eins des Systems.

$$\sum^i \sum^k \gamma_{iks} x_i \varepsilon_k = x_s$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Dies sind n in $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ lineare Gleichungen im Gebiete der gewöhnlichen Zahlen. Ihre Determinante

$$\Delta_x \equiv \left| \begin{matrix} \sum^i \gamma_{iks} x_i \\ k, s = 1, 2 \ldots n \end{matrix} \right|$$

ist daher nothwendig nicht identisch Null. Ebenso folgt aus $\varepsilon x = x$, dass die Determinante

$$\Delta'_x \equiv \left| \begin{matrix} \sum^k \gamma_{iks} x_k \\ i, s = 1, 2 \ldots n \end{matrix} \right|$$

nicht identisch verschwindet. Wenn umgekehrt diese beiden Determinanten nicht identisch Null sind, so existirt auch ein Modul ε. Auf den Beweis hierfür gehe ich nicht ein.

Die Gesammtheit der Zahlen, die wir aus $e_1, e_2 \ldots e_n$ in der Form $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ ableiten können und deren Multiplication in obiger Weise definirt ist dadurch, dass man die Constanten γ_{iks} gemäss den Bedingungen (2) und

$$(3) \qquad \Delta_x \mathrel{\equiv\!\!\!\!|}\; 0, \quad \Delta'_x \mathrel{\equiv\!\!\!\!|}\; 0$$

in bestimmter Weise auswählt, heisst nun kurz ein *complexes Zahlensystem* $(e_1, e_2 \ldots e_n)$. Um das System zu charakterisiren, muss man also die Zahl n und die γ_{iks} kennen. Am bequemsten schreibt man das System in Form einer n-reihigen *Tafel:*

	e_1	e_2	e_3	
e_1	$\sum^s \gamma_{11s} e_s$	$\sum^s \gamma_{21s} e_s$	$\sum^s \gamma_{31s} e_s$	$\cdots$
e_2	$\sum^s \gamma_{12s} e_s$	.	.	...
.	.	.	.	...
.	.	.	.	...
.	.	.	.	...

sodass das Product $e_i e_k$ im Schnitt der i^{ten} Reihe mit der k^{ten} Zeile zu stehen kommt. Z. B. bedeutet

	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

das Zahlensystem in zwei Einheiten e_1, e_2, in welchem $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ ist, sodass die allgemeine Productregel desselben lautet:

$$xy = x_1 y_1 e_1 + x_2 y_2 e_2.$$

Die *Determinanten* Δ_x *und* Δ_x' *des Systems* lassen sich übrigens auch leicht aus der Tafel ablesen. In dem angegebenen Beispiel sind sie einander gleich

$$\Delta_x \equiv \Delta_x' \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix} \equiv x_1 x_2.$$

In der Tafel des Systems werde ich die Ränder oben und links als überflüssig meist weglassen und sie nur dann mitschreiben, wenn sonst Missverständnisse möglich wären.

Die Tafel kann ihr Aussehen erheblich dadurch ändern, dass man statt $e_1, e_2 \ldots e_n$ lineare Ausdrücke derselben mit nicht verschwindender Determinante, kurz n „linear unabhängige" Zahlen des Systems als neue Einheiten benutzt, also alle Zahlen des Systems als lineare Functionen dieser ausdrückt. Aber die dadurch erhaltenen Formen des Systems wird man nicht als wesentlich neu bezeichnen; vielmehr wird man alle Systeme, deren Tafeln durch Einführung linearer Functionen der Einheiten als neuer Einheiten einander gleich gemacht werden können, als zum selben *Typus* gehörig betrachten. Unsere Aufgabe ist es später, durch Einführung neuer Einheiten die Tafeln auf möglichst einfache Formen zu bringen.

Jede Productbildung in unserem Systeme $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ lässt sich als eine *lineare Transformation* in einem Raume n^{ter} Stufe auffassen. Multipliciren wir nämlich

$$x = \sum x_i e_i \quad \text{mit} \quad y = \sum y_k e_k,$$

so kommt eine Zahl

$$x' = \sum x_s' e_s,$$

für die:

$$x_s' = \sum^i \sum^k \gamma_{iks} x_i y_k \tag{4}$$

$$(s = 1, 2 \ldots n)$$

ist, und diese n Gleichungen stellen eine lineare homogene Transformation von $x_1, x_2 \ldots x_n$ in $x_1', x_2' \ldots x_n'$ dar. $y_1, y_2 \ldots y_n$ spielen dabei die Rolle von blossen Parametern. Versteht man unter $x_1, x_2 \ldots x_n$ homogene Punktcoordinaten in einem Raume n^{ter} Stufe, so kann x als ein Punkt $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ desselben gedeutet werden, ebenso wie x'. Die Gleichung

$$x' = xy$$

ist alsdann der kürzeste analytische Ausdruck für die durch (4) dar-

gestellte lineare Transformation der Punkte x dieses Raumes. Zu jedem Parametersystem $y_1, y_2 \ldots y_n$ oder Punkt y gehört eine solche Transformation. Führt man zwei Transformationen nach einander aus, indem man einmal mit y, das Ergebnis mit z multiplicirt:

$$x' = xy, \quad x'' = x'z,$$

so kommt nach dem associativen Gesetz:

$$x'' = xy \,.\, z = x \,.\, yz,$$

d. h. die successive Ausführung der zu y und zu z gehörigen Transformationen ist äquivalent mit der directen Ausführung der zum Punkt yz gehörigen Transformation. Die durch (4) dargestellte Schaar von ∞^n Transformationen — es sind wegen $\Delta_x \neq 0$ gerade ∞^n — ist demnach eine Gruppe und zwar, wie aus den letzten Formeln folgt, eine sogenannte *Parametergruppe* nach der Lie'schen Terminologie.*)

Ich werde auf die weiteren Beziehungen zur Gruppentheorie nicht eingehen, indem ich auf das grosse Lie'sche Werk**) sowie auf die diesbezüglichen Abhandlungen von Study***) und Schur†) verweise. Am eingehendsten hat Study diesen Zusammenhang untersucht.

Man kann in einem Producte auch den ersten Factor als constant annehmen, also die linearen Transformationen

$$x' = yx$$

betrachten, die auch eine Parametergruppe bilden und zwar die zur obigen *reciproke*. Ferner stellt $\Delta_x = 0$ die grösste bei der ersten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit dar. Sie ist identisch mit der durch $\Delta_x' = 0$ dargestellten grössten bei der zweiten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeit, woraus aber nicht geschlossen werden darf, dass Δ_x stets mit Δ_x' identisch wäre.

Poincaré††) bemerkte zuerst, dass jedem Zahlensystem eine lineare Gruppe entspricht, deren Parameter linear auftreten. Verbindet man hiermit jene von Lie und Engel herrührenden Sätze aus der Theorie der Transformationsgruppen, so erkennt man, dass jedem System complexer Zahlen *zwei einfach transitive reciproke projective Gruppen* zugehören. Der *Beweis der wichtigen Umkehrung*, dass auch jedem Paar einfach transitiver reciproker projectiver Gruppen ein Zahlensystem entspricht, wurde aber erst von Study†††) erbracht. Damit war der Zusammenhang mit der Gruppentheorie völlig hergestellt.

*) Vgl. Lie, a. a. O. Cap. 21, S. 401 ff.

**) Die oben citirte, unter Mitwirkung Engels herausgegebene Theorie der Transformationsgruppen.

***) Die schon angegebenen Abhandlungen, namentlich II und III.

†) „Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen", Math. Annalen Bd. XXXIII (1888), S. 49—60.

††) „Sur les nombres complexes", C. R. XCIX (1884), S. 740—742.

†††) Study II, S. 202, III, S. 332.

Ich werde von diesem wichtigen Zusammenhang, der es, wie schon bemerkt wurde, ermöglicht, ohne weiteres eine Reihe Lie'scher Sätze auf die Zahlensysteme zu übertragen, nur insofern Gebrauch machen, als zu jedem Zahlensystem ein paar reciproker einfach transitiver projectiver Gruppen gehört. Die wenn auch sehr bedeutsame Umkehrung des Zusammenhanges wird also *nicht* in der vorliegenden Abhandlung benutzt.

Die Transformation $x' = xy$ ist *infinitesimal*, wenn y nur unendlich wenig vom Modul ε abweicht:

$$y = \varepsilon + u\tau,$$

wo u eine Zahl des Systems, τ eine infinitesimale gewöhnliche Zahl vorstellt. Dann ist nämlich nach dem distributiven Gesetz:

$$x' = x(\varepsilon + u\tau) = x + xu \cdot \tau.$$

Sei Uf das Symbol der infinitesimalen Transformation im Lie'schen Sinne, ebenso Vf das der infinitesimalen Transformation, welche zu $y = \varepsilon + v\tau$ gehört. Alsdann ist leicht zu sehen, dass die infinitesimale Transformation, die zu $y = \varepsilon + (uv - vu)\tau$ gehört, zum Symbol den Klammerausdruck $(UV) \equiv U(Vf) - V(Uf)$ besitzt. Sind nämlich S und T die substitutionstheoretischen Symbole von Uf und Vf, so ist nach Lie $T^{-1}ST$ die infinitesimale Transformation $Uf + \tau(UV)$. Aber es ist T^{-1} die zu $y = \varepsilon - v\tau + v^2\tau^2 + \cdots$ gehörige infinitesimale Transformation, weil bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung $(\varepsilon + v\tau)(\varepsilon - v\tau + v^2\tau^2 + \cdots) = \varepsilon$ ist. Demnach ist $Uf + \tau(UV)$ die infinitesimale Transformation

$$x' = x(\varepsilon - v\tau + v^2\tau^2 + \cdots)(\varepsilon + u\tau)(\varepsilon + v\tau)$$

oder ausgerechnet bis auf Unendlichkleines zweiter Ordnung:

$$x' = x[\varepsilon + u\tau + (uv - vu)\tau^2 + \cdots].$$

und daher ist (UV) in der That die infinitesimale Transformation

$$x' = x\big(\varepsilon + (uv - vu)\tau\big) \cdot$$

Hiervon werden wir im nächsten Paragraphen Gebrauch machen.

Schliesslich mache ich noch einige Bemerkungen, die später gelegentlich benutzt werden sollen:

Die Determinanten Δ_x und Δ'_x haben die Eigenschaft, dass sie, für das Product xy gebildet, gleich den Producten aus den für x und y einzeln gebildeten Determinanten sind:

$$(5) \qquad \Delta_x \Delta_y \equiv \Delta_{xy}, \qquad \Delta'_x \Delta'_y \equiv \Delta'_{xy}.$$

Man beweist dies leicht durch Benutzung des Multiplicationstheorems der Determinanten und der Bedingungen (2).

Die Zahlen x, für welche $\Delta_x = 0$ oder, was nach dem Früheren dasselbe ist, $\Delta'_x = 0$ ist, nenne ich mit Weierstrass Theiler der Null.

Sie haben die Eigenschaft, dass es im Systeme nicht verschwindende Zahlen giebt, mit denen multiplicirt sie Null ergeben, denn der Forderung

$$xy = 0$$

kann, sobald $\Delta_x = 0$ ist, durch unendlich viele Zahlen genügt werden. Die zur Multiplication

$$xy = z$$

inverse Operation, die Division, d. h. die Berechnung von x bei gegebenem y und z oder von y bei gegebenem x und z — es giebt also zwei Arten der Division — ist, sobald y oder x Theiler der Null ist, unmöglich, wenn nicht $z = 0$ ist. Aus (5) folgt unmittelbar, dass ein Product von Zahlen des Systems dann und nur dann Theiler der Null ist, wenn irgend einer der Factoren Theiler der Null ist. Ist $xy = 0$ und weder x noch y selbst Null, so sind x und y beide Theiler der Null.

Bedeutet x eine beliebige Zahl des Systems, so wollen wir uns die Potenzen $x \cdot x = x^2$, $x \cdot x \cdot x = x^3$ u. s. w. berechnet denken, denen wir als nullte Potenz x^0 den Modul ε zugesellen. Sei etwa:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e + \cdots + \varepsilon_n e_n,\\
x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,\\
x^2 &= x_{21} e_1 + x_{22} e_2 + \cdots + x_{2n} e_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^m &= x_{m1} e_1 + x_{m2} e_2 + \cdots + x_{mn} e_n,
\end{aligned}$$

so sind hier $x_{m1}, x_{m2} \ldots x_{mn}$ gewisse homogene Functionen m^{ten} Grades von $x_1, x_2 \ldots x_n$. Die n Zahlen $\varepsilon, x, x^2 \ldots x^{n-1}$ sind nun entweder linear unabhängig, d. h. es ist ihre Determinante $\sum \pm \varepsilon_1 x_2 x_{23} \ldots x_{n-1,n} \equiv\!|\!\equiv 0$, oder x^{n-1} und eventuell schon frühere Potenzen drücken sich linear durch die niederen aus. Allgemein ist also etwa

(6) $$x^k = \varphi_1 x^{k-1} + \varphi_2 x^{k-2} + \cdots + \varphi_{k-1} x + \varphi_k \varepsilon,$$

worin $\varphi_k \equiv\!|\!\equiv 0$ ist (da sonst durch Division mit x eine noch niedere Gleichung hervorginge). Die $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1}, \varphi_k$ bedeuten hierin natürlich gewisse Functionen der Coefficienten $x_1, x_2 \ldots x_n$ im Gebiete der gewöhnlich complexen Zahlen. Diese niedrigste Gleichung für die Potenzen einer Zahl x heisst die *charakteristische Gleichung des Systems* $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ und ihr Grad k kurz der *Grad des Systems.* k liegt, sobald $n > 1$ ist, zwischen 2 und n und kann, wie wir sehen werden, beide Grenzen erreichen. Bildet man die Gleichung

(7) $$u^k = \varphi_1 u^{k-1} + \varphi_2 u^{k-2} + \cdots + \varphi_{k-1} u + \varphi_k,$$

so kann man sich ihre k gewöhnlich complexen Wurzeln $u_1, u_2 \ldots u_k$ als Functionen von $\varphi_1 \ldots \varphi_k$ berechnet denken und hat dann:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \varphi_1,$$
$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + \cdots + u_{k-1} u_k = -\varphi_2$$

u. s. w. Deshalb kann die charakteristische Gleichung auch so geschrieben werden:

$$(6') \qquad (x - u_1 \varepsilon)(x - u_2 \varepsilon) \ldots (x - u_k \varepsilon) = 0,$$

woraus man aber nicht schliessen darf, dass x entweder $u_1 \varepsilon$ oder $u_2 \varepsilon$ u. s. w. sein muss. Es giebt ja, wie bemerkt, im Systeme nicht verschwindende Zahlen, deren Product Null ist.

Beachtenswerth ist, dass alle k Zahlen $x - u_i \varepsilon$ bei der Multiplication unter einander das commutative Gesetz befolgen. Es ist nämlich:

$$(x - u_i \varepsilon)(x - u_j \varepsilon) = x^2 - u_i x - u_j x + u_i u_j \varepsilon$$

und derselbe Werth ergiebt sich für $(x - u_j \varepsilon)(x - u_i \varepsilon)$. Hieraus und aus einer früheren Bemerkung folgt, dass $x - u_1 \varepsilon, x - u_2 \varepsilon, \ldots x - u_k \varepsilon$ sämmtlich Theiler der Null sind, da ihr Product verschwindet. Die Bildpunkte dieser k Theiler der Null liegen sämmtlich auf dem Strahl vom Punkt ε nach dem Punkt x und variiren natürlich mit x, indem $u_1, u_2 \ldots u_k$ gewöhnlich complexe Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ bedeuten.

Sei nun w irgend ein Theiler der Null, der auf diesem Strahle liegt, während $x - u_1 \varepsilon$, $x - u_2 \varepsilon \ldots x - u_k \varepsilon$ mit $v_1, v_2 \ldots v_k$ bezeichnet seien, sodass

$$v_1 v_2 \ldots v_k = 0$$

ist. Bekanntlich existiren stets nicht verschwindende Zahlen y im System derart, dass $yw = 0$ ist. Nun sind aber $v_1, v_2 \ldots v_k$ durch w und ε ausdrückbar, da sie auf dem Strahl von w nach ε liegen. Sei also:

$$v_1 = \lambda_1 w + \mu_1 \varepsilon, \; v_2 = \lambda_2 w + \mu_2 \varepsilon, \ldots v_k = \lambda_k w + \mu_k \varepsilon,$$

wo die λ und μ gewöhnlich complexe Grössen bedeuten. Es ist alsdann

$$0 = v_1 v_2 \ldots v_k = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k w^k + \cdots + \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k \varepsilon,$$

wo die nicht geschriebenen Glieder niedere Potenzen von w zu Factoren haben. Multipliciren wir diese Gleichung mit einem y, für welches $yw = 0$ ist, so kommt, da $yw^j = yw \cdot w^{j-1} = 0$ wird:

$$0 = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k \cdot y,$$

d. h. $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k = 0$. Eines der μ ist somit Null, etwa μ_i, daher $v_i = \lambda_i w$; der Bildpunkt von w fällt folglich mit einem der Punkte $v_1, v_2 \ldots v_k$ zusammen.

In der charakteristischen Gleichung

$$(6') \qquad (x - u_1 \varepsilon)(x - u_2 \varepsilon) \ldots (x - u_k \varepsilon) = 0$$

treten also links sämmtliche Theiler der Null als Factoren auf, welche auf dem Strahl von x nach ε gelegen sind.

Für einen Theiler der Null sind die Determinanten Δ und Δ' beide Null. Es genügt aber, dass eine derselben verschwindet. Weil nun $x - u\varepsilon$ die Coefficienten $x_1 - u\varepsilon_1, \ldots x_n - u\varepsilon_n$ besitzt, so ergeben sich alle Theiler der Null von der Form $x - u\varepsilon$ aus der Bedingungsgleichung:

$$\Delta_{x-u\varepsilon} \equiv \begin{vmatrix} \sum^i \gamma_{i11}(x_i - u\varepsilon_i) & \sum^i \gamma_{i21}(x_i - u\varepsilon_i) \ldots & \sum^i \gamma_{in1}(x_i - u\varepsilon_i) \\ \sum^i \gamma_{i12}(x_i - u\varepsilon_i) & \sum^i \gamma_{i22}(x_i - u\varepsilon_i) \ldots & \sum^i \gamma_{in2}(x_i - u\varepsilon_i) \\ \cdot & \cdot \quad \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \ldots & \cdot \\ \sum^i \gamma_{i1n}(x_i - u\varepsilon_i) & \sum^i \gamma_{i2n}(x_i - u\varepsilon_i) \ldots & \sum^i \gamma_{inn}(x_i - u\varepsilon_i) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe lässt sich einfacher schreiben. Da nämlich stets $\varepsilon x = x$ ist, so ist auch

$$\sum^i \sum^k \gamma_{iks}\varepsilon_i x_k = x_s,$$

d. h.

$$\sum^i \gamma_{iks}\,\varepsilon_i = \begin{cases} 1 \text{ für } k = s, \\ 0 \text{ für } k \neq s. \end{cases}$$

Unsere Gleichung geht demnach in diese über:

$$(8) \quad \Delta_{x-u\varepsilon} \equiv \begin{vmatrix} \sum^i \gamma_{i11}x_i - u & \sum^i \gamma_{i21}x_i & \cdots \sum^i \gamma_{in1}x_i \\ \sum^i \gamma_{i12}x_i & \sum^i \gamma_{i22}x_i - u & \cdots \sum^i \gamma_{in2}x_i \\ \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ \sum^i \gamma_{i1n}x_i & \sum^i \gamma_{i2n}x_i & \cdots \sum^i \gamma_{inn}x_i - u \end{vmatrix} = 0.$$

Mithin sind die k Zahlen $u_1, u_2 \ldots u_k$, die in der charakteristischen Gleichung auftreten, *alle* Wurzeln dieser Gleichung n^{ten} Grades für u. Analog sind die $u_1 \ldots u_k$ auch die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung:

$$(9) \quad \Delta'_{x-u\varepsilon} \equiv \begin{vmatrix} \sum^k \gamma_{1k1}x_k - u & \sum^k \gamma_{2k1}x_k & \cdots \sum^k \gamma_{nk1}x_k \\ \sum^k \gamma_{1k2}x_k & \sum^k \gamma_{2k2}x_k - u & \cdots \sum^k \gamma_{nk2}x_k \\ \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots \quad \cdot \\ \sum^k \gamma_{1kn}x_k & \sum^k \gamma_{2kn}x_k & \cdots \sum^k \gamma_{nkn}x_k - u \end{vmatrix} = 0.$$

Durch diesen Zusammenhang zwischen der charakteristischen Gleichung und den Determinanten Δ und Δ', der m. W. bisher noch nicht

verwerthet worden ist, wird die Berechnung der charakteristischen Gleichung eines vorgelegten Systems erheblich erleichtert.

Man kann übrigens noch Folgendes zeigen: Ist u_i eine λ-fache Wurzel der Gleichung (8) und μ-fache Wurzel der Gleichung (9) und etwa $\lambda \leqq \mu$, so ist u_i höchstens λ-fache Wurzel der Gleichung (7). Ich verzichte jedoch darauf, dies hier zu beweisen.

Wir sprechen unser Ergebniss so aus:

(10) *Ist*

$$(x - u_1 \varepsilon)(x - u_2 \varepsilon) \ldots (x - u_k \varepsilon) = 0$$

die charakteristische Gleichung des Systems $(e_1, e_2 \ldots e_n)$, *so sind sämmtliche verschiedene der Grössen* $u_1, u_2 \ldots u_k$ *identisch mit sämmtlichen verschiedenen Wurzeln* u *der Gleichung*

$$\Delta_{x-u\varepsilon} = 0 \quad \textit{oder} \quad \Delta'_{x-u\varepsilon} = 0,$$

wenn Δ, Δ' *die Determinanten des Systems bedeuten und* ε *der Modul ist.*

Hiermit bin ich zu Ende mit den Vorbemerkungen, auf welche sich die folgenden Untersuchungen stützen werden.

§ 2.

Scheidung aller Zahlensysteme in zwei Classen.

Jedem complexen Zahlensysteme ist ein Paar zu einander reciproker einfach transitiver projectiver Gruppen von Punkttransformationen eindeutig zugeordnet. Lie hat nun alle endlichen continuirlichen Gruppen von Punkttransformationen $X_1 f \ldots X_r f$ im Archiv for Mathematik og Naturv., Bd. 3, in zwei Classen eingetheilt, in die nicht-integrabelen und die integrabelen Gruppen. Nach einem Satze von Engel*) kann man diese wichtige Eintheilung auch so charakterisiren:

Die Gruppen der einen Kategorie besitzen eine dreigliedrige Untergruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ von der besonderen Zusammensetzung

$$(X_1 X_2) = X_1, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2, \quad (X_2 X_3) = X_3.$$

Die der anderen Kategorie hingegen enthalten keine solche Untergruppe, haben aber die besondere Zusammensetzung:

---

*) „Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie", Ber. d. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, 1887, S. 95—99. Der Beweis Engels ist, wie er selbst in den F. d. M. XIX (1887), S. 356, bemerkt, nicht ganz stichhaltig. Killing hat später den Satz in der Abhandlung: „Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen", 4. Theil, Math. Ann. Bd. XXXVI (1890), S. 172, auf anderem Wege bewiesen.

$$(X_i X_{i+k}) = \sum_1^{i+k-1} {}^s c_{i,i+k,s} X_s f$$

$$(i = 1, 2 \ldots r-1,\ k = 1, 2 \ldots r-i).$$

Dementsprechend ordnen sich auch die Zahlensysteme in zwei Classen ein, da jedes System als eine endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen, erzeugt von infinitesimalen Transformationen, aufgefasst werden kann.

Die Systeme, welche der zuerst bezeichneten Classe angehören, werde ich *Quaternionsysteme*, die anderen *Nichtquaternionsysteme* nennen.*) Die Gründe hierfür werden später dem Leser klar werden. Abgekürzt bezeichne ich die Systeme als Qss. und Nqss.

Es handelt sich nun darum, die charakteristischen Eigenschaften beider Arten, welche soeben nur gruppentheoretisch definirt wurden, auch zahlentheoretisch auszusprechen.

Allgemein wurde schon in § 1 bemerkt, dass jeder infinitesimalen Transformation der zu einem System gehörigen Gruppe $x' = xy$ die Multiplication mit einer Zahl $\varepsilon + u\tau$ des Systems entspricht, wo τ infinitesimal ist; ebenso, dass, wenn zu Uf und Vf die Multiplicationen mit $\varepsilon + u\tau$ und $\varepsilon + v\tau$ gehören, alsdann der Transformation (UV) die Multiplication mit $\varepsilon + (uv - vu)\tau$ zugeordnet ist. Soll also das Zahlensystem der zuerst genannten Classe der Qss. angehören, so ergiebt sich unmittelbar, dass es im System drei von einander linear unabhängige Zahlen u, v, w geben muss von der Beschaffenheit, dass für jede Zahl x des Systems

$$x \cdot \big(\varepsilon + (uv - vu)\tau\big) = x \cdot (\varepsilon + u\tau),$$
$$x \cdot \big(\varepsilon + (uw - wu)\tau\big) = x \cdot (\varepsilon + 2v\tau),$$
$$x \cdot \big(\varepsilon + (vw - wv)\tau\big) = x \cdot (\varepsilon + w\tau)$$

ist. Es muss also sein:

(1) $\quad uv - vu = u, \quad uw - wu = 2v, \quad vw - wv = w.$

Diese Gleichungen sind nicht ganz symmetrisch. Wir wählen deshalb statt u, v, w die Zahlen des Systems:

$$\bar{u} = -i\sqrt{i}\,u + \sqrt{i}\,w, \quad \bar{v} = 2iv, \quad \bar{w} = \sqrt{i}\,u - i\sqrt{i}\,w.$$

Nach (1) und unter Benutzung des distributiven Gesetzes ergiebt sich nämlich

*) In meiner früheren zweiten Abhandlung nannte ich die beiden Kategorien Kegelschnittsysteme und Nichtkegelschnittsysteme, eine Bezeichnungsweise, die jedoch nicht allzuglücklich erscheint. Die Lie'schen Namen: nicht-integrabele und integrabele Gruppen scheinen mir der Uebertragung auf Zahlensysteme nicht fähig zu sein.

$$u\bar{v} - \bar{v}\bar{u} = 2\bar{w}, \quad \bar{v}\bar{w} - \bar{w}\bar{v} = 2\bar{u}, \quad \bar{w}\bar{u} - \bar{u}\bar{w} = 2\bar{v},$$

und diese Gleichungen, welche offenbar (1) ersetzen, sind durchaus symmetrisch. Man überzeugt sich leicht davon, dass der Modul des Systems sich nicht durch $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ allein linear darstellen lässt. Demgemäss lassen sich $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ und der Modul ε als vier von einander unabhängige Einheiten des Systems wählen. Man kann sagen:

Ein Quaternionsystem $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ *besitzt unter andern drei vom Modul unabhängige Einheiten* e_1, e_2, e_3, *für welche*

(2) $\quad e_1e_2 - e_2e_1 = 2e_3, \quad e_2e_3 - e_3e_2 = 2e_1, \quad e_3e_1 - e_1e_3 = 2e_2$

ist, und umgekehrt ist jedes System, welches drei solche Zahlen besitzt, ein Quaternionsystem.

Quaternionsysteme also treten ihrer Natur nach erst im Falle von 4 oder mehr Einheiten auf. Das einfachste Beispiel ist das der Quaternionen von Hamilton, und diese Thatsache mag vorläufig zur Motivirung des eingeführten Namens des Qss. genügen.

Einem Nichtquaternionsystem $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ gehört eine projective Gruppe von der oben angegebenen Eigenthümlichkeit zu. Für eine solche Gruppe gilt aber der Lie'sche Satz*), dass sie in dem Raume ihrer Variabeln einen Punkt, eine durch diesen gehende Gerade, eine durch letztere gehende Ebene u. s. w. invariant lässt. Jeder Punkt des Raumes n^{ter} Stufe mit den homogenen Punktcoordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ stellt aber eine Zahl $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ des Systems $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ dar, und wir sehen folglich, dass es im Zahlensysteme von der betrachteten Art eine Zahl e_1 (entsprechend dem invarianten Punkt) giebt, die bei jeder Multiplication mit einem Coefficienten reproducirt wird:

$$e_1e_k = \text{Const.}\, e_1,$$

ferner eine Zahl e_2 derart, dass jedes Product e_2e_k sich durch e_1 und e_2 allein ausdrückt:

$$e_2e_k = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2,$$

eine Zahl e_3, sodass stets

$$e_3e_k = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2 + \text{Const.}\, e_3$$

ist u. s. w. $(k = 1, 2 \ldots n)$. Dem Zahlensystem gehört aber noch eine zweite zur ersten Gruppe $x' = xy$ reciproke Gruppe $x' = yx$ zu, welche dieselben Gebilde wie die erstere invariant lässt. Demgemäss ist auch

$$e_ke_1 = \text{Const.}\, e_1,$$

$$e_ke_2 = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2,$$

$$e_ke_3 = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2 + \text{Const.}\, e_3$$

u. s. w. Die Multiplicationstafel des Systems hat somit die Form:

*) Lie, a. a. O. S. 589, Satz 4.

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{llllll} (1) & (1) & (1) & \ldots & (1) \\ (1) & (12) & (12) & \ldots & (12) \\ (1) & (12) & (123) & \ldots & (123) \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ (1) & (12) & (123) & \ldots & (12\ldots n) \end{array}\right.$$

Hierbei soll $(12\ldots m)$ einen Ausdruck von der Form

$$\text{Const. } e_1 + \text{Const. } e_2 + \cdots + \text{Const. } e_m$$

bedeuten. So ist auch für die Nichtquaternionsysteme eine positive zahlentheoretische Definition gegeben, denn umgekehrt ist jedes System, dessen Multiplicationstafel auf die Form (3) gebracht werden kann, ein Nqs.

Das Ergebniss dieses Paragraphen ist eine Scheidung aller Zahlensysteme in zwei Kategorien. Späterhin (in § 4) werden wir eine zweite Scheidung, nämlich die in reducibele und irreducibele Systeme, zu betrachten haben.

Zunächst aber sollen die Nqss. eine eingehendere Betrachtung erfahren.

§ 3.

Betrachtung der Nichtquaternionsysteme.

Wie wir oben sahen, können die n Einheiten eines Nqs. $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ so gewählt werden, dass die Multiplicationstafel des Systems die mit (3) in § 2 bezeichnete allgemeine Form erhält. Jedes Product, in welchem e_k als Factor auftritt, setzt sich also aus $e_1, e_2 \ldots e_k$ allein linear zusammen. Die Determinanten des Systems reduciren sich, wie man leicht bemerkt, auf ihr Diagonalglied. Da keine der Determinanten identisch Null sein darf, so ergiebt sich, dass allgemein e_k in der k^{ten} Zeile wie in der k^{ten} Reihe der Tafel mindestens je einmal vorkommen muss. Sonst nämlich wäre der k^{te} Term auf der Diagonale der einen oder anderen Determinante Null.

Betrachtet man die Producte der Einheiten $e_2, e_3 \ldots e_n$ unter sich und streicht in ihnen alle mit e_1 behafteten Glieder, so verbleibt augenscheinlich eine Multiplicationstafel der Einheiten $e_2, e_3 \ldots e_n$, welche auch ein Nqs. vorstellt. Dies System werde ich gelegentlich benutzen und werde es dabei kurz als *Verkürzung des Nqs.* $(e_1 \ldots e_n)$ *um* e_1 bezeichnen. — Nahe liegt eine andere Verkürzung des Systems: Lässt man e_n weg, d. h. streicht man die letzte Horizontal- und Verticalreihe der Tafel, so bleibt eine Tafel, deren Einheiten $e_1, e_2 \ldots e_{n-1}$ immer noch das associative Gesetz $(e_i e_k)e_l = e_i(e_k e_l)$ erfüllen. Wir könnten es als Nqs. $(e_1 \ldots e_{n-1})$ bezeichnen, wenn es auch die

andere Anforderung, die an ein solches gestellt worden ist, dass es nämlich einen Modul besitze, oder, was dasselbe ist, dass seine Determinanten nicht identisch verschwinden, erfüllte. Dies aber wird nicht immer der Fall sein. So hat z. B. das Nqs. $(e_1 e_2 e_3)$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix}$$

den Modul e_3, während die von e_1 und e_2 allein gebildete Tafel

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & e_1 \end{matrix}$$

gar keinen Modul hat. Ein System, das die Forderung der Existenz eines Moduls, also des Nichtverschwindens der Determinanten, nicht erfüllt, im übrigen aber dem associativen Gesetz $(e_i e_k) e_l = e_i(e_k e_l)$ genügt, möge als ein *ausgeartetes System* bezeichnet werden. Für's nächste ist es bequemer, auf die Existenz des Moduls keine Rücksicht zu nehmen, da das Folgende auch für die ausgearteten Nqss. gilt.

Wir werden den Satz beweisen:

(1) *Jedes Nqs. $(e_1, e_2 \ldots e_n)$, ob nicht-ausgeartet oder ausgeartet, kann so geschrieben werden, dass in der k^{ten} Zeile wie in der k^{ten} Reihe der Multiplicationstafel e_k selbst höchstens je einmal auftritt.*

Vorausgesetzt ist hierbei wie in allem Folgenden, wo von Nqss. die Rede sein wird, dass die Einheiten $e_1, e_2 \ldots e_n$ immer noch in der Weise gewählt sind, dass die Tafel des Nqs. die obige charakteristische Form behält. Für $n = 1$ nun ist unser Satz selbstverständlich. Wir beweisen ihn deshalb durch Schluss von $n - 1$ auf n, indem wir voraussetzen, er gelte für alle Nqss. mit weniger als n Einheiten.

Vorgelegt sei also ein Nqs. $(e_1, e_2 \ldots e_n)$. Nach Voraussetzung kann das darin enthaltene kleinere Nqs. $(e_1, e_2 \ldots e_{n-1})$ auf eine solche Form gebracht werden, dass es den Satz erfüllt. (Ein hierbei noch fraglicher Punkt werde hernach erörtert). Verkürzen wir das Nqs. $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ um e_1 in der oben bemerkten Weise, so ergiebt sich eine Nqs. $(e_2, e_3 \ldots e_n)$. Das darin enthaltene Nqs. $(e_2 \ldots e_{n-1})$ erfüllt den Satz, da er für $(e_1, e_2 \ldots e_{n-1})$ besteht. Zu dem Nqs. $(e_2 \ldots e_{n-1})$ kann die Hinzufügung von e_n, um das System $(e_2 \ldots e_n)$ zu bilden, so geschehen, dass auch $(e_2 \ldots e_n)$ den Satz erfüllt. Um nun wieder das ganze $(e_1 \ldots e_n)$ zu erhalten, hat man überall die Glieder in e_1 hinzuzusetzen. Dabei nimmt, wie wir wissen, das System $(e_1 \ldots e_{n-1})$ eine dem Satz entsprechende Form an. Also hat auch das ganze System $(e_1 \ldots e_n)$ eine dem Satz genügende Form nur

mit Ausnahme vielleicht der ersten Zeile und Reihe, in denen e_1 ja noch in $e_n e_1$ und $e_1 e_n$ auftreten könnte.

Es sind aber hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $e_1^2 = e_1$ oder $e_1^2 = 0$ ist (andere Möglichkeiten giebt es nicht). Im ersteren Falle sind alle $e_k e_1 = e_1 e_k = 0$ für $k < n$. Wäre nun $e_n e_1 = \varrho e_1$, $e_1 e_n = \sigma e_1$, so wäre nach dem associativen Gesetz $e_1 e_n e_1 = \varrho e_1 = \sigma e_1$, d. h. $\varrho = \sigma$. Würde daher an Stelle von e_n die Einheit $\bar{e}_n = e_n - \varrho e_1$ eingeführt, so würde folgen $\bar{e}_n e_1 = e_1 \bar{e}_n = 0$, während im Uebrigen das System keine für den Satz wesentliche Aenderung erlitte. Der Satz würde also dann erfüllt sein.

Ist aber $e_1^2 = 0$ und ein $e_k e_1 = e_1$ $(k < n)$, sodass alle $e_i e_1 = 0$ sind für $i < n$ und $\neq k$, so ist auch $e_n e_1 = 0$. Denn wäre $e_n e_1 = \varrho e_1 \neq 0$, so würde $e_n e_k e_1 = \varrho e_1$ sein, d. h. $e_n e_k$ müsste e_k wirklich enthalten. Aber es ist auch $e_k^2 e_1 = e_1$, d. h. e_k^2 enthält wirklich e_k. Mithin würde e_k in der k^{ten} Zeile zweimal auftreten, was, wie wir wissen, nicht der Fall ist. Also ist $e_n e_1 = 0$. Ebenso folgt aus der Annahme $e_1 e_k = e_1$ nothwendig $e_1 e_n = 0$. Damit ist dargethan, dass e_1 in der ersten Zeile und Reihe höchstens je einmal auftritt.

Der oben angedeutete fragliche Punkt ist dieser: Es wurde nach der gemachten Annahme vorausgesetzt, dass das System $(e_1 \ldots e_{n-1})$ auf eine dem Satz entsprechende Form gebracht werden kann. Wegen der noch zu berücksichtigenden Producte mit e_n ist aber dabei wesentlich, dass diese Zurückführung auf eine solche Weise geschieht, dass allgemein für ein e_k eine neue Einheit eingeführt wird, die ausser e_k nur $e_1, e_2 \ldots e_{k-1}$ linear enthält. Die weitere Ausführung des vorstehenden Beweises lehrt, dass die Zurückführung in der That so geschieht, denn ebenso wie wir im Nothfalle für e_n höchstens $e_n - \varrho e_1$ als neue Einheit einzuführen haben, ebenso hätte es vorher bei der — successiv vorgenommenen — Hinzufügung von $e_2, e_3 \ldots e_{n-1}$ zu e_1 geschehen können.

Der Satz (1) gilt auch für ausgeartete Nqs. Besitzt nun das Nqs. einen Modul — und diese Annahme soll von jetzt ab wieder immer gemacht sein, ohne dass es besonders hervorgehoben werden wird —, so muss, wie schon einleitend bemerkt wurde, e_k in der k^{ten} Zeile und Colonne mindestens je einmal vorkommen. Hält man dies mit Satz (1) zusammen, so folgt:

(2) *Jedes Nqs.* $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ *kann in einer solchen Weise geschrieben werden, dass die* k^{te} *Zeile wie auch die* k^{te} *Reihe der Multiplicationstafel* e_k *gerade je einmal enthält.* $(k = 1, 2 \ldots n)$.

Ist das System in dieser Weise geschrieben und enthält e_k^2 selbst e_k, so ist jedes sonstige Product $e_i e_k$ und $e_k e_i$ natürlich frei von e_k, denn in e_k^2 kreuzt sich die k^{te} Colonne und Zeile. Aber auch jedes

andere Product ist dann frei von e_k. Bewiesen zu werden braucht dies nur für die Producte $e_\lambda e_\mu$, in denen λ und $\mu > k$ sind. Sei etwa

$$e_\lambda e_\mu = \cdots + a e_k + \cdots,$$

indem wir nur das Glied mit e_k hinschreiben, so ist

$$e_k e_\lambda e_\mu = \cdots + a e_k^2 + \cdots = (e_k e_\lambda)\, e_\mu.$$

Aber e_k^2 enthält e_k, während sonst in dem mittleren Ausdruck e_k nirgends auftritt und auch $(e_k e_\lambda)\, e_\mu$ frei von e_k ist, da $e_k e_\lambda$ nur $e_1 \ldots e_{k-1}$ enthalten kann. Somit ist nothwendig $a = 0$. Also:

(3) *Wenn das Nqs. $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ in Gemässheit des Satzes (2) geschrieben ist, so tritt, sobald e_k^2 die Einheit e_k selbst enthält, e_k sonst in keinem Producte auf.*

Hiernach können die Einheiten e_k, deren Quadrate sie selbst enthalten, ohne Weiteres als die letzten Einheiten des Systems $(e_1 \ldots e_n)$ gewählt werden, ohne dass dadurch der bisher erlangten allgemeinen Form derselben Abbruch gethan wird. Seien daher $e_1, e_2 \ldots e_r$ die Einheiten, deren Quadrate sie selbst nicht enthalten, also e_i^2 frei von e_i, sobald $i \leq r$ ist. Die übrigen Einheiten $e_{r+1} \ldots e_n$, für die allgemein e_k^2 die Einheit e_k enthält, mögen zur Unterscheidung mit $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s$ bezeichnet werden (sodass $r + s = n$ ist). Die r ersten Einheiten haben nun, wie man leicht sieht, die Eigenthümlichkeit, dass kein $e_i e_j\, (i, j \leq r)$ e_i oder e_j enthält. η_k tritt nach (3) in der Tafel nur einmal auf, nämlich im Quadrate η_k^2.

Ist $r = 0$, d. h. besteht das System nur aus Einheiten η, so ist jedes $\eta_i \eta_k = 0$, sobald $i \neq k$ ist, denn $\eta_i \eta_k$ darf ja nur $e_1, e_2 \ldots e_r$ enthalten. Aus demselben Grunde ist dann $\eta_k^2 = \varrho_k \eta_k$, wo $\varrho_k \neq 0$ und ohne Weiteres $= 1$ zu setzen ist. Im Specialfall $r = 0$ ist demnach der folgende Satz selbstverständlich:

(4) *Die n Einheiten eines Nqs. lassen sich so wählen: $e_1, e_2 \ldots e_r;\ \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s$, dass jedes $e_i e_j$ weder e_i noch e_j enthält, dass ferner $\eta_k^2 = \eta_k$ und $\eta_i \eta_k = 0$ ist für $i \neq k$. Ausserdem sind alle Producte $\eta_k e_i$ und $e_i \eta_k$ für $k = 1, 2 \ldots s$ gleich Null mit Ausnahme je eines gewissen, das gleich e_i ist: $\eta_\lambda e_i = e_i$, $e_i \eta_\mu = e_i$.*

Da der Satz für $r = 0$ gilt, kann der Schluss von $r - 1$ auf r angewandt werden, um ihn allgemein zu beweisen. Angenommen werde also, der Satz (4) sei richtig, sobald die Zahl der Einheiten e_i kleiner als r ist. Dann gilt es, wie bewiesen werden soll, auch für ein Nqs. $(e_1 \ldots e_r,\ \eta_1 \ldots \eta_s)$.

Ein solches Nqs. $(e_1 \ldots e_r,\ \eta_1 \ldots \eta_s)$ verkürzen wir nämlich um e_1. Das übrigbleibende Nqs. $(e_2 \ldots e_r,\ \eta_1 \ldots \eta_s)$ kann nach Annahme so gewählt werden, dass der Satz (4) für dasselbe richtig

ist. Wird nun e_1 wieder hinzugefügt, so tritt zuerst zu jedem Product ein Summand in e_1 hinzu. Es kommt darauf an, dieselben, soweit nöthig, zu entfernen.

Zunächst kommt, wie leicht einzusehen ist, e_1 in der ersten Zeile wie in der ersten Colonne nur je einmal vor in einem Producte $\eta_\lambda e_1 = e_1$ und $e_1 \eta_\mu = e_1$, während sonst jedes Product mit e_1 Null ist.

Nun ist etwa $\eta_k^2 = \eta_k + a_k e_1$. Sobald $k \neq \lambda$ und $\neq \mu$ ist, setzen wir statt η_k einfach $\bar{\eta}_k = \eta_k + a_k e_1$ und finden $\bar{\eta}_k^2 = \bar{\eta}_k$. Ist aber $k = \lambda \neq \mu$, so kommt

$$\eta_\lambda^3 = (\eta_\lambda + a_\lambda e_1)\,\eta_\lambda = \eta_\lambda(\eta_\lambda + a_\lambda e_1),$$

d. h.

$$\eta_\lambda^2 = \eta_\lambda^2 + a_\lambda e_1,$$

sodass also $a_\lambda = 0$, also $\eta_\lambda^2 = \eta_\lambda$ ist. Im Fall $k = \mu \neq \lambda$ ergiebt sich Aehnliches. Wenn endlich $k = \lambda = \mu$ ist, was ja denkbar wäre, so giebt die Substitution $\bar{\eta}_\lambda = \eta_\lambda - a_\lambda e_1$ sofort $\bar{\eta}_\lambda^2 = \bar{\eta}_\lambda$. Es ist also zu erreichen, dass jedes $\eta_k^2 = \eta_k$ bleibt, wie vor der Zufügung von e_1.

Ferner ist etwa $\eta_k \eta_i = \varrho_{ki} e_1$. Sobald $k \neq \lambda$ ist, folgt aus $\eta_k^2 \eta_i = \eta_k \eta_i = \varrho_{ki} e_1 = \eta_k \cdot \eta_k \eta_i = \varrho_{ki} \eta_k e_1 = 0$, dass $\varrho_{ki} = 0$ ist. Ebenso ergiebt sich $\eta_k \eta_i = 0$, sobald $i \neq \mu$ ist. Ist nun endlich $\eta_\lambda \eta_\mu = \varrho_{\lambda\mu} e_1$, so wird $\bar{\eta}_\mu = \eta_\mu - \varrho_{\lambda\mu} e_1$ statt η_μ eingeführt. Dies liefert $\eta_\lambda \bar{\eta}_\mu = 0$, während immer noch $\eta_k \bar{\eta}_\mu = \bar{\eta}_\mu \eta_i = 0$, $\bar{\eta}_\mu^2 = \bar{\eta}_\mu$ bleibt.

Für die $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s$ ist also der Satz (4) richtig. Durch die zum Theil hierbei nothwendig gewordene Einführung neuer η ist die Form der übrigen Producte $\eta_k e_i$ und $e_i \eta_k$ nicht wesentlich geändert, da jedes $e_i e_1 = e_1 e_i = 0$ ist. Es muss gezeigt werden, dass alle diese Producte für $i > 1$ frei von e_1 sind.

Zunächst gehört zu jedem e_i (nach Satz (4) für den Fall $r - 1$) ein gewisses η_k und η_ν, sodass

$$\eta_k e_i = e_i + \text{Const. } e_1, \quad e_i \eta_\nu = e_i + \text{Const. } e_1$$

ist. Wenn dann $\bar{e}_i = \eta_k e_i \eta_\nu$ als neues e_i eingeführt wird, was geschehen darf, so ergiebt sich $\eta_k \bar{e}_i = \bar{e}_i$, $\bar{e}_i \eta_\nu = \bar{e}_i$. Die anderen Producte $\eta_j e_i$ und $e_i \eta_j$ ($j \neq k$ resp. $\neq \nu$) sind frei von e_i, enthalten aber zunächst noch e_1. Sei etwa $\eta_j e_i = a e_1$ Wegen $\eta_j^2 = \eta_j$ folgt dann $\eta_j^2 e_i = \eta_j e_i = a \eta_j e_1$. Sobald also $j \neq \lambda$ ist, ist $a = 0$ (für $j = \lambda$ ist ja $\eta_\lambda e_1 = e_1$). Ebenso ist $e_i \eta_j = 0$, sobald $j \neq \mu$ ist. Jetzt ist e_1 nur noch aus $\eta_\lambda e_i$ und $e_i \eta_\mu$ zu entfernen. Wenn sowohl $\eta_\lambda e_i$ als auch $e_i \eta_\mu$ die Einheit e_i enthält, so darf, wie die Substitution $\bar{e}_i = \eta_\lambda e_i \eta_\mu$ lehrte, $\eta_\lambda e_i = e_i \eta_\mu = e_i$ gesetzt werden. Wenn sowohl $\eta_\lambda e_i$ als auch $e_i \eta_\mu$ frei von e_i sind, so sei etwa $\eta_\lambda e_i = a e_1$, $e_i \eta_\mu = b e_1$. Aus $\eta_\lambda e_i \eta_\mu = a e_1 = b e_1$ folgt dann $a = b$. Nun giebt es aber sicher ein η_k $(k \neq \lambda)$, sodass $\eta_k e_i = e_i$ und $\eta_k e_1 = 0$ ist. Also folgt $\eta_k e_i \eta_\mu = b e_1 = 0$, d. h. $b = a = 0$.

Nicht ebenso lassen sich die beiden übrig bleibenden Fälle behandeln, wo entweder

$$\text{A)}\quad \eta_\lambda e_i = e_i, \qquad e_i\eta_\mu = a e_1,$$

oder

$$\text{B)}\quad \eta_\lambda e_i = a e_1, \qquad e_i\eta_\mu = e_i$$

ist. Um auch in diesen Fällen zu beweisen, dass $a = 0$ ist, benutzen wir die Existenz des Moduls. Derselbe hat zunächst die allgemeine Form

$$\varepsilon = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_1\eta_1 + \cdots + \beta_s\eta_s.$$

Aber wegen $\eta_k^2 = \eta_k$, $\eta_k\eta_\lambda = \eta_\lambda\eta_k = 0$ $(\lambda \neq k)$ folgt hieraus durch Multiplication mit η_k, weil $\eta_k\varepsilon = \eta_k$ ist, dass $\beta_k = 1$ und überdies

$$\alpha_1\eta_k e_1 + \cdots + \alpha_r\eta_k e_r = 0,$$
$$(k = 1, 2 \ldots s)$$

sein muss. In *einem* $\eta_k e_i$ $(k = 1, 2 \ldots s)$ kommt e_i vor $(i > 1)$, aus einer der vorstehenden s Gleichungen folgt also nothwendig $\alpha_i = 0$. Für α_1 kann dies zunächst nicht ebenso erschlossen werden, da ja nach B) ein $\eta_\lambda e_i = a e_1$ sein kann. Aber die λ^{te} Gleichung, die sich jetzt reducirt auf

$$\alpha_1\eta_\lambda e_1 = 0,$$

lehrt wegen $\eta_\lambda e_1 = e_1$, dass α_1 auch gleich Null ist. Somit ist der Modul

$$\varepsilon = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_s.$$

Multiplicirt man ihn mit e_i, so kommt

$$e_i = \eta_1 e_i + \eta_2 e_i + \cdots + \eta_s e_i.$$

Bestände nun für e_i die Annahme B), so käme, da ein $\eta_k e_i = e_i$ ist $(k \neq \lambda)$:

$$e_i = e_i + a e_1,$$

d. h. $a = 0$. Bei der Annahme B) ist folglich $a = 0$. Analog wird bei der Annahme A) geschlossen. Hiermit ist e_1 aus dem System überall da entfernt, wo es die in Satz (4) angegebene Form des Systems stören würde. Der Satz ist also allgemein bewiesen.

Doch möge zur Erläuterung noch eins bemerkt werden. Wir nahmen von vornherein an, dass ein $\eta_\lambda e_1 = e_1$ sei. Dass wir nicht annehmen durften, ein $e_i e_1$ sei gleich e_1, folgt aus

$$e_i^2 e_1 = 0 = e_i \cdot e_i e_1 = e_i e_1. \text{ —}$$

Infolge des Satzes (4) reducirt sich die Berechnung unseres Nqs. wesentlich auf die Bestimmung der Producte der $e_1, e_2 \ldots e_r$ unter einander. Jedem e_i sind zwei der Einheiten η, etwa η_k und η_ν, zugeordnet, sodass

$$\eta_k e_i = e_i, \quad e_i\eta_\nu = e_i$$

ist, während alle anderen $\eta_j e_i$ und $e_i \eta_j$ gleich Null sind. Natürlich können sehr wohl mehreren der e_i dieselben η_k und η_ν oder theilweise dieselben beiden zugeordnet sein. Alle e_i, denen η_k und η_ν zugeordnet sind, will ich als zum *Charakter* $(\varkappa\nu)$ gehörig bezeichnen. Insbesondere seien sie von *geradem Charakter*, sobald $\varkappa = \nu$, von *schiefem*, sobald $\varkappa \neq \nu$ ist. Diese Benennungen gestatten nämlich für die Folge kürzere Ausdrucksweisen.

Aus der Combination der e_i mit den η_j gehen infolge des associativen Gesetzes einige Resultate betreffs der Producte der e_i unter sich hervor. Bedeutet nämlich für den Augenblick ε_{ab} die Zahlen 1 oder 0, je nachdem $a = b$ oder $a \neq b$ ist, so kommt

$$(\varkappa\nu)\,\eta_\mu(\lambda\varrho) = \varepsilon_{\nu\mu}(\varkappa\nu)\,(\lambda\varrho) = \varepsilon_{\mu\lambda}(\varkappa\nu)\,(\lambda\varrho),$$

d. h. es ist $(\varkappa\nu)\,(\lambda\varrho) = 0$, wenn $\varepsilon_{\nu\mu} \neq \varepsilon_{\mu\lambda}$ ist. Letzteres tritt nur dann ein, wenn $\lambda \neq \nu$ ist. Ferner ist

$$\eta_\varkappa(\varkappa\nu)\,(\nu\varrho)\,\eta_\varrho = (\varkappa\nu)\,(\nu\varrho);$$

d. h. jedes Product $(\varkappa\nu)\,(\nu\varrho)$ ist vom Charakter $(\varkappa\varrho)$. Demnach gilt der Satz

(5) *Im System* $(e_1 \ldots e_r,\ \eta_1 \ldots \eta_s)$ *des Satzes* (4) *ist das Product einer Einheit e vom Charakter* $(\varkappa\nu)$ *mit einer vom Charakter* $(\lambda\varrho)$ *gleich Null, sobald* $\nu \neq \lambda$ *ist, dagegen vom Charakter* $(\varkappa\varrho)$, *sobald* $\nu = \lambda$ *ist.*

Dies sind übrigens die einzigen Resultate, welche für die Producte der e_i unter sich aus der Existenz der η hervorgehen.

Schon bei Benutzung der Sätze (4) und (5) gestaltet sich die Berechnung des Nqs. bei geringer Einheitenzahl äussert kurz im Vergleich mit bisherigen Methoden. Die *Berechnung der Systeme in* 3 *Einheiten* möge dies zeigen. Hier ist entweder $s = 3$ oder $s = 2$ oder $s = 1$ (da wenigstens ein η vorkommen muss).

$s = 3$ liefert nach Satz (4) nur das System

$$\begin{matrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3, \end{matrix}$$

indem wir die $e_1 \ldots e_r,\ \eta_1 \ldots \eta_s$ jetzt wieder fortlaufend mit $e_1 \ldots e_n$ bezeichnen. $s = 2$ giebt eine Einheit e_1 von geradem oder schiefem Charakter, deren Quadrat jedenfalls Null ist, also die beiden Systeme

$$\begin{matrix} 0 & e_1 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & e_1 \\ e_1 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{matrix}$$

Für $s = 1$ ist entweder $e_2^2 = e_1$ oder $= 0$, indem e_1 und e_2 beide vom selben geraden Charakter sind, nach Satz (5). Also

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3. \end{array}$$

Dies sind alle Systeme in 3 Einheiten. —

Eine bemerkenswerth einfache Form hat die charakteristische Gleichung eines Nqs. $(e_1 \dots e_r,\ \eta_1 \dots \eta_s)$, wenn es auf die dem Satz (4) entsprechende Gestalt gebracht ist. Wie schon am Schluss des § 1 angegeben wurde, kann man allgemein die charakteristische Gleichung zunächst so schreiben:

$$(x - u_1 \varepsilon)(x - u_2 \varepsilon) \dots (x - u_k \varepsilon) = 0,$$

wenn ε den Modul und k den Grad des Systems bezeichnet. $u_1, u_2 \dots u_k$ sind hierbei gewisse Functionen der Coefficienten $x_1 \dots x_s$, $\xi_1 \dots \xi_s$ der allgemeinen Zahl $x = x_1 e_1 + \dots + x_r e_r + \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_s \eta_s$ des Systems.

Wie ebenfalls in § 1 hervorgehoben wurde, ist jeder der Factoren $x - u_i \varepsilon$ ein Theiler der Null. In unserem Nqs. $(e_1 \dots e_r,\ \eta_1 \dots \eta_s)$ liegen nun die Theiler der Null auf den Mannigfaltigkeiten $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \dots \xi_s = 0$, weil jede der Determinanten des Systems sich auf ein Product der Potenzen von $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_s$ reducirt. Eine Zahl ist also dann und nur dann Theiler der Null, wenn in ihr wenigstens eine der Einheiten $\eta_1 \dots \eta_s$ mit Null als Coefficienten auftritt. In $x - u_i \varepsilon$ haben, da der Modul $\varepsilon = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_s$ ist, die $\eta_1 \dots \eta_s$ die Coefficienten $\xi_1 - u_i, \dots \xi_s - u_i$. Demgemäss ist u_i gleich einer der Zahlen $\xi_1 \dots \xi_s$.

Kürzer folgt dies aus dem mit (10) bezeichneten Satze des § 1. Nach demselben sind die verschiedenen der Grössen $u_1 \dots u_k$ identisch mit den verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta_{x-u\varepsilon} = 0$, die offenbar jetzt die Form

$$(u - \xi_1)^{\lambda_1}(u - \xi_2)^{\lambda_2} \dots (u - \xi_s)^{\lambda_s} = 0$$

hat, sodass $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_s$ die verschiedenen Wurzeln sind. Jedes der $u_1 \dots u_k$ ist also gleich einem der $\xi_1 \dots \xi_s$ und umgekehrt ist jedes ξ_i wenigstens einem der $u_1 \dots u_k$ gleich. Demnach ist der Grad k des Systems $(e_1 \dots e_r,\ \eta_1 \dots \eta_s)$ sicher $\geqq s$, und die charakteristische Gleichung des Systems hat die Form:

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\mu_1}(x - \xi_2 \varepsilon)^{\mu_2} \dots (x - \xi_s \varepsilon)^{\mu_s} = 0,$$

wo $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_s$ positive ganze Zahlen sind, deren keine verschwindet. Der Grad des Systems ist dann

$$k = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s.$$

$\xi_1 \dots \xi_s$ bedeuten, um es zu wiederholen, die Coefficienten der Einheiten $\eta_1 \dots \eta_s$ in der allgemeinen Zahl x des Systems.

Diese Form der charakteristischen Gleichung des Systems ist offenbar die einfachste überhaupt mögliche.

Es fragt sich, wie die Zahlen $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_s$ von der Beschaffenheit des Zahlensystems abhängen.

Um hierüber wenigstens Einiges auszusagen, verkürzen wir das System $(e_1 \ldots e_r, \; \eta_1 \ldots \eta_s)$ in der bekannten Weise um e_1. Das alsdann verbleibende System $(e_2 \ldots e_r, \; \eta_1 \ldots \eta_s)$ erfüllt dann ebenfalls die Gleichung

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\mu_1} (x - \xi_2 \varepsilon)^{\mu_2} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\mu_s} = 0.$$

Aber es wäre möglich, dass dies nicht die charakteristische Gleichung des Systems $(e_2 \ldots e_r, \; \eta_1 \ldots \eta_s)$ ist, sondern diese einen niederen Grad hat. Nehmen wir daher an, es sei

$$U \equiv (x - \xi_1 \varepsilon)^{\nu_1} (x - \xi_2 \varepsilon)^{\nu_2} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\nu_s} = 0$$

die char. Gleichung des verkürzten Systems. Verstehen wir dann unter x nicht eine Zahl dieses, sondern des ganzen Nqs. $(e_1 \ldots e_r, \; \eta_1 \ldots \eta_s)$ und bilden wir U für das letztere, so wird dieser Ausdruck nicht gerade Null sein, sondern sich als Vielfaches von e_1 darstellen, da alle Producte mit e_1 nur e_1 oder 0 liefern. Also kommt etwa

$$U = X \cdot e_1,$$

wo X eine gew. complexe Function von $x_1 \ldots x_r, \; \xi_1 \ldots \xi_s$ bedeutet. Es existirt bekanntlich ein η_λ und ein η_μ derart, dass

$$\eta_\lambda e_1 = e_1 \eta_\mu = e_1$$

ist, während alle anderen Producte mit e_1 Null liefern. Also ist

$$x U = X \xi_\lambda e_1,$$
$$U x = X \xi_\mu e_1,$$

d. h.

$$(x - \xi_\lambda \varepsilon) \, U = 0,$$
$$U (x - \xi_\mu \varepsilon) = 0.$$

Mithin genügt x im ganzen System $(e_1 \ldots e_r, \; \eta_1 \ldots \eta_s)$ jeder der beiden Gleichungen

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\nu_1} \ldots (x - \xi_\lambda \varepsilon)^{\nu_\lambda + 1} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\nu_s} = 0,$$
$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\nu_1} \ldots (x - \xi_\mu \varepsilon)^{\nu_\mu + 1} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\nu_s} = 0.$$

Aber x kann nur eine Gleichung niedrigsten Grades erfüllen. Sobald also $\lambda \neq \mu$ ist, können diese beiden Gleichungen, da sie dann verschieden sind, nicht vom niedrigsten Grade sein, d. h. x genügt schon der Gleichung

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\nu_1} \ldots (x - \xi_\lambda \varepsilon)^{\nu_\lambda} \ldots (x - \xi_\mu \varepsilon)^{\nu_\mu} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\nu_s} = 0$$

des verkürzten Systems, indem dann $X \equiv 0$ ist. Wenn aber $\lambda = \mu$

ist, so lässt sich nichts weiter aussagen, als dass x entweder der Gleichung

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\nu_1} \ldots (x - \xi_\lambda \varepsilon)^{\nu_\lambda} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\nu_s} = 0$$

oder aber der Gleichung

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\nu_1} \ldots (x - \xi_\lambda \varepsilon)^{\nu_\lambda + 1} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\nu_s} = 0$$

genügen muss. Im Fall $\lambda \neq \mu$ ist bekanntlich e_1 von schiefem, im Fall $\lambda = \mu$ von geradem Charakter.

Demnach sind wir zu dem Satze gelangt:

(6) *In dem Nqs.* $(e_1 \ldots e_r, \eta_1 \ldots \eta_s)$ *des Satzes* (4) *genügt die allgemeine Zahl* x *einer charakteristischen Gleichung von der Form*

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\mu_1} (x - \xi_2 \varepsilon)^{\mu_2} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\mu_s} = 0.$$

$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_s$ *bedeuten hierin die Coefficienten von* $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s$ *in der Zahl* x, *und* ε *ist der Modul* $\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_s$ *des Systems.* $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_s$ *sind ganze positive Zahlen, deren keine verschwindet.*

Ist e_1 *eine Einheit schiefen Charakters, so besitzt das verkürzte System* $(e_2 \ldots e_r, \eta_1 \ldots \eta_s)$ *dieselbe charakteristische Gleichung. Wenn* e_1 *eine Einheit geraden Charakters und* $\eta_\lambda e_1 = e_1 \eta_\lambda = e_1$ *ist, so lautet die charakteristische Gleichung des verkürzten Systems entweder wie die obige oder aber so:*

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\mu_1} \ldots (x - \xi_\lambda \varepsilon)^{\mu_\lambda - 1} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\mu_s} = 0.$$

Natürlich muss dann $\mu_\lambda > 1$ *sein.*

Bei der Anwendung dieses Satzes, um die char. Gl. eines vorgelegten Nqs. zu bestimmen, verfährt man gerade umgekehrt. Man geht aus von der charakteristischen Gleichung des verkürzten Systems und untersucht, ob die des ganzen Systems dieselbe ist oder einen um 1 höheren Grad hat.

Doch lässt uns der Satz in Stich bei Hinzufügung einer Einheit e_1 geraden Charakters. Aber in einem solchen Falle lässt sich überhaupt kein allgemeiner Satz aufstellen, wenn derselbe wie der obige von der Form der Producte der $e_1, e_2 \ldots e_r$ unter sich keinen Gebrauch macht. Ein Beispiel wird dies erhärten: Die beiden Nqss. in 4 Einheiten e_1, e_2, e_3, e_4, in denen e_3 und e_4 die Rolle der η spielen:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & e_4 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & e_4 \end{array}$$

besitzen verschiedene charakteristische Gleichungen, nämlich das erste:

$$(x - x_3 \varepsilon)(x - x_4 \varepsilon)^3 = 0$$

und das zweite:

$$(x - x_3 \varepsilon)(x - x_4 \varepsilon)^2 = 0,$$

obwohl aus beiden durch Verkürzung um e_1 dasselbe System in e_2, e_3, e_4:

	e_2	e_3	e_4
e_2	0	0	e_2
e_3	0	e_3	0
e_4	e_2	0	e_4

hervorgeht, dessen Gleichung lautet:

$$(x - x_3 \varepsilon)(x - x_4 \varepsilon)^2 = 0.$$

Der Grund hierfür liegt offenbar darin, dass bei Hinzufügung der Einheit geraden Charakters e_1 zum letzten System einmal $e_2^2 = e_1$ und das andere Mal $e_2^2 = 0$ angenommen wird.

Ehe wir nun in der Untersuchung der Nqss. fortfahren, ist es nöthig, einige Bemerkungen über ganz allgemeine Zahlensysteme einzuschalten.

§ 4.

Reducibilität, Addition und Multiplication von Zahlensystemen.

Von grosser Bedeutung für die Structur der Zahlensysteme ist der Begriff der Reducibilität.

Ein Zahlensystem heisst *reducibel**), wenn seine Einheiten sich so wählen und in zwei Scharen $e_1, e_2 \dots$ und $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \dots$ einreihen lassen, dass jedes Product einer Einheit e mit einer Einheit $\mathfrak{e}$, also jedes $e_i \mathfrak{e}_k$ und $\mathfrak{e}_k e_i$ Null ist und ferner jedes Product zweier e sich durch die e, jedes Product zweier $\mathfrak{e}$ sich durch die $\mathfrak{e}$ allein ausdrückt. Alsdann zerfällt nämlich das ganze System in zwei kleinere $(e_1, e_2 \dots)$ und $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \dots)$, deren Producte mit einander Null sind. Es lässt sich auch umgekehrt aus zwei beliebigen Systemen $(e_1, e_2 \dots)$ und $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \dots)$ in dieser Weise stets ein grösseres System $(e_1, e_2 \dots, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \dots)$ zusammensetzen. Das System

e_1	0	0
0	0	e_2
0	e_2	e_3

ist z. B. reducibel auf die beiden Systeme (e_1) und (e_2, e_3).

*) Herr Study hat Veranlassung dazu gegeben, dass ich hier den Begriff der Reducibilität verwerthe. In der That spielt dieser Begriff im Folgenden eine sehr nützliche Rolle.

Hat man ein System in zwei kleinere zerfällt, so kann man eventuell mit diesen dasselbe Verfahren durchmachen u. s. w. Schliesslich gelangt man dann dahin, das ganze System — es sei S genannt — in eine Anzahl einzelner Systeme $S_1, S_2 \dots$ zu zerlegen derart, dass eine Zahl des Systems S_i mit einer Zahl eines anderen S_k multiplicirt stets Null giebt und ausserdem keines der Systeme $S_1, S_2 \dots$ mehr reducibel ist. Dass dies Endresultat der fortgesetzten Reduction von dem eingeschlagenen Wege unabhängig ist, leuchtet unmittelbar ein, daher:

(1) *Ein Zahlensystem kann nur auf eine Art in eine Reihe von lauter irreducibelen Systemen zerfällt werden, wenn es nicht schon selbst irreducibel ist.*

Doch muss noch Eines bewiesen werden, dass nämlich jedes der einzelnen Systeme $S_1, S_2 \dots$ wirklich einen Modul besitzt. Es könnte ja auch ausgeartet sein. Sei ε der Modul von S, so kann ε geschrieben werden als eine Summe, deren Summanden je einem der Theilsysteme $S_1, S_2 \dots$ angehören — und zwar ist dies nur auf eine Art möglich —:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots,$$

sodass ε_i eine Zahl des Systems S_i ist. Bedeutet x eine allgemeine Zahl des Theilsystems S_i, so ist:

$$x = x\varepsilon = x\varepsilon_1 + x\varepsilon_2 + \cdots.$$

Aber alle $x\varepsilon_k$ sind Null mit Ausnahme von $x\varepsilon_i$ und es kommt:

$$x = x\varepsilon_i.$$

Analog ist $\varepsilon_i x = x$, d. h. ε_i ist in der That Modul des Systems S_i. Uebrigens ist es hierbei völlig gleichgültig, ob das Theilsystem S_i noch reducibel oder irreducibel ist.

Fragen wir uns nun nach einem allgemeinen Criterium der Reducibilität eines Systems S mit dem Modul ε. Da die Reduction successive vorgenommen werden kann, fragen wir nur danach, wann das System S in zwei Systeme S_1 und S_2 zerfällt werden kann.

Ist dies möglich, so werden S_1 und S_2 gewisse Moduln ε_1 und ε_2 haben und es ist nach dem Vorbemerkten

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1.$$

Sind nun x und y allgemeine Zahlen von S, so sind $x\varepsilon_1$ und $\varepsilon_1 x$ allgemeine Zahlen von S_1 und $y\varepsilon_2$ und $\varepsilon_2 y$ solche von S_2. Demnach muss jede der Zahlen $x\varepsilon_1$ und $\varepsilon_1 x$ mit $y\varepsilon_2$ oder $\varepsilon_2 y$ multiplicirt Null liefern. Also ist:

$$x\varepsilon_1 \cdot y\varepsilon_2 = 0, \quad x\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 y = 0, \quad \varepsilon_1 x \cdot y\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 x \cdot \varepsilon_2 y = 0.$$

Man findet leicht, dass wegen $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$ hierzu nothwendig und hinreichend ist, dass stets

$$\varepsilon_1 x \varepsilon_1 = \varepsilon_1 x, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$$

ist, welche Zahl x auch sein möge. ε_1 ist Modul von S_1 und daher muss auch $x\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 = x\varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \cdot x\varepsilon_1 = x\varepsilon_1$ u. s. w. sein. Dies liefert mit dem Vorigen zusammen:

$$\varepsilon_1 x \varepsilon_1 = \varepsilon_1 x = x \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1.$$

Wenn umgekehrt eine Zahl ε_1 ($\neq \varepsilon$) existirt, welche diese Bedingungen erfüllt, so ist das System S reducibel. Man braucht eben nur $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$ zu setzen und in das System S_1 alle Zahlen $x\varepsilon_1$, in das System S_2 alle Zahlen $x\varepsilon_2$ aufzunehmen.

Unsere Forderung lässt sich noch vereinfachen. Wenn nämlich ε_1 nur so beschaffen ist, dass $\varepsilon_1 x = x\varepsilon_1$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ ist, so ist auch $\varepsilon_1 x \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 x = \varepsilon_1 x$. Also gilt der Satz:

(2) *Ein System S mit Modul ε ist dann und nur dann reducibel, wenn es ausser ε eine Zahl ε_1 im System giebt, die mit allen Zahlen x des Systems vertauschbar ($x\varepsilon_1 = \varepsilon_1 x$) und deren Quadrat $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ ist. Giebt es eine solche Zahl, so sind ε_1 und $\varepsilon - \varepsilon_1$ die Moduln der beiden Systeme, in die S zerfällt werden kann.*

Die Aufsuchung einer solchen Zahl ε_1 ist nicht schwer: Die Zahlen des Systems S, die mit allen Zahlen vertauschbar sind, bilden ja für sich ein Zahlensystem mit dem Modul ε. Denn das Product zweier derartiger Zahlen mit einander ist wieder eine Zahl derselben Art. Aus diesem kleineren commutativen Zahlensysteme hat man also eine Zahl ε_1 auszuwählen, deren Quadrat ihr selbst gleich ist. ε_1 und $\varepsilon - \varepsilon_1$ nennen wir *Reducenten* des Systems S.

Wenn das vorgelegte System S rein commutativ, d. h. in ihm stets $x \cdot y = y \cdot x$ ist, so folgt insbesondere für dieses:

(3) *Ein commutatives Zahlensystem ist dann und nur dann irreducibel, wenn es ausser dem Modul ε in ihm keine Zahl ε_1 giebt, deren Quadrat $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ ist.*

Ist wieder wie vorher S ein allgemeines (nicht gerade commutatives) System und lässt sich dasselbe zerfällen in zwei Systeme $(e_1, e_2 \ldots)$ und $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots)$ und schreibt man in der Tafel des Systems S die Einheiten in der Reihenfolge $e_1, e_2 \ldots, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots$, so findet man, dass zwei Gebiete der Tafel überall die Null aufweisen. Diese Gebiete enthalten kein Glied der Hauptdiagonale und werden abgeschnitten durch eine Horizontal- und eine Verticallinie, welche sich auf der Hauptdiagonale zwischen zwei Gliedern derselben treffen.

Hiernach zerfällt jede der Determinanten Δ_x und Δ_x' des Systems S in das Product zweier Determinanten. Sind nämlich D_x und D_x' die des Systems $(e_1, e_2 \ldots)$ und $\mathfrak{D}_x$ und $\mathfrak{D}_x'$ die des Systems $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots)$, so ist

$$\Delta_x = D_x \mathfrak{D}_x, \quad \Delta_x' = D_x' \mathfrak{D}_x'.$$

Da die Determinanten gleich Null gesetzt die Mannigfaltigkeiten darstellen, auf denen die Theiler der Null liegen, so folgt:

(4) *Ist ein System S reducibel auf zwei Systeme* $(e_1, e_2 \ldots)$ *und* $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots)$ *und ist*

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + \mathfrak{x}_1 \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots$$

eine allgemeine Zahl von S, so enthält die Gleichung einer der Mannigfaltigkeiten der Theiler der Null im System S entweder nur die $x_1, x_2 \ldots$ oder nur die $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \ldots$.

Wir kommen nun zu dem folgenden, für die Praxis sehr wichtigen Satze*):

(5) *Ist ein System S mit Modul ε reducirbar auf zwei Systeme $S_1(e_1, e_2 \ldots)$ und $S_2(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots)$ mit den Moduln ε_1 bez. ε_2, und sind*

$$x^l + \varphi_1 x^{l-1} + \cdots + \varphi_{l-1} x + \varphi_l \varepsilon_1 = 0,$$
$$x^m + \psi_1 x^{m-1} + \cdots + \psi_{m-1} x + \psi_m \varepsilon_2 = 0$$

die charakteristischen Gleichungen der Systeme S_1 und S_2, so ist

$$(x^l + \varphi_1 x^{l-1} + \cdots + \varphi_l \varepsilon)(x^m + \psi_1 x^{m-1} + \cdots + \psi_m \varepsilon) = 0$$

die charakteristische Gleichung des Systems S.

Zum Beweise bedenken wir, dass, wenn $x - u_1 \varepsilon_1, \ldots x - u_\varrho \varepsilon_1$ alle Theiler der Null sind, die auf dem Strahl von x nach ε_1 im System S_1 liegen, alsdann nach dem mit (10) bezeichneten Satz des § 1 die charakteristische Gleichung des Systems S_1 in der Form geschrieben werden kann:

$$g_1 \equiv (x - u_1 \varepsilon_1)^{\lambda_1} (x - u_2 \varepsilon_1)^{\lambda_2} \ldots (x - u_\varrho \varepsilon_1)^{\lambda_\varrho} = 0,$$

und analog die des zweiten Systems in der Form:

$$g_2 \equiv (x - \mathfrak{u}_1 \varepsilon_2)^{\mu_1} (x - \mathfrak{u}_2 \varepsilon_2)^{\mu_2} \ldots (x - \mathfrak{u}_\sigma \varepsilon_2)^{\mu_\sigma} = 0.$$

Im System S nun liegen nach Satz (4) auf dem Strahl von x nach ε nur die Theiler der Null:

$$x - u_1 \varepsilon, \ldots x - u_\varrho \varepsilon; \quad x - \mathfrak{u}_1 \varepsilon, \ldots x - \mathfrak{u}_\sigma \varepsilon.$$

Nach dem citirten Satz (10) des § 1 besitzt demnach S eine charakteristische Gleichung von der Form:

$$g \equiv (x - u_1 \varepsilon)^{\nu_1} \ldots (x - u_\varrho \varepsilon)^{\nu_\varrho} (x - \mathfrak{u}_1 \varepsilon)^{\varkappa_1} \ldots (x - \mathfrak{u}_\sigma \varepsilon)^{\varkappa_\sigma} = 0.$$

Nehmen wir nun in

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + \mathfrak{x}_1 \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots$$

*) Ausgesprochen wurde dieser allerdings naheliegende Satz zuerst von Herrn **Study**, der mir brieflich davon Mittheilung machte. Sein Beweis ist von dem meinigen durchaus verschieden und findet sich in der vierten oben angegebenen Abhandlung.

$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \cdots = 0$ an, so reducirt sich x auf eine Zahl des Systems S_1, und erfüllt also die Gleichung $g_1 = 0$. Andererseits erfüllt sie die Gleichung $g = 0$, welche nun, da auch $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ ist, die Form hat:

$$\big(x - u_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big)^{\nu_1} \cdots \big(x - u_\varrho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big)^{\nu_\varrho} \cdot x^{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_\sigma} = 0$$

oder, da ε_2 mit allen Zahlen des Systems S_1 multiplicirt Null liefert:

$$(x - u_1\varepsilon_1)^{\nu_1} \cdots (x - u_\varrho\varepsilon_1)^{\nu_\varrho} \cdot x^{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_\sigma} = 0.$$

Im System S_1, dessen Einheiten allein hierin noch vorkommen, ist x im allgemeinen kein Theiler der Null, also auch nicht $x^{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_\sigma}$. Folglich muss

$$(x - u_1\varepsilon_1)^{\nu_1} \cdots (x - u_\varrho\varepsilon_1)^{\nu_\varrho} = 0$$

sein. Aber es ist $g_1 = 0$ die einzige Gleichung niedrigsten Grades, die x im System S_1 erfüllt und jede andere Gleichung, welche x im System S_1 erfüllt, muss die linke Seite von $g_1 = 0$ zum Factor haben. Also ist $\nu_1 \geqq \lambda_1, \ldots \nu_\varrho \geqq \lambda_\varrho$, mit anderen Worten: Der Ausdruck g besitzt g_1, wenn hierin ε_1 durch ε ersetzt wird, als Factor. Ebenso besitzt er g_2, wenn hierin ε_2 durch ε ersetzt wird, als Factor.

Also braucht nur noch gezeigt zu werden, dass jede Zahl x des System s die Gleichung

$$\gamma \equiv (x - u_1\varepsilon)^{\lambda_1} \ldots (x - u_\varrho\varepsilon)^{\lambda_\varrho} (x - \mathfrak{u}_1\varepsilon)^{\mu_1} \ldots (x - \mathfrak{u}_\sigma\varepsilon)^{\mu_\sigma} = 0$$

erfüllt. Es sei $\bar{x}$ der Theil von x, der dem System S_1, $\bar{\mathfrak{x}}$ der Theil, der dem System S_2 angehört. Dann wird

$$\begin{aligned}\gamma \equiv \big(\bar{x} + \bar{\mathfrak{x}} - u_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big)^{\lambda_1} \ldots \big(\bar{x} + \bar{\mathfrak{x}} - u_\varrho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big)^{\lambda_\varrho} \\ \cdot \big(\bar{x} + \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{u}_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big)^{\mu_1} \ldots \big(\bar{x} + \bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{u}_\sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big)^{\mu_\sigma}.\end{aligned}$$

Da $\bar{x} . \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}} . \bar{x} = 0$, $\bar{x} . \varepsilon_2 = \varepsilon_2 . \bar{x} = 0$, $\bar{\mathfrak{x}} . \varepsilon_1 = \varepsilon_1 . \bar{\mathfrak{x}} = 0$ ist, so wird dies zu:

$$\begin{aligned}\gamma \equiv (\bar{x} - u_1\varepsilon_1)^{\lambda_1} \ldots (\bar{x} - u_\varrho\varepsilon_1)^{\lambda_\varrho} (\bar{x} - \mathfrak{u}_1\varepsilon_1)^{\mu_1} \ldots (\bar{x} - \mathfrak{u}_\sigma\varepsilon_1)^{\mu_\sigma} \\ + (\bar{\mathfrak{x}} - u_1\varepsilon_2)^{\lambda_1} \ldots (\bar{\mathfrak{x}} - u_\varrho\varepsilon_2)^{\lambda_\varrho} (\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{u}_1\varepsilon_2)^{\mu_1} \ldots (\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{u}_\sigma\varepsilon_2)^{\mu_\sigma}.\end{aligned}$$

Im ersten Glied kommt g_1, im letzten g_2, resp. gebildet für $\bar{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ vor. Da diese Ausdrücke Null sind, so ist in der That auch $\gamma = 0$.

Hiermit ist Satz (5) vollständig bewiesen.

Nach dem Vorhergehenden leuchtet ein, dass die Kenntniss der irreducibelen Bestandtheile $S_1, S_2 \ldots$ eines Systemes S und der charakteristischen Gleichungen dieser Theilsysteme auch die Kenntniss von S und der charakteristischen Gleichung von S nach sich zieht. Aus diesem Grunde werden wir später bei Erledigung gewisser Probleme unser Augenmerk allein auf die irreducibelen Systeme zu richten brauchen.

Ein Beispiel zu unseren Sätzen mag zweckdienlich sein:

Das System in fünf Einheiten $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array}$$

ist reducibel. Nach Satz (2) oder (3) nämlich hat man, um dies zu erkennen, eine Zahl

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_5 e_5$$

zu suchen, deren Quadrat gleich x selbst ist. Hier ist nun

$$x^2 = 2x_1 x_4 e_1 + x_2^2 e_2 + 2x_3 x_5 e_3 + x_4^2 e_4 + x_5^2 e_5.$$

Soll dies gleich x sein, so muss

$$2x_1 x_4 = x_1, \quad x_2^2 = x_2, \quad 2x_3 x_5 = x_3, \quad x_4^2 = x_4, \quad x_5^2 = x_5$$

sein. Entweder ist also $x_5 = 1$ oder 0. Ist $x_5 = 1$, so kommt $x_3 = 0$. Dasselbe kommt für $x_5 = 0$. Ferner ist $x_4 = 1$ oder 0 und beide Male kommt $x_1 = 0$. Endlich kann $x_2 = 1$ oder 0 sein. Das System kann also in drei Theilsysteme zerlegt werden, deren Moduln e_2, e_4, e_5 sind. Da alle Producte mit e_2 nur e_2, alle mit e_4 nur e_1 und e_4, alle mit e_5 nur e_3 und e_5 enthalten, so sind (e_2), (e_1, e_4) und (e_3, e_5) die drei Theilsysteme. Dies tritt in Evidenz, wenn e_1 mit e_2 und e_3 mit e_4 vertauscht wird, in der Form der Tafel:

$$\begin{array}{c|cc|cc} \boxed{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 \end{array}$$

Die Umrahmungen sollen die Theilsysteme hervorheben. Alle Stellen der Tafel, die keinem Theilsystem angehören, sind, wie es sein muss, mit Nullen besetzt.

Die charakteristische Gleichung von (e_1) lautet:

$$x - x_1 e_1 = 0,$$

die von (e_2, e_3):

$$(x - x_3 e_3)^2 = 0,$$

die von (e_4, e_5):

$$(x - x_5 e_5)^2 = 0,$$

wenn nämlich x_1, x_3, x_5 die Coefficienten der resp. Moduln e_1, e_3, e_5

der Theilsysteme vorstellen. Demnach ist die charakteristische Gleichung des ganzen Systemes nach Satz (5):

$$(x - x_1 \varepsilon)(x - x_3 \varepsilon)^2 (x - x_5 \varepsilon)^2 = 0,$$

wo $\varepsilon = e_1 + e_3 + e_5$ ist, also die des ganzen Systems in seiner ursprünglichen Form:

$$(x - x_2 \varepsilon)(x - x_4 \varepsilon)^2 (x - x_5 \varepsilon)^2 = 0.$$

Die Zusammensetzung mehrerer Systeme $A, B, C \ldots$ zu einem einzigen S hat grosse Aehnlichkeit mit der Addition der elementaren Mathematik. Denn wie dort gilt hier das commutative und das associative Gesetz, nach denen die Reihenfolge der einzelnen Systeme $A, B, C \ldots$ in der Zusammensetzung zum System S völlig gleichgültig ist. Dies berechtigt uns, die Zusammensetzung mehrerer Systeme $A, B, C \ldots$ zu einem einzigen S, wie sie in diesem Paragraphen betrachtet wurde, symbolisch als *Addition* zu bezeichnen:

$$S = A + B + C + \cdots.$$

So werden wir das obige als Beispiel gebrachte System $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ in seiner letzten Form symbolisch so bezeichnen:

$$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (e_1) + (e_2, e_3) + (e_4, e_5).$$

Zwei oder mehrere Zahlensysteme addiren heisst also, das Zahlensystem bilden, das in jene Systeme zerfällt.

Augenscheinlich gelten die Sätze:

(6) *Kennt man alle irreducibelen Zahlensysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten, so kennt man überhaupt alle Zahlensysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten.*

Ferner:

(7) *Der Grad eines reducibelen Zahlensystems ist gleich der Summe der Grade seiner Theilsysteme.*

Endlich:

(8) *Ist ein Zahlensystem reducibel, so ist es dann und nur dann ein Nichtquaternionsystem, wenn keines seiner Theilsysteme ein Quaternionsystem ist.*

Somit gilt auch der folgende Satz:

(9) *Kennt man alle irreducibelen Nichtquaternionsysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten, so kennt man ohne Weiteres überhaupt alle Nichtquaternionsysteme in* $1, 2 \ldots n$ *Einheiten.*

Es existirt noch ein zweiter Process, mittelst dessen man aus gegebenen Zahlensystemen neue ableiten kann. Auch von diesem soll gleich hier gesprochen werden, obgleich er erst an einer viel späteren Stelle in Erscheinung treten wird:

Ist nämlich $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ ein Zahlensystem S und $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_m)$ ein zweites Zahlensystem $\mathfrak{S}$, so kann man die an sich bedeutungs-

losen, weil nicht definirten, Producte $e_i \mathfrak{e}_k$ als Einheiten e_{ik} eines Systems P von $n \,.\, m$ Einheiten auffassen, wenn man nur festsetzt, dass die e_i mit den $\mathfrak{e}_k$ commutativ sein sollen, also

$$e_{ik} = e_i \mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_k e_i$$

angenommen wird. Denn es ist nun jedes Product im System P wohl definirt und folgt dem distributiven und associativen Gesetze. Gelten nämlich im System S die Productregeln

$$e_i e_j = \sum^s a_{ijs}\, e_s,$$

im System $\mathfrak{S}$ die Regeln

$$\mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_l = \sum^\sigma \mathfrak{a}_{kl\sigma}\, \mathfrak{e}_\sigma,$$

so ist das Product der Einheiten e_{ik} und e_{jl} des neuen Systems P nach unseren Festsetzungen in dieser Weise zu berechnen:

$$e_{ik} \cdot e_{jl} = e_i \mathfrak{e}_k \cdot e_j \mathfrak{e}_l = e_i e_j \cdot \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_l,$$

also:

$$e_{ik} \cdot e_{jl} = \sum^s a_{ijs} e_s \cdot \sum^\sigma \mathfrak{a}_{kl\sigma} \mathfrak{e}_\sigma = \sum^s \sum^\sigma a_{ijs}\, \mathfrak{a}_{kl\sigma}\, e_s \mathfrak{e}_\sigma,$$

daher schliesslich:

$$e_{ik} \cdot e_{jl} = \sum^s \sum^\sigma a_{ijs}\, \mathfrak{a}_{kl\sigma}\, e_{s\sigma}.$$

Das Product $e_{ik} e_{jl}$ drückt sich also linear durch die neuen Einheiten aus. Dass das associative Gesetz erfüllt ist, folgt so:

$$\begin{aligned}(e_{ik} e_{jl})\, e_{pq} &= (e_i \mathfrak{e}_k \cdot e_j \mathfrak{e}_l)\, e_p \mathfrak{e}_q = (e_i e_j \cdot \mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_l)\, e_p \mathfrak{e}_q = \\ &= (e_i e_j) e_p \cdot (\mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_l) \mathfrak{e}_q = e_i (e_j e_p) \cdot \mathfrak{e}_k (\mathfrak{e}_l \mathfrak{e}_q) = \\ &= e_i \mathfrak{e}_k (e_j e_p \cdot \mathfrak{e}_l \mathfrak{e}_q) = e_i \mathfrak{e}_k (e_j \mathfrak{e}_l \cdot e_p \mathfrak{e}_q) = \\ &= e_{ik} (e_{jl} \cdot e_{pq}),\end{aligned}$$

sodass in der That

$$(e_{ik}\, e_{jl})\, e_{pq} = e_{ik}\, (e_{jl}\, e_{pq})$$

wird. Der Modul des neuen Systems P ist natürlich das Product der Moduln der Systeme S und $\mathfrak{S}$.

Man kann ebenso aus drei oder noch mehr Systemen durch Multiplication der Einheiten derselben mit einander neue Systeme ableiten und sieht unmittelbar ein, dass dabei auch successive und in beliebiger Reihenfolge verfahren werden kann.

Diesen Process nennen wir die *Multiplication von Zahlensystemen* mit einander und bezeichnen ihn auch symbolisch so. Z. B. für unsere drei Systeme S, $\mathfrak{S}$, P drücken wir die Beziehung in der Form aus:

$$P = S \cdot \mathfrak{S}.$$

Dieser Process erfüllt wie die gewöhnliche Multiplication die elementaren Gesetze. Auch spielt der neue Process dem obigen Additions-

verfahren gegenüber genau dieselbe Rolle wie in der elementaren Mathematik die Multiplication der Addition gegenüber. Sind $A, B, C \ldots$ Zahlensysteme, so ist nämlich:

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad (A \cdot B)\; C = A\,(B \cdot C),$$
$$(A + B)\,(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D.$$

Während der Additionsprocess leicht verständlich ist, bietet der Multiplicationsprocess besondere Schwierigkeiten dar. Es fehlt ein brauchbares Criterium dafür, dass ein vorgelegtes System als Product aufgefasst werden kann, und an allgemeinen Sätzen über die Theiler der Null und die charakteristische Gleichung eines solchen Systems.

Auch hier soll ein Beispiel gegeben werden: Die Systeme

$$\begin{matrix} 0 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \mathfrak{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{e}_2 \end{matrix}$$

werden mit einander multiplicirt, indem man die Producte ihrer Einheiten als neue Einheiten einführt:

$$\eta_1 = e_1\mathfrak{e}_1, \quad \eta_2 = e_1\mathfrak{e}_2, \quad \eta_3 = e_2\mathfrak{e}_1, \quad \eta_4 = e_2\mathfrak{e}_2.$$

Das Productsystem $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ ist demnach:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \eta_1 & 0, \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2, \\ \eta_1 & 0 & \eta_3 & 0, \\ 0 & \eta_2 & 0 & \eta_4. \end{matrix}$$

Z. B. ist $\eta_2\eta_4 = e_1\mathfrak{e}_2 \cdot e_2\mathfrak{e}_2 = e_1 e_2 \cdot \mathfrak{e}_2^{\,2} = e_1 \cdot \mathfrak{e}_2 = \eta_2$. —

Man kann die Multiplication zweier Zahlensysteme noch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten. Ist nämlich $(e_1, e_2 \ldots e_n)$ ein System S, so hat die allgemeine Zahl desselben die Form

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

und hierin wurden bisher immer die Coefficienten $x_1, x_2 \ldots x_n$ als gewöhnlich complexe Zahlen aufgefasst. Wir wollen aber fürs Nächste diese Auffassung verlassen und annehmen, $x_1, x_2 \ldots x_n$ seien nicht gew. complexe, sondern Zahlen eines beliebigen anderen Systems $\mathfrak{S}(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_m)$, also von der Form:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{1m}\mathfrak{e}_m, \\ x_2 &= \mathfrak{x}_{21}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_{22}\mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{2m}\mathfrak{e}_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \mathfrak{x}_{n1}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_{n2}\mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{nm}\mathfrak{e}_m, \end{aligned}$$

wo nun die $\mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12} \ldots \mathfrak{x}_{nm}$ gewöhnlich complexe Zahlen bedeuten. Dann nimmt die allgemeine Zahl x des Systems S die Form an:

$$x = (\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{1m}\mathfrak{e}_m)e_1 + \cdots$$
$$+ (\mathfrak{x}_{n1}\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{x}_{n2}\mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_{nm}\mathfrak{e}_m)e_n$$

oder ausmultiplicirt:

$$x = \sum_i \sum_k \mathfrak{x}_{ik} e_i \mathfrak{e}_k,$$

d. h. x ist jetzt eine aus den Einheiten $e_i\mathfrak{e}_k$ $(i = 1, 2 \ldots n,\ k = 1, 2 \ldots m)$ linear mit gew. complexen Coefficienten $\mathfrak{x}_{ik}$ zusammengesetzte Zahl. Das System der Einheiten $e_i\mathfrak{e}_k$ ist aber nichts anderes als das oben als Product bezeichnete System $P = S \cdot \mathfrak{S}$. Man kann übrigens statt von S auch von $\mathfrak{S}$ ausgehen und in einer allgemeinen Zahl dieses Systems $\mathfrak{S}$ die Coefficienten als allgemeine Zahlen des zweiten Systems S auffassen. Auch dann gelangt man zu einer allgemeinen Zahl des Productes $S \cdot \mathfrak{S}$.

Leicht zu beweisen ist der Satz:

(10) *Das Product aus einem reducibeln System und einem beliebigen anderen System ist ebenfalls reducibel.*

Sind nämlich $S_1(e_1 \ldots e_n)$ und $S_2(\mathfrak{e}_1 \ldots \mathfrak{e}_m)$ die beiden Systeme, welche mit einander multiplicirt werden sollen, und ist S_1 reducibel mit dem Reducenten ε_1, während $\mathfrak{e}_1$ der Modul von S_2 ist, so ist offenbar $\varepsilon_1\mathfrak{e}_1$ Reducent des Productsystems $S_1 S_2$. Es ist ja:

$$\varepsilon_1\mathfrak{e}_1 \cdot e_i\mathfrak{e}_k = \varepsilon_1 e_i \cdot \mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_k = e_i\varepsilon_1 \cdot \mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_1 = e_i\mathfrak{e}_k \cdot \varepsilon_1\mathfrak{e}_1,$$

ferner:

$$(\varepsilon_1\mathfrak{e}_1)^2 = \varepsilon_1^2\mathfrak{e}_1^2 = \varepsilon_1\mathfrak{e}_1.$$

Ueberdies ist $\varepsilon_1\mathfrak{e}_1$ nicht etwa Modul des Productsystems $S_1 S_2$ selbst, denn $S_1 S_2$ hat zum Modul das Product der Moduln von S_1 und S_2. ε_1 aber ist nicht der Modul von S_1.

Als Beispiel zu diesem Satze kann das oben benutzte Product der Systeme (e_1, e_2) und $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ gebraucht werden. Daselbst ist $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ reducibel mit den Reducenten $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$. Da ferner e_2 Modul von (e_1, e_2) ist, so sind $e_2\mathfrak{e}_1 = \eta_3$ und $e_2\mathfrak{e}_2 = \eta_4$ die Reducenten des Productsystems $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$. In der That lässt sich dies, wenn man η_2 mit η_3 vertauscht, auch so schreiben:

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \eta_3 \\ 0 & 0 & \eta_3 & \eta_4 \end{array},$$

sodass die Reducibilität sofort ins Auge fällt.

§ 5.

Fortsetzung der Betrachtung der Nichtquaternionsysteme.

Wir brachen mit § 3 die Untersuchung der Nqss. vorläufig ab, um einige wichtige Begriffe zu besprechen, die wir zum Theil in der weiteren Betrachtung der Nqss. gebrauchen werden. Jetzt knüpfen wir also wieder an § 3 an.

Wir fanden, dass sich die Einheiten eines Nqs. in besonderer Weise auswählen lassen: $e_1, e_2' \dots e_r, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_s$, sodass namentlich die Sätze (4), (5), (6) jenes § 3 bestehen. Fragen wir uns nun, wann ein solches Nqs. reducibel ist. Nach Satz (2) des § 4 ist dazu nothwendig und hinreichend, dass im System eine vom Modul ε verschiedene Zahl ε_1 existirt, die mit allen Zahlen des Systems vertauschbar und deren Quadrat $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ ist.

Da $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ sein soll, so muss ε_1 wenigstens eines der η enthalten, denn nur die η geben beim Quadriren Zahlen, welche sie selbst enthalten. Andererseits kann ε_1 keine Einheit e enthalten. Denn nehmen wir an, ε_1 drücke sich linear aus durch die η und die e, so folgt aus der Forderung $\varepsilon_1 \cdot \eta_k = \eta_k \cdot \varepsilon_1$, dass nur solche Einheiten e vorkommen dürfen, die geraden Charakters sind. Ist aber $e_\varrho\,(\varrho \leqq r)$ die letzte derselben, welche in ε_1 wirklich auftritt, ist sie ferner mit dem Coefficienten $a_\varrho \neq 0$ behaftet, und ist η_k die zu e_ϱ zugeordnete Einheit η, derart dass $\eta_k e_\varrho = e_\varrho \eta_k = e_\varrho$ ist, so muss ε_1 sicher auch η_k — etwa mit dem Coefficienten b_k — enthalten, denn sonst wäre ε_1^2 frei von e_ϱ. Aus $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ folgt ferner $b_k^2 = b_k$, d. h. $b_k = 1$. Nun enthält ε_1^2 offenbar e_ϱ mit dem Coefficienten $2a_\varrho$. Dieser müsste gleich a_ϱ sein, was unmöglich ist.

ε_1 kann sich also nur aus den η — und zwar diese mit dem Coefficienten 1 oder 0 behaftet — linear zusammensetzen. Sicher ist dann $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$. Auch ist dann ε_1 mit allen η vertauschbar, mit den e noch nicht ohne weiteres. Enthält z. B. ε_1 die Einheit η_k und ist dieser die Einheit e_i schiefen Charakters zugeordnet: $\eta_k e_i = e_i$, während $e_i \eta_l = e_i$ ist, so muss ε_1 auch η_l enthalten, weil sonst $\varepsilon_1 e_i \neq e_i \varepsilon_1$ wäre Um ein ε_1 zu finden, hat man demnach folgenden Weg einzuschlagen: Man nimmt an, ε_1 enthalte η_1. (Wäre es frei von η_1, so würde jeder andere Reducent $\varepsilon - \varepsilon_1$ diese Einheit enthalten, da $\varepsilon = \eta_1 + \cdots + \eta_s$ ist). Bei η_1 werden mehrere e_i reproducirt werden, entweder in der Form $\eta_1 e_i = e_i$ oder $e_i \eta_1 = e_i$. Diese e_i werden — wenn sie schiefen Charakters sind — noch bei anderen η reproducirt. Alle diese anderen η muss ε_1 enthalten. Bei diesen η ferner werden schiefe Einheiten reproducirt werden, die auch anderen η zugeordnet sind. Dann sind auch diese letzteren η in ε_1 enthalten, u. s. w. Dieser Process kann

enden, ehe alle η vorgekommen sind. Dann hat man einen Reducenten gefunden. Es ist aber auch möglich, dass alle η auftreten, also kein von ε verschiedener Reducent ε_1 existirt. Im letzteren Fall ist das System irreducibel.

Z. B. das System in 5 Einheiten $(e_1, e_2 \ldots e_5)$:

$$\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ \hline 0 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5. \end{array}$$

in welchem e_3, e_4, e_5 die Rolle der η, e_1, e_2 die der e spielen, ist irreducibel. Denn bei e_3 wird e_2 reproducirt $(e_2 e_3 = e_2)$. e_2 wird auch bei e_4 reproducirt $(e_4 e_2 = e_2)$, während zu e_4 auch e_1 zugeordnet ist $(e_1 e_4 = e_1)$ und dies e_1 auch bei e_5 vorkommt $(e_5 e_1 = e_1)$.

Sprechen wir unser Ergebniss als Satz aus:

(1) *Ein Nqs.* $(e_1, e_2 \ldots e_r, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s)$ *des Satzes* (4), § 3, *ist dann und nur dann irreducibel, wenn sich die Einheiten* $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_s$, *eventuell mit Wiederholung, in eine solche Reihe bringen lassen, dass es zu je zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Gliedern* η_k, η_l *der Reihe stets eine Einheit* e_i *giebt derart, dass*

$$\eta_k e_i = e_i = e_i \eta_l$$

oder auch

$$e_i \eta_k = e_i = \eta_l e_i$$

ist. —

Wir haben in § 3 erkannt, dass die Einheiten $e_1 \ldots e_r$, $\eta_1 \ldots \eta_s$, die bei jedem Nqs. existiren, unter anderen folgende Eigenschaften haben: Die Producte der η zu je zweien sind Null, während jedes $\eta_k^2 = \eta_k$ ist. Ferner sind die Producte $\eta_k e_i$ und $e_i \eta_k$ entweder gleich 0 oder e_i, und e_i tritt in nur einem Producte der ersten und nur einem der zweiten Art auf. Die Gesammtheit der $e_1 \ldots e_r$ kann dadurch charakterisirt werden, dass jede Zahl des Systems, dessen $(r+1)^{\text{te}}$ Potenz gleich Null ist, sich linear aus $e_1 \ldots e_r$ zusammensetzt, und umgekehrt.

Es erhebt sich nun die Frage, ob sich in das vorgelegte Nqs. $(e_1 \ldots e_r, \eta_1 \ldots \eta_s)$ neue Einheiten $\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_\varrho$, $\bar{\eta}_1 \ldots \bar{\eta}_\sigma$ $(\varrho + \sigma = r + s)$ einführen lassen derart, dass die $\bar{e}$ und $\bar{\eta}$ eben jene Eigenthümlichkeiten haben, die den ε und η zukommen. Dies soll jetzt entschieden werden.

Die $\bar{\eta}$ werden sich so darstellen müssen:

$$\bar{\eta}_\varkappa = \cdots + \alpha_{\varkappa 1} \eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa s} \eta_s$$
$$(\varkappa = 1, 2 \ldots \sigma),$$

wo die Glieder in $e_1 \ldots e_r$ (wie auch im Folgenden) durch Punkte angedeutet sind. Nun ist

$$\bar{\eta}_\varkappa^2 = \cdots + \alpha_{\varkappa 1}^2 \eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa s}^2 \eta_s.$$

Es soll aber $\bar{\eta}_\varkappa^2 = \bar{\eta}_\varkappa$ sein. Daher ist jedes $\alpha_{\varkappa k} = 1$ oder Null. Ferner kommt

$$\bar{\eta}_\varkappa \bar{\eta}_\lambda = \cdots + \alpha_{\varkappa 1}\alpha_{\lambda 1}\eta_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa s}\alpha_{\lambda s}\eta_s.$$

Dies Product soll für $\varkappa \neq \lambda$ gleich Null sein. Es müssen also alle $\alpha_{\varkappa 1}\alpha_{\lambda 1}, \ldots, \alpha_{\varkappa s}\alpha_{\lambda s}$ verschwinden. Sobald $\alpha_{\varkappa k}$ z. B. $\neq 0$, also 1 ist, ist jedes $\alpha_{\lambda k} = 0 (\lambda \neq \varkappa)$, mit anderen Worten: Wenn η_k in $\bar{\eta}_\varkappa$ wirklich auftritt, so tritt es in keinem anderen $\bar{\eta}$ auf. Andererseits kann ein $\bar{\eta}_\varkappa$ sich nicht durch $e_1 \ldots e_r$ allein ausdrücken, da sonst $\bar{\eta}_\varkappa^2$ nicht gleich $\bar{\eta}_\varkappa$ sein könnte. Da endlich ebensoviele $\bar{\eta}$ als η vorhanden sein müssen (also $\sigma = s$, $\varrho = r$ sein muss), weil die Anzahl der η dieselbe ist wie die Anzahl der verschiedenen linearen Factoren der charakteristischen Gleichung des Systems (nach Satz (6), § 3), so folgt, dass jedes $\bar{\eta}$ ein und nur ein η wirklich enthält und zwar mit dem Coefficienten 1. Bedenken wir ferner, dass in der ursprünglichen Form $(e_1 \ldots e_r, \eta_1 \ldots \eta_s)$ die Reihenfolge der Einheiten $\eta_1 \ldots \eta_s$ völlig in unserem Belieben steht, so erhellt, dass wir direct

$$\bar{\eta}_\varkappa = \cdots + \eta_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots s)$$

annehmen dürfen. Sei nun e_ϱ die höchste in $\bar{\eta}_\varkappa$ vorkommende der Einheiten $e_1 \ldots e_r$, also:

$$\bar{\eta}_\varkappa = \cdots + \alpha_\varrho e_\varrho + \eta_\varkappa \quad (\alpha_\varrho \neq 0),$$

so ist

$$\bar{\eta}_\varkappa^2 = \cdots + \alpha_\varrho (e_\varrho \eta_\varkappa + \eta_\varkappa e_\varrho) + \eta_\varkappa,$$

wo nunmehr die Punkte nur die etwa vorkommenden $e_1 \ldots e_{\varrho-1}$ vertreten. Entweder ist e_ϱ vom Charakter $(\varkappa\varkappa)$ oder vom Charakter $(\varkappa\lambda)$ oder $(\lambda\varkappa)$ oder endlich vom Charakter $(\lambda\mu)$, wo $\lambda, \mu \neq \varkappa$ sein sollen. Im ersten Falle käme

$$\bar{\eta}_\varkappa^2 = \cdots + 2\alpha_\varrho e_\varrho + \eta_\varkappa,$$

d. h., da $\bar{\eta}_\varkappa^2 = \bar{\eta}_\varkappa$ sein soll, $\alpha_\varrho = 0$ gegen Voraussetzung. Im letzten Fall wäre $\bar{\eta}_\varkappa^2$ ganz frei von e_ϱ, gegen Voraussetzung. Hat e_ϱ den Charakter $(\varkappa\lambda)$ (die Behandlung des Falles $(\lambda\varkappa)$ ist ganz analog), so bilden wir das Product

$$\bar{\eta}_\varkappa \bar{\eta}_\lambda = \cdots + \alpha_\varrho e_\varrho \bar{\eta}_\lambda = \cdots + \alpha_\varrho e_\varrho.$$

Es sollte Null sein. Also käme auch jetzt $\alpha_\varrho = 0$ gegen Voraussetzung. Kurz: $\bar{\eta}_\varkappa$ enthält gar keine Einheit $e_1 \ldots e_r$. Es ist einfach:

$$\bar{\eta}_\varkappa = \eta_\varkappa.$$

Die neuen $\bar{e}$ sind natürlich frei von den η, da ihre $(r+1)^{\text{te}}$ Potenz

verschwinden muss. Sei ein $\bar{e}_i$ vom Charakter $(\varkappa\lambda)$ hinsichtlich der $\bar{\eta}$ oder, was ja jetzt dasselbe ist, der η. Alsdann ist $\eta_\mu \bar{e}_i$ resp. $\bar{e}_i \eta_\mu$ gleich Null, sobald $\mu \neq \varkappa$ resp. $\neq \lambda$ ist, gleich 1 im anderen Falle. Daraus folgt, dass $\bar{e}_i$ sich nur durch solche Einheiten $e_1, e_2 \ldots e_r$ ausdrücken kann, die ebenfalls vom Charakter $(\varkappa\lambda)$ sind.

Will man also die in § 3 gefundene allgemeine Form eines Nqs. nicht zerstören, so ist man in Betreff der Einführung neuer Einheiten sehr eingeschränkt. Man darf höchstens die η unter einander vertauschen — was aber selbstverständlich ist — und statt der e lineare Combinationen derselben einführen. Dabei dürfen aber diese linearen Combinationen je nur lauter Einheiten desselben Charakters enthalten und müssen so gewählt werden, dass die Grundeigenschaft des Nqs. nicht gestört wird, d. h. dass immer noch jedes $\bar{e}_i \bar{e}_j$ nur die vor $\bar{e}_i$ und $\bar{e}_j$ kommenden Einheiten enthält.

Einen Theil der Ergebnisse dieses Paragraphen fassen wir in den Satz zusammen:

(2) *Für ein Nqs. in n Einheiten spielt eine gewisse Zahl s $(0 < s \leqq n)$ eine wesentliche Rolle, insofern als s und nur s ganz bestimmte Zahlen im System existiren derart, dass ihre Producte unter einander Null, ihre Quadrate aber ihnen selbst gleich sind. Alle Zahlen des Systems, von denen irgend eine Potenz verschwindet — und zwar ist es mindestens die $(n-s+1)^{\text{te}}$ — bilden eine ebene Mannigfaltigkeit $(n-s)^{\text{ter}}$ Stufe. Das Product einer Zahl der zuerst bezeichneten Art mit einer der zuletzt bezeichneten giebt stets eine Zahl letzterer Art.*

Unsere letzten Untersuchungen lehren z. B. auch, dass die oben in § 4 beispielsweise aufgestellten 5 Zahlensysteme in 3 Einheiten wirklich sämmtlich wesentlich von einander verschieden sind.

§ 6.

Bestimmung aller Nichtquaternionsysteme in n Einheiten, deren Grad gleich n, $n-1$, $n-2$ ist.

Von den allgemeinen Sätzen der §§ 3 und 5 über die Structur der Nqss. lassen sich mannigfache Anwendungen auf die Bestimmung besonderer Arten von Systemen machen. Einige derselben sollen hier vorgeführt werden.

Fragen wir uns zunächst nach den Nqss. $(e_1 \ldots e_r, \eta_1 \ldots \eta_s)$, *deren Grad gleich der Anzahl $r+s$ der Einheiten ist.* Ist ein solches System reducibel, so sind seine irreducibelen Bestandtheile nach Satz (5) des § 4 wieder Systeme, deren Grad gleich der Anzahl ihrer Ein-

heiten ist. Deshalb dürfen wir uns auf die Untersuchung der irreducibelen Nqss. der genannten Art beschränken. Ist also $(e_1 \dots e_r, \eta_1 \dots \eta_s)$ ein solches, so müssen alle Einheiten $e_1 \dots e_r$ von geradem Charakter sein. Verkürzt man nämlich das System um $e_1, e_2 \dots e_r$ und fügt dann $e_r, e_{r-1} \dots e_1$ wieder hinzu, so kann nach Satz (6) des § 3 der Grad des Systems nur dann gleich der Anzahl der Einheiten sein, wenn die Hinzufügung jedes e_i den Grad um 1 erhöht, also jedes e_i gerade ist. Nun soll das System irreducibel sein. Da die $e_1 \dots e_r$ sämmtlich geraden Charakters sind, so geht das nur so an, dass nur ein η vorkommt. Die Einheiten des Systems sind also $e_1, e_2 \dots e_{n-1}, \eta$, wo $\eta e_i = e_i \eta = e_i$, $\eta^2 = \eta$, also η der Modul ist. Die charakteristische Gleichung des Systems muss nach Voraussetzung und nach Satz (6) des § 3 die Form haben

$$(x - \xi\eta)^n = 0,$$

wenn ξ den Zahlencoefficienten von η in der allgemeinen Zahl x des Systems bedeutet. $x - \xi\eta$ ist offenbar eine allgemeine Zahl des kleineren Systems $(e_1, e_2 \dots e_{n-1})$, das übrigens ausgeartet ist. Wählt man also in letzterem eine Zahl u hinreichend allgemein, so sind $u, u^2, u^3 \dots u^{n-1}$ sämmtlich $\neq 0$, während $u^n = 0$ ist. $u, u^2 \dots u^{n-1}$ sind sämmtlich linear unabhängig, denn u^j enthält ja sicher weniger Einheiten $e_1, e_2 \dots$ als u^{j-1}, da in dem ausgearteten System $(e_1, e_2 \dots e_{n-1})$ ein $e_i e_j$ nur die vor e_i und e_j kommenden Einheiten enthalten darf (Satz (4) des § 3). Wir können $u^{n-1}, u^{n-2} \dots u^2, u$ direct als die Einheiten $e_1, e_2 \dots e_{n-2}, e_{n-1}$ benutzen und haben wegen $u^i u^j = u^{i+j}$ und $u^n = 0$ die Multiplicationsregeln

$$\begin{aligned} e_i e_j &= e_{i+j-n}, \quad \text{wenn} \quad i + j > n, \\ e_i e_j &= 0 \quad\;\;\;\;\;, \quad \text{wenn} \quad i + j \leqq n. \end{aligned}$$

Offenbar können wir wegen $\eta e_i = e_i \eta = e_i$ diese Regeln auch auf η ausdehnen, sobald wir nur η mit e_n bezeichnen. Demnach gilt der Satz:

(1) *Jedes Nqs., in welchem der Grad der charakteristischen Gleichung gleich der Anzahl der Einheiten ist, setzt sich aus irreducibelen Systemen derselben Art zusammen.*

Ein solches irreducibeles System lässt sich durch passende Wahl seiner Einheiten $e_1 \dots e_n$ *auf die Form bringen, dass jedes* $e_i e_j = e_{i+j-n}$ *oder Null ist, je nachdem* $i + j > n$ *oder* $\leqq n$ *ist.*

Wir werden an einer späteren Stelle finden, dass es Quaternionsysteme dieser Art nicht giebt (siehe § 13). Wir könnten demnach im Vorstehenden die Bezeichnung Nqs. durch System ersetzen.

Dieser Satz ist nicht neu, sondern schon von Study*) aufgestellt

*) Siehe Study I, S. 262, III, S. 310.

und auf ganz anderem Wege bewiesen worden. Diesem Satze lässt sich ein zweiter, neuer, an die Seite stellen, der von den Nqss. handelt, *deren Grad um Eins kleiner als die Anzahl ihrer Einheiten ist.* Man kann nämlich auch die allgemeine Form dieser Systeme angeben.

Ist zunächst ein derartiges Nqs. reducibel, so zerfällt es in lauter irreducibele Systeme des Satzes (1) und ein irreducibeles System der jetzt gesuchten Art. Es folgt dies ohne weiteres aus Satz (5) des § 4. Demnach handelt es sich nur um die Bestimmung der irreducibelen Systeme $(e_1 \dots e_r, \eta_1 \dots \eta_s)$, deren Grad um Eins kleiner als die Anzahl $r+s$ der Einheiten ist. Von den Einheiten $e_1 \dots e_r$ müssen mindestens $r-1$ geraden Charakters sein, nach Satz (6) des § 3. Sind alle geraden Charakters, so ist das System nur dann irreducibel, wenn nur ein η vorkommt, nach Satz (1) des § 5. Ist dagegen eine Einheit e schiefen Charakters, so müssen natürlich wenigstens zwei η auftreten, aber es dürfen nach dem eben genannten Satz auch nicht mehr als zwei vorkommen.

Wir haben demgemäss zwei typische Formen zu unterscheiden, solche mit den Einheiten $e_1 \dots e_{n-1}, \eta$ und solche mit den Einheiten $e_1 \dots e_{n-2}, \eta_1, \eta_2$. Die letzteren bestimmen wir zuerst: Ist e_i in dem System $(e_1 \dots e_{n-2}, \eta_1, \eta_2)$ die (einzige) Einheit schiefen Charakters, so ist jedes Product $e_i e_j$ und $e_j e_i$ frei von ihr und also, da es nach Satz (5) des § 3 schief sein muss, gleich Null. Kein Product der $e_1 \dots e_{n-2}$ unter sich enthält nach diesem Satze e_i. Daher darf e_i als erste Einheit benutzt werden, ohne dass dadurch das Aussehen des Nqs. wesentlich gestört würde. Es ist nun etwa $\eta_1 e_1 = e_1$, $e_1 \eta_2 = e_2$, während $e_1 \eta_1 = \eta_2 e_1 = 0$ ist. Wird das System um e_1 verkürzt, so bleibt, da es schiefen Charakters ist, nach Satz (6) des § 3 die charakteristische Gleichung des Systems die alte. Der Grad ist geblieben, während die Zahl der Einheiten um Eins verringert ist. Das verkürzte System $(e_2 \dots e_{n-2}, \eta_1, \eta_2)$ ist also ein System, dessen Grad gleich der Zahl der Einheiten ist, ein System des Satzes (1). Es zerfällt also in zwei irreducibele Systeme jener Art und darf als bekannt angesehen werden. Die Hinzufügung von e_1 geschieht dann, indem jedes

$$e_1 e_j = e_j e_1 = 0, \quad \eta_1 e_1 = e_1 \eta_2 = e_1, \quad e_1 \eta_1 = \eta_2 e_1 = 0$$

angenommen wird. Damit ist das System $(e_1 \dots e_{n-2}, \eta_1, \eta_2)$ gefunden.

Wenden wir uns zu der anderen typischen Form $(e_1 \dots e_{n-1}, \eta)$ des Systems, wo alle e von geradem Charakter sind. Hier ist $e_i \eta = \eta e_i = e_i$, $\eta^2 = \eta$. Die charakteristische Gleichung des Systems lautet nach Satz (6), § 3, und weil der Grad $n-1$ sein soll:

$$(x - \xi \eta)^{n-1} = 0,$$

wenn wieder ξ den Coefficienten von η in x bedeutet. $x - \xi \eta$ stellt eine allgemeine Zahl des kleineren ausgearteten Systems $(e_1 \dots e_{n-1})$

dar. Ist also u eine allgemein genug gewählte Zahl des letzteren, so sind $u, u^2 \ldots u^{n-2}$ sämmtlich $\neq 0$, während $u^{n-1} = 0$ ist. Auch sind $u, u^2 \ldots u^{n-2}$ sämmtlich linear unabhängig, da jede folgende dieser Potenzen (wenigstens) eine Einheit weniger als die vorhergehende enthält. $u^{n-2}, u^{n-3} \ldots u$ können also als $n-2$ Einheiten gewählt werden und zwar, da ihre Producte unter einander sich nur durch sie selbst ausdrücken, als die $n-2$ ersten. Setzen wir also:

$$e_1 = u^{n-2},\; e_2 = u^{n-3}, \ldots, e_{n-2} = u,$$

so gelten diese Multiplicationsregeln für dieselben:

$$e_i e_j = e_{i+j-n+1} \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $i + j > n-1$ oder $\leqq n-1$ ist. Die $(n-1)^{\text{te}}$ Einheit e_{n-1}, über die noch nicht verfügt ist, werde mit v bezeichnet. uv darf nur die vor u kommenden Einheiten enthalten. Es ist also zunächst zu setzen:

$$uv = a_2 u^2 + a_3 u^3 + \cdots + a_{n-2} u^{n-2}$$

und analog

$$vu = b_2 u^2 + b_3 u^3 + \cdots + b_{n-2} u^{n-2}.$$

Prüfen wir das associative Gesetz $uv \,.\, u = u \,.\, vu$, so kommt, da $u^{n-1} = 0$ ist:

$$uvu = a_2 u^3 + \cdots + a_{n-3} u^{n-2} = b_2 u^3 + \cdots + b_{n-3} u^{n-2}.$$

Also ist $a_2 = b_2, \ldots, a_{n-3} = b_{n-3}$. Indem wir statt v als neue Einheit

$$v - a_2 u - a_3 u^2 - \cdots - a_{n-3} u^{n-4} - \lambda u^{n-3}$$

einführen und λ passend wählen, erreichen wir, dass uv und vu die sehr einfachen Formen annehmen:

$$uv = a u^{n-2}, \quad vu = -a u^{n-2}.$$

Nun ist wegen $u^{n-1} = 0$:

$$u^2 v = v u^2 = 0,$$
$$u^3 v = v u^3 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$

Die Producte von v oder e_{n-1} mit den $n-3$ ersten Einheiten $e_1 \ldots e_{n-3}$ sind also sämmtlich Null. v^2 hat zunächst die Form

$$v^2 = c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_{n-2} u^{n-2}.$$

Hiernach ist wegen $uv^2 = uv \,.\, v$:

$$c_1 u^2 + c_2 u^3 + \cdots + c_{n-3} u^{n-2} = a u^{n-2} v = a^2 u^{2n-5}.$$

Sobald $n > 3$ ist, ist $2n - 5 > n - 2$, also die rechte Seite wegen $u^{n-1} = 0$ gleich Null. Wir wollen den Fall $n = 3$ (kleiner als 3 kann n nicht sein) vor der Hand ausschliessen. Dann ergiebt sich:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-3} = 0$$

und es bleibt etwa

$$v^2 = c u^{n-2}.$$

Weitere Ergebnisse liefert die Prüfung des associativen Gesetzes nicht.

Sicher ist jetzt die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz jeder Zahl x, die sich aus $e_1 \dots e_{n-1}$ allein zusammensetzt, gleich Null. Denn ist

$$x = y + \lambda v$$

eine solche, wo y den Bestandtheil in $e_1 \dots e_{n-2}$, d. h. in $u^{n-2}, u^{n-1} \dots u$ ausdrückt, so ist:

$$x^2 = y^2 + \lambda(yv + vy) + \lambda^2 v^2.$$

Aber da $uv + vu = 0$ und alle $u^k v = vu^k = 0$ für $k > 1$ sind, so ist $yv + vy = 0$. Es bleibt also:

$$x^2 = y^2 + \lambda^2 c u^{n-2}.$$

Danach ist:

$$x^3 = y^3 + \lambda^2 c u^{n-2} y + \lambda y^2 v + \lambda^3 c u^{n-2} v.$$

Hierin sind $u^{n-2}y$ und $u^{n-2}v$ offenbar Null. y^2 enthält u^1 nicht mehr. Demnach ist auch $y^2 v = 0$ und es bleibt

$$x^3 = y^3.$$

Weiter folgt $x^4 = y^4$ u. s. w., schliesslich $x^{n-1} = y^{n-1} = 0$.

Es hatte sich ergeben

$$uv = au^{n-2}, \quad vu = -au^{n-2}, \quad v^2 = cu^{n-2}.$$

Es treten hierin noch 2 Parameter a und c auf. Ist $a \neq 0$, so lässt sich sicher nicht durch Wahl eines neuen u oder v diese Constante gleich Null machen. Denn wenn $a \neq 0$ ist, ist das System nicht durchweg commutativ, wohl aber, wenn $a = 0$ ist. Es lässt sich jedoch $a = 1$ machen, sobald es $\neq 0$ ist. Man braucht zu dem Zweck nur av statt v einzuführen. Eine andere Frage ist, ob c nicht durch passende Benutzung neuer u und v gleich Null gemacht werden kann. Ich will hierauf wegen der mit der Beantwortung verbundenen Rechnungen nicht näher eingehen. Es ergiebt sich, dass die Fälle $c \neq 0$ und $c = 0$ wesentlich verschieden sind. Ist $c \neq 0$, so lässt sich auch dies $= 1$ machen, nur nicht, wenn $n = 4$ ist. Hier bleibt vielmehr c willkürlicher Parameter, sobald $a \neq 0$, also $a = 1$ ist.

Sobald $n > 4$ ist, ergeben sich also 4 wesentlich verschiedene Systeme, entsprechend den Annahmen:

$$a = c = 1; \quad a = 1,\ c = 0; \quad a = 0,\ c = 1; \quad a = c = 0.$$

Im Falle $n = 4$ diese drei:

$$a = 1,\ c \text{ unbestimmt}; \quad a = 0,\ c = 1; \quad a = c = 0.$$

Der bisher ausgeschlossene Fall $n = 3$ ist sehr leicht zu behandeln.

Unser Gesammtergebniss wollen wir in einem Satze aussprechen. Dabei ist es erwünscht, für die Systeme des Satzes (1) eine kurze Bezeichnung zu haben. Ich nenne sie nach *Study'sche Systeme*. Unter

einem Study'schen System ist also ein solches zu verstehen, dessen Grad gleich der Zahl der Einheiten ist. Nun lässt sich so sagen:

(2) *Ist ein Nqs., in welchem der Grad der charakteristischen Gleichung um Eins kleiner als die Anzahl der Einheiten des Systems ist, reducibel, so sind seine irreducibelen Bestandtheile lauter Study'sche Systeme bis auf eines, das wieder die eben angegebene Eigenschaft hat.*

Ein irreducibeles Nqs., in welchem der Grad der charakteristischen Gleichung um Eins kleiner als die Anzahl Einheiten des Systems ist, kann zwei wesentlich verschiedene Formen haben:

Erste Form: Das System wird dadurch gebildet, dass man zwei irreducibele Study'sche Systeme zusammensetzt:

$$(e_1 \ldots e_r, \eta) + (e_1' \ldots e_s', \eta')$$

und eine Einheit e hinzufügt in der Art, dass

$$e e_j = e_j e = e e_j' = e_j' e = 0, \quad \eta e = e \eta' = e, \quad e\eta = \eta' e = 0$$

angenommen wird.

Zweite Form: Das System $(e_1 \ldots e_n)$ genügt den Multiplicationsregeln

$$e_i e_j = e_{i+j-n+1}, \text{ sobald } i + j > n - 1, \; i, j < n - 1,$$
$$e_i e_j = 0, \text{ sobald } i + j \leqq n - 1, \; i, j < n - 1,$$
$$e_i e_{n-1} = e_{n-1} e_i = 0 \text{ für } i < n - 2,$$
$$e_{n-2} e_{n-1} = - e_{n-1} e_{n-2} = a e_1,$$
$$e_{n-1}^2 = b e_1,$$
$$e_n e_i = e_i e_n = e_i \text{ für jedes } e_i.$$

Die Parameter a und b dürfen dabei, sobald $n > 4$ ist, specialisirt werden in einer der 4 Arten:

1) $a = b = 1$,
2) $a = 1$, $b = 0$,
3) $a = 0$, $b = 1$,
4) $a = b = 0$.

Alle 4 Systeme sind wesentlich von einander verschieden. Ist $n = 4$, so darf nur so specialisirt werden:

1) $a = 1$, b *willkürlich*,
2) $a = 0$, $b = 1$,
3) $a = b = 0$.

Ist endlich $n = 3$, so ist zu setzen:

$$a = b = 0.$$

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir hier alle irreducibelen Systeme in 5 Einheiten von der zweiten Form in Gemässheit des Satzes angeben. Es sind die vier:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\
0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 & 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 & 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 & 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\
0 & e_1 & e_2 & -e_1 & e_3 & 0 & e_1 & e_2 & -e_1 & e_3 & 0 & e_1 & e_2 & 0 & e_3 & 0 & e_1 & e_2 & 0 & e_3 \\
0 & 0 & e_1 & e_1 & e_4 & 0 & 0 & e_1 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 .
\end{array}$$

Es ist hier $u = e_3$, $u^2 = e_2$, $u^3 = e_1$, $v = e_4$, $\eta = e_5$.

In § 13 werden wir zeigen, dass es Quaternionsysteme im Fall $k = n - 1$ nicht giebt.

Das bisherige Verfahren kann man auch anwenden, um alle Nqs. zu bestimmen, *deren Grad um zwei kleiner als die Anzahl der Einheiten ist.* Freilich sind die Formen solcher Systeme noch mannigfaltiger. Ist ein derartiges System reducibel, so zerfällt es entweder in lauter Study'sche und zwei Systeme des Satzes (2) oder aber in lauter Study'sche und ein irreducibeles System der eben jetzt gesuchten Art. Es folgt dies alles aus Satz (5) des § 4. Es handelt sich demnach nur darum, alle irreducibelen Nqss. zu bestimmen, deren Grad um zwei kleiner als die Anzahl ihrer Einheiten ist. Nach Satz (6), § 3, besitzt ein solches entweder 2 oder 1 oder 0 schiefe Einheiten. Diese drei Möglichkeiten betrachten wir nach einander.

A) Das System besitze zwei schiefe Einheiten. Nach Satz (1), § 5, kann es wegen seiner Irreducibilität höchstens drei Einheiten η besitzen und es muss andererseits wenigstens zwei solche haben.

α) Das System besitze drei Einheiten η: η_1, η_2, η_3. Sind e und e' die schiefen Einheiten, so sind sie entweder vom Charakter

$$\alpha_1)\ e = (\alpha\beta), \quad e' = (\alpha\gamma)$$

oder vom Charakter

$$\alpha_2)\ e = (\alpha\beta), \quad e' = (\beta\gamma).$$

Alle Möglichkeiten sind offenbar hierin enthalten, wenn α, β, γ die Zahlen $1, 2, 3$ in irgend welcher Reihenfolge bedeuten. Die übrigen Einheiten e_i sind theils vom Charakter $(\alpha\alpha)$, theils $(\beta\beta)$, theils $(\gamma\gamma)$. Nach Satz (5), § 3, sind die Producte dieser e_i unter sich frei von e und e'. Ihre Producte mit e und e' sind Null, denn z. B. $(\alpha\beta)(\beta\beta)$ ist zwar vom Charakter $(\alpha\beta)$, da aber nur eine schiefe Einheit e dieser Art vorkommt und jedes $e_i e_j$ frei von e_i und e_j sein muss, so ist $(\alpha\beta)(\beta\beta) = 0$, u. s. w. Die Producte e^2, ee', $e'e$, e'^2 sind alle vier gleich Null. Demnach können e und e' als die beiden ersten Einheiten e_1, e_2 gewählt werden. Wenn dann das ganze System $(e_1, e_2 \ldots e_{n-3}, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ um e_1 und e_2 verkürzt wird, so bleibt nach Satz 6, § 3, die

charakteristische Gleichung des Systems unverändert, während die Zahl der Einheiten um 2 verringert wird. Das verkürzte System ($e_3 \dots e_{n-3}$, η_1, η_2, η_3) ist demnach ein System des Satzes (1) und zerfällt in drei irreducibele Study'sche Systeme. Es darf als bekannt angesehen werden. Die nachträgliche Hinzufügung von e_1 und e_2 geschieht so, dass alle Producte derselben unter sich und mit $e_3 \dots e_{n-3}$ gleich Null angenommen werden, ferner entweder

$$\eta_1 e_1 = e_1 = e_1 \eta_2, \quad \eta_1 e_2 = e_2 = e_2 \eta_3$$

oder

$$\eta_1 e_1 = e_1 = e_1 \eta_2, \quad \eta_2 e_2 = e_2 = e_2 \eta_3$$

gesetzt wird, während alle anderen Producte von e_1 und e_2 mit den η gleich Null sind.

β) Das System habe nur zwei Einheiten η: η_1 und η_2. Die schiefen Einheiten e und e' haben dann entweder die Charaktere

$$\beta_1) \; e = (\alpha\beta), \quad e' = (\alpha\beta)$$

oder aber

$$\beta_2) \; e = (\alpha\beta), \quad e' = (\beta\alpha),$$

wo α, β die Zahlen 1, 2 in irgend welcher Reihenfolge bedeuten. Die übrigen Einheiten e_i sind theils vom Charakter $(\alpha\alpha)$, theils vom Charakter $(\beta\beta)$. Ihre Producte unter einander sind frei von e und e'. Im Falle β_1) sind ihre Producte mit e und e' gleich Null oder enthalten nur e und e'. Im Falle β_2) dagegen sind sie alle Null. Andererseits sind im Falle β_1) die Producte von e, e' unter sich Null, während sie sich im Fall β_2) auch durch gerade Einheiten ausdrücken können, denn es ist $(\alpha\beta)(\beta\alpha) = (\alpha\alpha)$. Hieraus folgt, dass nur bei der Annahme β_1) e und e' von vornherein als die beiden ersten Einheiten des Systems angenommen werden dürfen. Die beiden Fälle werden deshalb gesondert betrachtet:

β_1) e und e' wählen wir als die beiden ersten Einheiten e_1 und e_2. Wird das System um e_1 und e_2 gekürzt, so hat das verbleibende System ($e_3 \dots e_{n-2}$, η_1, η_2) doch noch nach Satz 6 des § 3 die alte charakteristische Gleichung, während die Zahl der Einheiten um zwei verringert ist. Das verkürzte System ist also eins des Satzes (1) und zerfällt in zwei irreducibele Study'sche Systeme $\overline{S}$ und $\overline{\overline{S}}$, deren Einheiten wir zur Unterscheidung besonders bezeichnen:

$$\overline{S} : \overline{e}_1 \dots \overline{e}_r, \eta_1; \quad \overline{\overline{S}} : \overline{\overline{e}} \cdots \overline{\overline{e}}_t, \eta_2.$$

$(r + t = n - 4)$. Nun sind e_1 und e_2, die schiefen Einheiten, wieder hinzuzufügen. Die Producte von e_2 mit den geraden Einheiten $\overline{e}_1 \dots \overline{e}_r$, $\overline{\overline{e}}_1 \dots \overline{\overline{e}}_t$ können zunächst e_1 enthalten. Alle anderen Producte der $\overline{e}$ und $\overline{\overline{e}}$ mit e_1, e_2 dagegen sind sicher Null. Aber auch die $\overline{e} e_2$ und

$e_2\bar{\bar{e}}$ müssen fast sämmtlich Null sein. Denn: Im Study'schen System $\bar{S}$ bestehen die Multiplicationsregeln:

$$\bar{e}_i\bar{e}_j = \bar{e}_{i+j-(r+1)},$$

sobald $i+j > r+1$ ist, und im System $\bar{\bar{S}}$ analog:

$$\bar{\bar{e}}_i\bar{\bar{e}}_j = \bar{\bar{e}}_{i+j-(t+1)},$$

sobald $i+j > t+1$ ist. (Vgl. Satz (1)). Wäre nun

$$\bar{e}_i e_2 = \lambda_i e_1, \quad e_2\bar{\bar{e}}_i = \mu_i e_1,$$

so käme:

$$\bar{e}_i\bar{e}_j \,.\, e_2 = e_{i+j-(r+1)}e_2 = \lambda_{i+j-(r+1)}e_1 = \bar{e}_i \,.\, \bar{e}_j e_2 = \bar{e}_i \,.\, \lambda_j e_1 = 0,$$

sobald $i+j > r+1$ ist. Also sind alle $\lambda = 0$, deren zugehörige $\bar{e}$ als Producte $\bar{e}_i\bar{e}_j$ vorkommen, d. h. alle mit Ausnahme des letzten. Es bleibt daher nur $\bar{e}_r e_2 = \lambda e_1$ und ganz analog $e_2\bar{\bar{e}}_t = \mu e_1$. Sobald λ oder μ nicht Null ist, darf es offenbar $=1$ gesetzt werden. Alle anderen Producte mit e_1 und e_2 sind gleich Null zu setzen mit Ausnahme von

$$\eta_1 e_1 = e_1 = e_1\eta_2, \quad \eta_1 e_2 = e_2 = e_2\eta_2.$$

β_2) In diesem Falle dürfen wir e und e' nicht als die beiden ersten Einheiten annehmen, da die ee' und $e'e$ gerade Einheiten enthalten können. Aber die geraden Einheiten bilden zusammen mit η_1 und η_2 ein in sich geschlossenes Zahlensystem. Dies wäre zu bestimmen. Zunächst lässt sich zeigen, dass die charakteristische Gleichung desselben die des ganzen Systems ist. Zu diesem Zwecke sind fürs Nächste einige besondere Bezeichungen am Platze: Die geraden Einheiten bilden mit η_1 und η_2 ein natürlich reducibles System, indem die geraden Einheiten vom Charakter (11): $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_r$ mit η_1 und die geraden Einheiten vom Charakter (22): $\bar{\bar{e}}_1 \dots \bar{\bar{e}}_t$ mit η_2 je ein geschlossenes System darstellen. In einer allgemeinen Zahl x des ganzen unter β_2) gesuchten Systems möge $\bar{x}$ der durch $\bar{e}_1 \dots \bar{e}_r$, $\bar{\bar{x}}$ der durch $\bar{\bar{e}}_1 \dots \bar{\bar{e}}_t$ ausgedrückte Bestandtheil, ξ_1 der Coefficient von η_1, ξ_2 der von η_2, z der von e, z' der von e' sein, sodass

$$x = \bar{x} + \bar{\bar{x}} + ze + z'e' + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

ist. Sei nun

$$(x - \xi_1\varepsilon)^p\,(x - \xi_2\varepsilon)^q = 0$$

die charakteristische Gleichung des ganzen Systems. ee' hat den Charakter (11), $e'e$ den Charakter (22), während $e^2 = e'^2 = 0$ ist. Sei etwa noch

$$ee' = \bar{e}_i, \quad e'e = \bar{\bar{e}}_j.$$

Alsdann ist, wenn noch

$$\bar{x} + \bar{\bar{x}} + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = u$$

gesetzt wird:

$$(x-\xi_1\varepsilon)(x-\xi_2\varepsilon) = (u+ze+z'e'-\xi_1\varepsilon)(u+ze+z'e'-\xi_2\varepsilon)$$
$$= (u-\xi_1\varepsilon)(u-\xi_2\varepsilon) + zz'(\bar{e}_i + \bar{\bar{e}}_j).$$

Dieser Ausdruck ist gänzlich frei von den schiefen Einheiten. Gerade Einheiten geben mit e und e' multiplicirt Null. Wenn also der vorstehende Ausdruck mit $(x - \xi_1\varepsilon)$ multiplicirt werden soll, so braucht er nur mit $(u-\xi_1\varepsilon)$ multiplicirt zu werden, da das Uebrige verschwindet. Hiernach ergiebt sich allgemein:

$$\text{(a)} \qquad (x-\xi_1\varepsilon)^p(x-\xi_2\varepsilon)^q = (u-\xi_1\varepsilon)^p(u-\xi_2\varepsilon)^q$$
$$+ zz'(u-\xi_1\varepsilon)^{p-1}(u-\xi_2\varepsilon)^{q-1}(\bar{e}_i + \bar{\bar{e}}_j).$$

Die Einheiten $ee' = \bar{e}_i$ und $e'e = \bar{\bar{e}}_j$ geben mit allen geraden Einheiten zum Product Null, da e und e' mit den geraden die Producte Null liefern. Sobald p und $q > 1$ sind, wird aber $\bar{e}_i + \bar{\bar{e}}_j$ in vorstehendem Ausdruck sicher mit $(u-\xi_1\varepsilon)(u-\xi_2\varepsilon)$ multiplicirt, und letzteres enthält nur gerade Einheiten und ist auch frei von η_1 und η_2. Demnach muss das Product Null sein. Sobald also p und $q > 1$ sind, ist:

$$(x-\xi_1\varepsilon)^p(x-\xi_2\varepsilon)^q = (u-\xi_1\varepsilon)^p(u-\xi_2\varepsilon)^q.$$

Die linke Seite stellt gleich Null gesetzt die charakteristische Gleichung des ganzen Systems dar. Also ist auch

$$(u-\xi_1\varepsilon)^p(u-\xi_2\varepsilon)^q = 0$$

die charakteristische Gleichung des um e und e' verkürzten Systems, denn u ist eine allgemeine Zahl desselben und die letztere Gleichung zieht die erstere charakteristische Gleichung nach sich. Dies gilt, wenn p und $q > 1$ sind. Wäre die charakteristische Gleichung des um e und e' verkürzten Systems diese:

$$(u-\xi_1\varepsilon)^\pi(u-\xi_2\varepsilon) = 0,$$

so würde das heissen, dass das System $(\bar{\bar{e}}_1 \ldots \bar{\bar{e}}_t, \eta_2)$ überhaupt keine Einheit $\bar{\bar{e}}$ besässe, d. h. es kämen keine geraden Einheiten vom Charakter (22) vor und es wäre auch $\bar{\bar{e}}_j = e'e = 0$. Dann aber ist nach (a):

$$(x-\xi_1\varepsilon)^\pi(x-\xi_2\varepsilon) = (u-\xi_1\varepsilon)^\pi(u-\xi_2\varepsilon) + zz'(u-\xi_1\varepsilon)^{\pi-1}\bar{e}_i.$$

Hierin ist jedoch $(u-\xi_1\varepsilon)^{\pi-1}\bar{e}_i = 0$, sobald $\pi > 1$ ist. Also ist auch

$$(x-\xi_1\varepsilon)^\pi(x-\xi_2\varepsilon) = 0.$$

Wenn endlich die charakteristische Gleichung des verkürzten Systems $(\bar{e}, \bar{\bar{e}}, \eta_1, \eta_2)$ lautet

$$(u-\xi_1\varepsilon)(u-\xi_2\varepsilon) = 0,$$

so heisst dies, dass gar keine $\bar{e}$ und $\bar{\bar{e}}$ vorkommen, das ganze System also aus den 4 Einheiten besteht. — In jedem Falle ist also, wie

behauptet wurde, die charakteristische Gleichung des ganzen Systems genau dieselbe wie die des aus allen geraden Einheiten und η_1 und η_2 bestehenden kleineren Systems. Letzteres hat zwei Einheiten, nämlich e und e', weniger, während der Grad der charakteristischen Gleichung der alte ist. Das um e und e' verkürzte System ist daher ein System des Satzes (1) und zerfällt in zwei irreducibele Study'sche Systeme $(\bar{e}, \eta_1)$ und $(\bar{\bar{e}}, \eta_2)$. Zu diesen sind e und e' hinzuzufügen, indem alle Producte der $\bar{e}$ und $\bar{\bar{e}}$ mit ihnen gleich Null anzunehmen sind, während auch $e^2 = e'^2 = 0$ ist. Wohl aber kann ee' einer geraden Einheit $\bar{e}$ gleich gesetzt werden, welche mit allen Einheiten $\bar{e}$ des Study'schen Systems $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_r, \eta_1)$ multiplicirt Null giebt. Dies irreducibele System enthält nur eine solche, nämlich $\bar{e}_1$. Es ist also $ee' = \bar{e}_1$ oder 0 zu setzen. Entsprechend $e'e = \bar{\bar{e}}_1$ oder 0, während:

$$\eta_1 e = e = e\eta_2, \quad \eta_2 e' = e' = e'\eta_1$$

und alle anderen Producte von e und e' mit η_1 und η_2 gleich Null sind.

B) Das gesuchte System besitze eine schiefe Einheit. Da es irreducibel sein soll, hat es dann gerade zwei η: η_1, η_2. (Vgl. Satz (1), § 5). Die schiefe Einheit giebt mit allen geraden multiplicirt Null, ebenso wie ihr Quadrat verschwindet. Sie kann daher als erste Einheit e_1 benutzt werden. Die übrigen Einheiten $e_2 \dots e_{n-2}, \eta_1, \eta_2$ bilden für sich ein System mit derselben charakteristischen Gleichung — nach Satz (6) des § 3 —, aber einer Einheit weniger. Da die $e_1 \dots e_{n-2}$ sämmtlich gerade sind, so zerfällt es also in zwei irreducibele Systeme, von denen das eine ein Study'sches, das andere ein System 2ter Form des Satzes (2) sein muss. e_1 wird dann hinzugefügt, indem

$$\eta_1 e_1 = e_1 \eta_2 = e_1,$$

sonst aber alle Producte mit e_1 gleich Null gesetzt werden.

C) Das System besitze keine schiefe Einheit, also, da es irreducibel sein soll, nur eine Einheit η. Die charakteristische Gleichung des jetzigen Systems $(e_1 \dots e_{n-1}, \eta)$ lautet

$$(x - \xi\varepsilon)^{n-2} = 0,$$

wenn ξ den Coefficienten von $\eta = \varepsilon$ in der allgemeinen Zahl x des Systems bedeutet, d. h. die $(n-2)^{\text{te}}$ Potenz jeder Zahl des kleineren ausgearteten Systems $(e_1 \dots e_{n-1})$ ist Null. Ist also u eine allgemein genug gewählte Zahl desselben, so sind $u, u^2 \dots u^{n-3}$ sämmtlich verschieden von Null und — wie in früheren analogen Fällen — linear unabhängig von einander. Sie können daher als $n-3$ der Einheiten $e_1, e_2 \dots e_{n-1}$ benutzt werden. Ihre Productregeln sind bekannt, da $u^i u^j = u^{i+j}$ und $u^{n-2} = 0$ ist. Ausser ihnen werden wir noch zwei Zahlen v und w als Einheiten des Systems $(e_1 \dots e_{n-1})$ zu benutzen haben. Nun aber wissen wir noch nicht, in welcher Reihenfolge diese $n-1$ Einheiten

angeordnet werden müssen. Nur das ist bekannt, dass u^i eine spätere Einheit als u^{i+1} ist, und überdies darf angenommen werden, dass v vor w kommt. Dann bilden aber u, $u^2 \dots u^{n-3}$ und v für sich ein System (natürlich ein ausgeartetes), denn die Producte mit v dürfen w nicht enthalten. Für dies System aus $n-2$ Einheiten können wir unmittelbar das benutzen, was sich bei Ableitung des Satzes (2) ergab. Wir dürfen annehmen:

$$uv = -vu = au^{n-3}, \quad v^2 = bu^{n-3}.$$

Sobald $n > 5$ ist, darf $a = 1, 0$; $b = 1, 0$ specialisirt werden. Wenn $n = 5$ ist, so ist entweder nur $a = 1$ zu specialisiren oder $a = 0$, $b = 1, 0$. Ist $n = 4$, so ist $a = b = 0$. Nun tritt noch die Einheit w hinzu, die zwar nach v, aber vielleicht vor u, $u^2 \dots$ auftritt. Wir können über ihre Producte vorerst nur dieses aussagen: uw und wu sind frei von u und w, vw und wv frei von v und w, w^2 ist frei von w. In ganz ähnlicher Weise, wie wir zur Aufstellung der zweiten Form von Systemen in Satz (2) gelangten, kann man hier verfahren und dadurch die Producte von w mit den anderen Einheiten einfach gestalten. Man findet, dass sich w so wählen lässt, dass die Producte mit w nur von u^{n-3}, u^{n-4} und v abhängen.

Jedoch eines näheren Eingehens auf die Berechnung will ich mich enthalten, einmal weil der Umfang derselben, ohne doch eigentliche Schwierigkeiten zu bieten, ziemlich gross ist und dann, weil schliesslich einige Parameter übrig bleiben, deren Specialisirung wie bei anderen analogen Problemen einen Rechenaufwand erfordert, der in keinem Verhältniss zur Wichtigkeit des Ergebnisses steht. Jedenfalls kann man nach der auf den letzten Seiten gegebenen Anleitung alle Nqss. in n Einheiten angeben, deren Grad $n-2$ ist. Wir sprechen daher den Satz aus:

(3) *Man kann die verschiedenen Typen aller Nichtquaternionsysteme in beliebig vielen Einheiten angeben, in welchen der Grad der charakteristischen Gleichung um zwei geringer ist als die Anzahl der Einheiten.*

Es erscheint nicht ausgeschlossen, dass man auf eben diesem Wege auch alle Nqss. wird bestimmen können, deren Grad um 3 kleiner als die Zahl der Einheiten ist, u. s. w. Allerdings wird der Natur der Sache nach die Anzahl der zu betrachtenden Einzelfälle eine noch viel grössere werden.

§ 7.

Die Nichtquaternionsysteme, deren Grad gleich zwei ist.

Auch für die Nichtquaternionsysteme, deren Grad gleich zwei ist, ergeben sich aus den allgemeinen Sätzen der §§ 3 und 5 mehrere Folgerungen.

Die charakteristische Gleichung eines solchen Nqs. ist quadratisch und hat demnach entweder zwei gleiche oder zwei verschiedene Factoren, d. h. es kommt entweder nur ein η oder es kommen zwei η vor.

Enthält das System zunächst zwei η: η_1 und η_2, so lautet die charakteristische Gleichung:

$$(x-\xi_1 \varepsilon)\,(x-\xi_2 \varepsilon) = 0,$$

wo ξ_1 und ξ_2 die Coefficienten von η_1 und η_2 in x bedeuten. Unter den Einheiten e des Systems sind allgemein solche vom Charakter (11), dann solche vom Charakter (12), ferner (21) und endlich (22), sodass die Zahl x die Form hat:

$$x = (11) + (12) + (21) + (22) + \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 .$$

Dies giebt in die Gleichung des Systems eingesetzt, da $\varepsilon = \eta_1 + \eta_2$ ist:

$$[(11) + (12) + (21) + (22) + (\xi_2 - \xi_1)\eta_2] \cdot$$
$$\cdot [(11) + (12) + (21) + (22) + (\xi_1 - \xi_2)\eta_1] = 0$$

oder ausmultiplicirt, da $\eta_a(ab) = (ab)$, $\eta_a(ba) = 0$ für $b \neq a$ u. s. w. ist:

$$[(11)+(12)+(21)+(22)]^2 + (\xi_1 - \xi_2)\,[(11) + (21) - (21) - (22)] = 0.$$

Hier kommen ξ_1 und ξ_2 nur in $\xi_1 - \xi_2$ vor. Die Gleichung muss für alle Werthe derselben richtig sein. Daher zerfällt sie in:

$$[(11) + (12) + (21) + (22)]^2 = 0$$

und

$$(11) - (22) = 0.$$

Es ist also nach der letzten jedes $(11) = (22) = 0$. Das System enthält also gar keine geraden Einheiten. Daher bleibt nun

$$[(12) + (21)]^2 = 0.$$

Dies ist dann jedoch selbstverständlich, denn es ist jetzt jedes $(ab)^2 = 0$, $(ab)\,(ba) = (aa) = 0$.

Wir erhalten somit alle Systeme der gesuchten Art, indem wir zu η_1 und η_2 lauter schiefe Einheiten vom Charakter (12) und (21) hinzufügen und ihre Producte unter einander gleich Null setzen. Die Einheiten lassen sich beliebig anordnen. Wir werden das System in dieser Form schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & e_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & e_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & e_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & e_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & e_i \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & e_{i+1} & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & e_{n-2} & 0 \\
\hline
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & \cdot & e_i & 0 & \cdot & 0 & e_{n-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & e_{i+1} & \cdot & e_{n-2} & 0 & e_n
\end{array}$$

Hierin sind die Querstriche zur besseren Uebersicht gezogen, indem sie die Producte der schiefen Einheiten unter sich, also der $e_1 \dots e_{n-2}$, von denen mit $\eta_1 = e_{n-1}$ und $\eta_2 = e_n$ trennen.

Für $n = 3$ z. B. haben wir nur das eine irreducibele System:

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & e_1 \\
\hline
e_1 & e_2 & 0 \\
0 & 0 & e_3
\end{array}$$

Für $n = 4$ ergeben sich diese beiden irreducibelen Typen:

$$\begin{array}{cc|cc}
0 & 0 & 0 & e_1 \\
0 & 0 & 0 & e_2 \\
\hline
e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc}
0 & 0 & 0 & e_1 \\
0 & 0 & e_2 & 0 \\
\hline
e_1 & 0 & e_3 & 0 \\
0 & e_2 & 0 & e_4
\end{array}$$

Enthält das gesuchte System nur ein η, so ergeben sich leider nicht so einfache Typen. In diesem Falle lautet die charakteristische Gleichung unsers Systems $(e_1 \dots e_{n-1}, \eta)$:

$$(x - \xi\eta)^2 = 0$$

und sagt aus, dass das Quadrat jeder Zahl des ausgearteten Systems $(e_1 \dots e_{n-1})$ verschwinden soll. Demnach ist jedes $e_i^2 = 0$. Aus $(e_i + e_j)^2 = 0$ folgt ferner:

$$e_i e_j + e_j e_i = 0.$$

Hiernach ist das System $(e_1 \dots e_{n-1})$ ein sogenanntes *alternirendes* Zahlensystem, indem allgemein in demselben $x \,.\, y = - y \,.\, x$ ist. Die allgemeine Form eines solchen Systems können wir bis auf eine Anzahl willkürliche, keiner Beschränkung unterworfene Parameter bestimmen. Es ist nämlich jetzt:

$$e_i(e_je_l) = -e_i(e_le_j) = -(e_ie_l)e_j = (e_le_i)e_j = e_l(e_ie_j) = -e_le_je_i$$
$$= (e_ie_j)e_l = -e_l(e_ie_j) = e_l(e_je_i) = e_le_je_i,$$

d. h. es ist jedes
$$e_le_je_i = 0.$$

Wenn also im System $(e_1 \dots e_{n-1})$ ein Product xy nicht selbst Null ist, so giebt es doch mit jeder Zahl dieses Systems multiplicirt Null. Bilden wir alle Producte xy, so drücken sie sich sämmtlich durch weniger als die $n-1$ Einheiten $e_1 \dots e_{n-1}$ aus, denn e_{n-1} kommt sicher in ihnen nicht vor. Die Einheiten nun, durch die sie sich ausdrücken, können als die ersten benutzt werden, da ihre Producte mit allen Zahlen des ausgearteten Systems Null sind. Demnach hat das System $(e_1 \dots e_{n-1})$ die Form: Die Einheiten $e_1 \dots e_m (0 \leqq m < n)$ geben mit allen $e_1 \dots e_{n-1}$ multiplicirt Null. Die Quadrate der $e_{r+1} \dots e_{n-1}$ sind ebenfalls Null. Als Product $e_{m+i}e_{m+j}$ kann man einen beliebigen linearen Ausdruck der $e_1 \dots e_m$ hinschreiben, doch muss man dann als Product $e_{m+j}e_{m+i}$ den negativen Werth desselben benutzen. Das so gewonnene System wird dann noch um $\eta = e_n$ vergrössert, indem jedes $e_ne_i = e_ie_n = e_i$ und $e_n^2 = e_n$ gesetzt wird.

Das erhaltene System besitzt allerdings noch eine Anzahl willkürlicher Constanten in den beliebig angenommenen Producten $e_{m+i}e_{m+j}$. Freilich sind diese Constanten keinerlei Bedingungen mehr unterworfen, dennoch lassen sie sich ganz oder theilweise dadurch specialisiren, dass man statt der Einheiten passende lineare Combinationen derselben einführt. Die Zahl m der in den Producten auftretenden Einheiten ist an eine gewisse obere Grenze gebunden. Denn die Zahlen $e_{m+1} \dots e_{n-1}$ bilden mit einander $(n-1-m)^2$ Producte. Die $n-1-m$ Quadrate e_{m+i}^2 sind Null und von den Producten $e_{m+i}e_{m+j}$ sind je zwei einander entgegengesetzt gleich. Es verbleiben also nur $\frac{1}{2}[(n-1-m)^2-(n-1-m)]$ verfügbare Producte, während $e_1 \dots e_m$ sämmtlich reproducirt werden sollen, m muss daher $\leqq$ der Zahl jener Producte sein, woraus fliesst:

$$m \leqq \frac{2n-1-\sqrt{8n-7}}{2}.$$

Ist $n=2$ oder 3, so kommt $m=0$; für $n=4$ oder 5 ist $m=0$ oder 1, u. s. w.

Einige Beispiele sollen die Theorie erläutern. Für $n=2, 3$ ergeben sich, da hier $m=0$ ist, also keine Einheit $e_1 \dots e_{n-1}$ reproducirt wird:

$$\begin{array}{c|c} 0 & e_1 \\ \hline e_1 & e_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 \end{array}$$

Für $n = 4$ oder 5 folgt, wenn $m = 0$ ist:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array},$$

dagegen, wenn $m = 1$ ist, also e_1 reproducirt wird:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & -e_1 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}.$$

In allen Beispielen ist η die letzte der Einheiten.

Noch eine Bemerkung zu den zuerst bestimmten Systemen, deren charakteristische Gleichung zwei verschiedene Factoren besass, möge hier ausgesprochen werden: Es ergab sich, dass die Einheiten $e_1 \dots e_r$ eines solchen Systems sämmtlich schiefen Charakters sein müssen. Wenn umgekehrt alle schief sind, so folgt aus Satz (6) des § 3 sofort, dass die charakteristische Gleichung die gewünschte Form hat:

$$(x - \xi_1 \varepsilon)(x - \xi_2 \varepsilon) = 0.$$

Man kann nun zeigen, *dass allgemein ein Nqs.* $(e_1 \dots e_r, \eta_1 \dots \eta_s)$ *dessen charakteristische Gleichung lauter verschiedene Factoren hat, d. h. dessen Grad* $k = s$, *der Anzahl der* η, *ist, nur Einheiten schiefen Charakters* $e_1 \dots e_r$ *besitzt.* Die charakteristische Gleichung eines derartigen Systems hat nämlich die Form:

$$(x - \xi_1 \varepsilon)(x - \xi_2 \varepsilon) \cdots (x - \xi_s \varepsilon) = 0.$$

Hierin bedeutet x eine allgemeine Zahl. Es sei etwa:

$$x = u + \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \cdots + \xi_s \eta_s,$$

wo also u der Ausdruck in $e_1 \dots e_r$ allein sein soll. Da der Modul $\varepsilon = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_s$ ist, so folgt, dass die Factoren der charakteristischen Gleichung sich so schreiben lassen:

$$\begin{array}{l} x - \xi_1 \varepsilon = u + \quad \cdot \quad + (\xi_2 - \xi_1)\eta_2 + (\xi_3 - \xi_1)\eta_3 + \cdots + (\xi_s - \xi_1)\eta_s, \\ x - \xi_2 \varepsilon = u + (\xi_1 - \xi_2)\eta_1 + \quad \cdot \quad + (\xi_3 - \xi_2)\eta_3 + \cdots + (\xi_s - \xi_2)\eta_s, \\ x - \xi_3 \varepsilon = u + (\xi_1 - \xi_3)\eta_1 + (\xi_2 - \xi_3)\eta_2 + \quad \cdot \quad + \cdots + (\xi_s - \xi_3)\eta_s, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x - \xi_s \varepsilon = u + (\xi_1 - \xi_s)\eta_1 + (\xi_2 - \xi_s)\eta_2 + (\xi_3 - \xi_s)\eta_3 + \cdots + \quad \cdot \quad . \end{array}$$

Da nun $\eta^k \eta_l = 0$ ist, sobald $k \neq l$, so hat ξ_1^{s-1} in der charakteristischen Gleichung der Coefficienten:

$$u\eta_1 - (\eta_2 + \eta_3 + \cdots + \eta_s)\left(u\eta_1 + (s-3)\eta_1 u\eta_1 + \eta_1 u\right)$$

oder:

$$u\eta_1 - (\varepsilon - \eta_1)\left(u\eta_1 + (s-3)\eta_1 u\eta_1 + \eta_1 u\right)$$

oder also $\eta_1 u\eta_1$. Analog hat ξ_k^{s-1} den Coefficienten $\eta_k u\eta_k$. Da nun diese Coefficienten verschwinden müssen, so ist jedes

$$\eta_k u\eta_k = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, s).$$

Mit andern Worten: Es kommt keine gerade Einheit vor. Wäre nämlich e_i eine solche, so wäre für ein bestimmtes k:

$$\eta_k e_i \eta_k = e_i$$

und nicht Null.

§ 8.

Bestimmung aller irreducibelen Nichtquaternionsysteme in 2, 3, 4, 5 Einheiten.

Die Hülfsmittel, welche wir in den beiden vorhergehenden Paragraphen gewonnen haben, reichen völlig aus, um alle Nqss. in 2, 3, 4, 5 Einheiten ohne grosse Mühe aufzustellen. Doch dürfen wir uns auf die Bestimmung aller irreducibelen Systeme beschränken, da aus diesen die reducibelen in Gemässheit des § 4 ohne weiteres zusammengestellt werden können.

Die Systeme, welche sich hierbei ergeben, stellen wir im folgenden § 9 übersichtlich zusammen. Auf diese Zusammenstellung beziehen sich unten die römischen Ziffern. Wir werden nämlich das System in 2 Einheiten mit II_1, die in 3 Einheiten fortlaufend mit III_1, III_2 etc. bezeichnen.

Sei zunächst die Zahl der Einheiten:

$$n = 2.$$

Der Grad ist 2 und das System hat also nach Satz (1) des § 6 oder nach den Ausführungen des § 7 nur die eine typische Form II_1.

Ist die Zahl der Einheiten

$$n = 3,$$

so kann der Grad des Systems gleich 3 oder 2 sein. Die erste Annahme giebt nach Satz (1) des § 6 das System III_1. Die zweite Annahme liefert nach Satz (2) desselben oder auch nach § 7 die beiden Typen III_2 und III_3.

$$n = 4.$$

Hat das System 4 Einheiten, so ist sein Grad gleich 4, 3 oder 2. Die beiden ersten Annahmen geben nach den Sätzen (1) und (2) des § 6 die Typen IV_1, IV_2, IV_3, IV_4, IV_5. Ist der Grad gleich 2, so

können wir die Betrachtungen des § 6 benutzen, die zu Satz (3) führten. Bequemer ist jedoch die Benutzung des § 7, der sofort die Typen IV_6, IV_7, wenn zwei η auftreten, IV_8, IV_9, wenn nur ein η vorkommt, ergiebt.

Somit sind alle irreducibelen Nqss. in 2, 3, 4 Einheiten fast ohne Rechnung aus unseren allgemeinen Sätzen abgeleitet.

Nicht ganz so kurz ist die Bestimmung der irreducibelen Nqss. in 5 Einheiten. Dies hat einmal seinen Grund darin, dass sich in diesem Fall eine bedeutend grössere Anzahl von Systemen ergiebt, andererseits darin, dass wir die Betrachtungen des § 6, die zu Satz (3) führten, in einem Falle — dem Fall C) — nicht völlig abschliessend behandelt haben. Aber auch für $n = 5$ ist die folgende Bestimmung der Nqss. verhältnissmässig kurz.

Sei also die Zahl der Einheiten

$$n = 5,$$

so kann der Grad des Systems gleich 5, 4, 3, 2 sein. Der erste Fall liefert nach Satz (1) des § 6 den Typus V_1. Ist der Grad 4, so giebt Satz (2) desselben Paragraphen eine Anzahl von Systemen: Zunächst Systeme erster Art: Ist e_1 die schiefe Einheit, so besteht das System (e_2, e_3, e_4, e_5) aus zwei irreducibelen Study'schen; das eine hat 3, das andere 1 oder aber beide haben je 2 Einheiten. Dies giebt, wenn die beiden η mit e_4 und e_5 bezeichnet werden, die Typen V_2 und V_3. Kommt keine schiefe Einheit vor, so ergeben sich 4 Systeme zweiter Art: V_4, V_5, V_6, V_7.

Ist der Grad gleich $3 = 5 - 2$, so liegt der Fall vor, auf welchen sich Satz (3) des § 6 bezieht. Wir haben daher die vor jenem Satz aufgestellten einzelnen Möglichkeiten — mit derselben Bezeichnung A, α, β u. s. w. — einzeln zu betrachten.

A) Das System hat 2 schiefe Einheiten.

α) Es hat drei η: e_3, e_4, e_5. Dies giebt die Typen V_8 und V_9.

β) Es hat zwei η: e_4, e_5. Zwei Annahmen β_1) und β_2) sind zu machen. Im Fall β_1) können die schiefen Einheiten als e_1 und e_2 gewählt werden. (e_3, e_4, e_5) ist dann aus zwei irreducibelen Study'schen Systemen zusammengesetzt und $e_3 e_2 = e_1$ oder 0, sodass sich die beiden Typen V_{10} und V_{11} ergeben. Im Fall β_2) bilden e_4, e_5 mit der geraden Einheit, die als e_1 angenommen werden kann, zwei irreducibele Study'sche Systeme und das eine Product der schiefen Einheiten e_2, e_3 ist gleich e_1 oder 0, das andere 0. Dies liefert die Typen V_{12} und V_{13}.

B) Das System besitzt eine schiefe Einheit und also zwei η: e_4, e_5. Die schiefe Einheit kann als e_1 gewählt werden. (e_2, e_3, e_4, e_5) ist reducibel auf ein Study'sches und ein System zweiter Form des

Satzes (2), § 6. Da letzteres mindestens 3 Einheiten hat, so seien e_2, e_3, e_5 dieselben. Dann ist V_{14} der Typus.

C) Dieser Fall ist der oben nicht völlig erledigte. Das System besitzt keine schiefe Einheit, also nur ein η: e_5. (e_1, e_2, e_3, e_4) ist ein ausgeartetes System von Zahlen, die früher mit u, u^2, v, w bezeichnet wurden. In demselben ist

$$uv = au^2, \quad vu = -au^2,$$
$$v^2 = bu^2,$$

wo entweder $a = 1$ oder $a = 0$, $b = 1$ oder 0 anzunehmen ist. Noch zu bestimmen sind die Producte mit w. Wir wissen nur — vgl. das Frühere —, dass dieselben die allgemeinen Formen haben:

$$uw = \lambda u^2 + \mu v, \quad vw = \nu u + \varrho u^2,$$
$$wu = \lambda' u^2 + \mu' v, \quad wv = \nu' u + \varrho' u^2,$$
$$w^2 = \sigma u + \tau u^2 + \pi v.$$

Sind diese Producte bekannt, so sind natürlich auch $u^2 w$ und wu^2 bekannt. In diesem System muss, da der Grad des gesuchten Systems 3 ist, die dritte Potenz jeder Zahl Null sein. Hieraus und aus dem associativen Gesetze folgen Bedingungen für die Constanten λ, λ' u. s. w. Diese Bedingungen berechnen wir jedoch nicht sämmtlich. Wir ziehen nur einige derartige Folgerungen und schlagen im Uebrigen einen kürzeren Weg ein:

Ist $a = 1$, so folgt aus $u \,.\, wu = uw \,.\, u$, dass $\mu + \mu' = 0$ ist. Das associative Gesetz auf uvw angewandt giebt ferner $\nu = \mu$, analog folgt aus uwv, dass $\nu' = \mu$, und aus vwu, dass $\nu = \mu'$ ist. Demnach kommt $\mu = \mu' = \nu = \nu' = 0$. Aus $u^2 w = uw \,.\, w$ und $w \,.\, wu = w^2 u$ folgt noch: $\sigma = \pi = 0$. Im vorliegenden Fall kommt also in den Producten nur u^2 vor.

Ist $a = 0$, $b = 1$, so gilt dasselbe. uvw giebt nämlich $\nu = 0$, analog ist $\nu' = 0$. Aus uwv folgt $\nu' = \mu = 0$ und entsprechend ist $\nu = \mu' = 0$. uw^2 und vw^2 endlich ergeben $\sigma = \pi = 0$.

Ist drittens $a = b = 0$, so folgt aus uvw $\nu = 0$ und entsprechend ist $\nu' = 0$. uw^2 ferner giebt $\mu\varrho = \sigma$, $w^2 u$ entsprechend $\mu'\varrho' = \sigma$. $w^3 = 0$ liefert $\sigma\mu = 0$ und $\sigma\mu' = 0$. Wäre $\sigma \neq 0$, so wäre demnach $\mu = \mu' = 0$, d. h. doch $\sigma = \mu'\varrho' = 0$. Es ist also sicher $\sigma = 0$. $w^3 = 0$ giebt nun noch $\pi\varrho = \pi\varrho' = 0$. Ist $\pi = 0$, so tritt in den Producten wie vorher nur u^2 auf. Ist jedoch $\pi \neq 0$, so folgt $\varrho = \varrho' = 0$ und in den Producten treten u^2 und v auf. Man beachtet dabei, dass die Producte mit v sämmtlich Null sind.

Alles zusammen lehrt, dass entweder in dem zu bestimmenden ausgearteten System (e_1, e_2, e_3, e_4) zwei Einheiten, e_1, e_2, in den Producten vorkommen — und dann sind alle Producte dieser Einheiten

mit beliebigen Zahlen dieses Systems Null — oder aber in den Producten nur eine Einheit, e_1, auftritt.

Bei der ersten Annahme hat das System (e_1, e_2, e_3, e_4) zunächst die allgemeine Tafel:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 + \mu e_2 & \nu e_1 + \varrho e_2 \\ 0 & 0 & \nu' e_1 + \varrho' e_2 & \sigma e_1 + \tau e_2. \end{matrix}$$

Indem man statt e_1 und e_2 lineare Combinationen derselben einführt, ersieht man leicht, dass vorausgesetzt werden darf, dass die Determinante $\mu\tau - \varrho\varrho' = 0$ ist. Dann aber giebt es eine aus e_3 und e_4 gebildete Zahl x, sodass xe_3 und xe_4 frei von e_2, und ebenso eine Zahl y, sodass $e_3 y$ und $e_4 y$ frei von e_2 sind. Entweder stimmen beide überein oder nicht. Ist zunächst $x = y$, so wählen wir x als e_3 und finden:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & \mu e_1 \\ 0 & 0 & \mu' e_1 & e_2. \end{matrix}$$

Es existirt hier nur dann eine aus e_3 und e_4 gebildete Zahl, deren Quadrat gleich 0 ist, wenn $\lambda = 0$ ist. Dieser besondere Fall giebt den Typus V_{15}. Für $\lambda \neq 0$ darf man $\lambda = 1$ setzen und man erreicht dann unschwer, dass $\mu' = -\mu$ wird. Wenn dann $\mu \neq 0$ ist, so darf $\mu = 1$ gesetzt werden. Dies ergiebt ein System, das in ein späteres System als Specialfall aufgenommen werden kann, wie wir an der betreffenden Stelle hervorheben werden. Ist jedoch $\mu = 0$, so kommt V_{16}. Ist nun andererseits $y \neq x$, so wird die eine als e_3, die andere als e_4 benutzt, sodass das System (e_1, e_2, e_3, e_4) zunächst die Tafel hat:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & \mu e_1 \\ 0 & 0 & e_2 & \nu e_1. \end{matrix}$$

Damit dies System nicht doch unter den soeben behandelten ersten Fall gehört, also keine Zahl x existirt, dass xe_3, xe_4, $e_3 x$ und $e_4 x$ sich sämmtlich durch nur eine aus e_1 und e_2 abgeleitete Zahl ausdrücken, ist, wie leicht ersichtlich, nothwendig und hinreichend, dass $\lambda\nu \neq \mu^2$ sei. Nun ist das Quadrat einer beliebigen Zahl

$$(ae_3 + be_4)^2 = (a^2\lambda + ab\mu + b^2\nu)\, e_1 + abe_2.$$

Sobald λ oder ν Null ist, lässt sich also eine aus e_3 und e_4 gebildete Zahl angeben, deren Quadrat Null ist. Demnach haben wir drei ver-

schiedene Fälle: Ist $\lambda = \nu = 0$, so kommt Typus V_{17}. Ist $\lambda = 0$, $\nu \neq 0$, so muss auch $\mu \neq 0$ sein wegen $\lambda\nu \neq \mu^2$. Dann kann $\mu = 1$ gemacht werden. Führt man noch $2e_1 - 2e_2$, $2e_1 + 2e_2$, $2e_3$, $2e_4 - e_3$ als neue Einheiten ein, so geht Typus V_{18} hervor. Ist schliesslich $\lambda \neq 0$ und $\nu \neq 0$, so kann $\lambda = \nu = 1$ gesetzt werden, sodass wegen $\lambda\nu \neq \mu^2$ die Zahl $\mu \neq \pm 1$ sein muss. Führt man die 4 Zahlen

$$\bar{e}_1 = (2 \mp \mu)\, e_1 \mp e_2, \quad \bar{e}_2 = \mu e_1 - e_2, \quad \bar{e}_3 = e_3 \mp e_4, \quad \bar{e}_4 = e_3 \pm e_4,$$

wo das untere Zeichen für $\mu = 2$ zu wählen wäre, als neue Einheiten ein, so ergiebt sich ein System von der Form:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & -e_2 & \lambda e_1 + \lambda' e_2, \end{array}$$

wo $\lambda' \neq 0$ ist und leicht $= 1$ gemacht werden kann. Dies giebt Typus V_{19}. Die Constante λ übrigens ist $\neq 0$. $\lambda = 0$ liefert eben das System, das wir oben ausgelassen hatten. Wenn wir also im Typus V_{19} die Beschränkung $\lambda \neq 0$ fallen lassen, so ist auch jenes System berücksichtigt.

Nun haben wir die Systeme in e_1, e_2, e_3, e_4 zu bestimmen, in denen nur die Einheit e_1 in den Producten vorkommt:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha e_1 & \beta e_1 & \gamma e_1 \\ 0 & \beta' e_1 & \delta e_1 & \varepsilon e_1 \\ 0 & \gamma' e_1 & \varepsilon' e_1 & \zeta e_1. \end{array}$$

Man erkennt sofort: Es giebt stets eine aus e_2, e_3, e_4 gebildete Zahl, die mit allen anderen commutativ ist. Sie wird als e_2 benutzt. Entweder ist dann $e_2^2 = e_1$ oder $= 0$ zu setzen. Ist $e_2^2 = e_1$, so darf die Tafel vereinfacht werden:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & \mu e_1 \\ 0 & 0 & \nu e_1 & \varrho e_1 \end{array}$$

Sind e_3 und e_4 commutativ, so ergeben sich die Typen V_{20}, V_{21}, V_{22} (wo in letzteren e_2 mit e_3 resp. e_4 vertauscht wurde). Sind sie nicht commutativ, so ist $\nu \neq \mu$ und es lässt sich leicht $\nu = -\mu \neq 0$ machen. Dies giebt die Systeme V_{23}, V_{24}, V_{25}. Wir nahmen bisher $e_2^2 = e_1$ an. Ist $e_2^2 = 0$, so sind entweder alle Producte mit e_2 Null oder nicht. Im letzteren Fall darf $e_3 e_2 = e_1$, $e_4 e_2 = 0$ gesetzt werden. Wir haben also zunächst die beiden Tafeln:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & \mu e_1 \\ 0 & 0 & \nu e_1 & \varrho e_1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & e_1 & \lambda e_1 & \mu e_1 \\ 0 & 0 & \nu e_1 & \varrho e_1 \end{matrix}$$

Bei Annahme der ersten Tafel sind entweder e_3 und e_4 commutativ oder nicht. Ersterenfalls müsste jedes Quadrat Null sein, da sonst Vertauschung von e_2 mit einer Zahl $ae_2 + be_3$ wieder zum früheren Fall $e_2^2 = e_1$ führen würde. Danach aber ist der Grad nicht 3, sondern 2, was nicht sein darf. e_3 und e_4 sind somit nicht commutativ: $\nu \neq \mu$. Sehr leicht lässt sich $\nu = -\mu$ machen, und es gehen, da λ und ϱ nicht beide Null sein dürfen, weil sonst der Grad gleich 2 wäre, die Typen V_{26} und V_{27} hervor. Benutzen wir die zweite Tafel, so lässt sich unschwer $\lambda = 0$, $\nu = -\mu$ machen, sodass sich die Typen V_{28} und V_{29} ergeben.

Hiermit ist der Fall C) erledigt.

Ist der Grad des zu bestimmenden Systems in 5 Einheiten gleich 2, so giebt es nach § 7 entweder zwei oder nur ein η. Im ersteren Fall ergeben sich die Formen V_{30} und V_{31}. Im anderen Falle ist die Zahl $m = 0, 1$, sodass die schon in § 7 angegebenen Systeme V_{32} und V_{33} hervorgehen.

Damit sind alle Typen von irreducibelen Nqss. in 5 Einheiten bestimmt.*)

Dass keiner derselben überzählig ist, folgt aus den vorstehenden Betrachtungen und aus den diesbezüglichen Untersuchungen des § 5 ohne Weiteres.

§ 9.

Zusammenstellung aller irreducibelen Zahlensysteme in 2, 3, 4, 5 Einheiten.

In diesem Paragraphen sind alle *irreducibelen* Zahlensysteme in 2, 3, 4, 5 Einheiten in der Reihenfolge, in der sie soeben gefunden wurden, übersichtlich zusammengestellt. Ich bemerke dabei: Von je zwei zu einander reciproken Systemen findet man stets nur das eine angegeben. Unter dem zu einem gegebenen System reciproken Systeme wird dasjenige verstanden, welches durch Vertauschung der Producte $e_i e_k$ mit den Producten $e_k e_i$, d. h. durch Vertauschung der Horizontal-

*) In seiner Dissertation „Ueber die aus 5 Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme," 1890, stellt Herr Rohr die in den Fällen $k = 5, 4, 2$ vorhandenen Zahlensysteme in 5 Einheiten auf, ohne irgendwie auf den ihm bekannten Umstand hinzuweisen, dass dieselben und auch die im schwierigeren Fall $k = 3$ vorhandenen Systeme schon vorher von mir veröffentlicht worden waren. Dies veranlasst mich, hier meine Priorität ausdrücklich zu wahren.

und Verticalreihen der Tafel des Systems hervorgeht. Es ist durchaus nicht immer möglich, ein System in sein reciprokes durch Einführung passender neuer Einheiten umzuwandeln. Wo es aber möglich ist, habe ich die betreffende Transformation stets angegeben.

Ferner ist der Vollständigkeit halber auch das einzige irreducibele Quaternionsystem, das bis zu 5 Einheiten vorkommt, unter IV_{10} angegeben. Wir werden nämlich später, in § 12, sehen, dass nur ein solches System, nämlich das der Hamilton'schen Quaternionen, hier in Frage kommt. Die folgende Uebersicht enthält demnach *alle* irreducibelen Zahlensysteme überhaupt in 2, 3, 4, 5 Einheiten.

Bei allen Systemen ist die charakteristische Gleichung angegeben und zwar bezieht sich dieselbe stets auf die *erste* Form der Systeme. Von einer Anzahl von Systemen existirt nämlich ausser der berechneten noch eine durch symmetrische Anordnung der Einheiten besonders ausgezeichnete Form, die alsdann neben der ursprünglichen und mit ihr durch das Zeichen $\equiv$ verbunden angeführt wurde. Bei den Systemen in 3 und 4 Einheiten sind diese symmetrischen Formen bis auf unwesentliche Abweichungen diejenigen, in denen Study die Systeme aufstellte. Die Vermerke *S. II*, *S. III* ... geben an, unter welcher Nummer die Systeme in 2, 3, 4 Einheiten bei Study I auftreten, während diese Noten sich bei den Systemen in 5 Einheiten auf die Nummern derselben in meiner früheren Abhandlung beziehen. Bei den in 2 Formen angegebenen Typen findet man die zugehörigen Substitutionen, welche die eine in die andere überführen, bemerkt. $e_1, e_2, \ldots$ bedeuten dabei immer die Einheiten des ersten, von uns berechneten Systems.

Bei den Nichtquaternionsystemen, also bei allen Systemen mit Ausnahme von IV_{10}, sind der besseren Uebersichtlichkeit halber in den berechneten Tafeln die Producte mit den Einheiten, welche die Rolle der η spielen, von den übrigen Producten durch Vertical- und Horizontalstriche getrennt. Es erleichtert dies den Einblick in den gesetzmässigen Bau der Tafeln.

Schliesslich darf ich die Erwartung aussprechen, dass die folgende Zusammenstellung ganz fehlerfrei gefunden wird, nachdem die Systeme in 5 Einheiten, die ich früher auf viel umständlicherem Wege berechnet hatte, durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen auf's Neue abgeleitet worden sind, wobei sich einige Ungenauigkeiten meiner früheren Zusammenstellung ergaben. —

$$n = 2.$$

$k = 2.$ $II_1.$ (*S. II.*) $\begin{array}{c|c} 0 & e_1 \\ \hline e_1 & e_2 \end{array}$ $(x - x_2\varepsilon)^2 = 0.$

$n = 3.$

$k = 3.$ $III_1.$ $(S.\ III.)$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \qquad (x - x_3\varepsilon)^3 = 0.$$

$k = 2.$ $III_2.$ $(S.\ IV.)$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & e_1 \\ \hline e_1 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{array} \equiv \begin{array}{ccc} 0 & e_1 & e_1 \\ -e_1 & e_3 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \text{ vermöge } \begin{cases} \bar{e}_2 = -e_2 + e_3, \\ \bar{e}_3 = e_2 + e_3. \end{cases}$$

$(x - x_2\varepsilon)(x - x_3\varepsilon) = 0.$ Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_2 = e_3$, $\bar{e}_3 = e_2$.

$III_3.$ $(S.\ V.)$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \qquad (x - x_3\varepsilon)^2 = 0.$$

$n = 4.$

$k = 4.$ $IV_1.$ $(S.\ V.)$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \qquad (x - x_4\varepsilon)^4 = 0.$$

$k = 3.$ $IV_2.$ $(S.\ VII.)$

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & e_4 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc} 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ -e_1 & e_2 & e_4 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \text{ vermöge } \begin{cases} \bar{e}_3 = -e_3 + e_4, \\ \bar{e}_4 = e_3 + e_4. \end{cases}$$

$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon)^2 = 0.$ Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.

$IV_3.$ $(S.\ IX.)$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & e_1 & e_2 \\ 0 & -e_1 & \lambda e_1 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

$(x - x_4\varepsilon)^3 = 0.$ Eine Schar von ∞^1 Systemen, von denen jedes durch $\bar{e}_3 = -e_3$ in sein reciprokes übergeht.

$IV_4.$ (S. X.)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \qquad (x - x_4\varepsilon)^3 = 0.$$

$IV_5.$ (S. XI.)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \qquad (x - x_4\varepsilon)^3 = 0.$$

$k = 2.$ $IV_6.$ (S. XV.)

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc} 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ -e_1 & -e_2 & e_4 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \text{ vermöge } \begin{cases} \bar{e}_3 = -e_3 + e_4, \\ \bar{e}_4 = e_3 + e_4. \end{cases}$$

$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon) = 0.$ Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_3 = e_4$, $\bar{e}_4 = e_3$.

$IV_7.$ (S. XIII.)

$$\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & e_4 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc} 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & -e_2 & e_2 \\ -e_1 & e_2 & e_4 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \text{ vermöge } \begin{cases} \bar{e}_3 = -e_3 + e_4, \\ \bar{e}_4 = e_3 + e_4. \end{cases}$$

$(x - x_3\varepsilon)(x - x_4\varepsilon) = 0.$ Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_1 = e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$.

$IV_8.$ (S. XIV.)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & -e_1 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

$(x - x_4\varepsilon)^2 = 0.$ Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_1 = -e_1$.

$IV_9.$ (S. XVI.)

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \qquad (x - x_4\varepsilon)^2 = 0.$$

$IV_{10}.$
(S. *XII.*)

$$\begin{array}{cccc} -e_4 & -e_3 & e_2 & e_1 \\ e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 & -e_4 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

$x^2 - 2x_4 x + (x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2)\varepsilon = 0.$
Dies Qs. geht in sein rec. über durch
$\bar{e}_1 = -e_1,\ \bar{e}_2 = -e_2,\ \bar{e}_3 = -e_3.$

$n = 5.$

$k = 5.$ $V_1.$ (S. *VII.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \qquad (x - x_5\varepsilon)^5 = 0.$$

$k = 4.$ $V_2.$ (S. *XVI.*)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & e_2 & e_3 & e_3 \\ -e_1 & e_2 & e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ vermöge } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon)^3 = 0.$ Kann nicht in sein rec. System übergeführt werden.

$V_3.$ (S. *XIII.*)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & -e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4\varepsilon)^2 (x - x_5\varepsilon)^2 = 0.$ Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_2 = e_3,\ \bar{e}_3 = e_2,$ $\bar{e}_4 = e_5,\ \bar{e}_5 = e_4.$

$V_4.$ (S. *XXI.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_1 & e_3 \\ 0 & e_1 & -e_1 & e_2 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ vermöge } \begin{cases} \bar{e}_3 = e_4, \\ \bar{e}_4 = e_3. \end{cases}$$

$(x - x_5\varepsilon)^4 = 0.$ Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_4 = -e_4$

V_5. (S. XVIII.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \quad \text{vermöge} \begin{cases} \bar{e}_3 = e_4, \\ \bar{e}_4 = e_3. \end{cases}$$

$$(x - x_5 \varepsilon)^4 = 0.$$

V_6. (S. XXII.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & e_1 & -e_1 & e_2 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \quad \text{verm.} \begin{cases} \bar{e}_4 = - e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4. \end{cases}$$

$(x - x_5 \varepsilon)^4 = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_4 = - e_4$.

V_7. (S. XX.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \qquad (x - x_5 \varepsilon)^4 = 0.$$

$k = 3$. V_8. (S. XXIV.)

$$\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ \hline 0 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_3 \varepsilon)\,(x - x_4 \varepsilon)\,(x - x_5 \varepsilon) = 0$. Kann nicht in sein rec. System übergeführt werden.

V_9. (S. XXIII.)

$$\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ \hline 0 & e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_3 \varepsilon)\,(x - x_4 \varepsilon)\,(x - x_5 \varepsilon) = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_1 = e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$, $\bar{e}_3 = e_5$, $\bar{e}_5 = e_3$.

V_{10}.*)
(*S.* XXX.)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & -e_1 & e_1 \\ 0 & -e_1 & -e_1 & -e_2 & e_2 \\ 0 & e_1 & e_1 & -e_3 & e_3 \\ e_1 & -e_3 & -e_2 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_1 = -e_1, \\ \bar{e}_2 = -e_2 - e_3, \\ \bar{e}_3 = e_2 - e_3, \\ \bar{e}_4 = e_4 - e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4 \varepsilon)(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$. Kann nicht in sein rec. System übergeführt werden.

V_{11}.
(*S.* XXXI.)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4 \varepsilon)(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$. Kann nicht in sein rec. System übergeführt werden.

V_{12}.*)
(*S.* XXXII.)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ \hline 0 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & e_1 & -e_1 & -e_3 & e_2 \\ 0 & e_1 & -e_1 & -e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & e_2 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_2 = -e_2 - e_3, \\ \bar{e}_3 = e_2 - e_3, \\ \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4 \varepsilon)(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_2 = e_3$, $\bar{e}_3 = e_2$.

V_{13}.
(*S.* LI.)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 \\ \hline 0 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ e_1 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & -e_3 & e_3 \\ e_1 & -e_2 & e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4 \varepsilon)(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_2 = e_3$, $\bar{e}_3 = e_2$.

*) Die Substitutionen, welche die Ueberführung der Systeme V_{10} und V_{12} auf die symmetrischeren Formen leisten, war Herr Study so freundlich mir anzugeben.

V_{14}. (S. XXIX.)

$$\left.\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & e_5 \end{array}\right. \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & e_3 \\ -e_1 & e_2 & e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4 \varepsilon)(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$. Kann nicht in sein rec. System übergeführt werden.

V_{15}. (S. XXXV u. XXXIX.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & \lambda e_1 & e_2 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5 \varepsilon)^3 = 0$. Eine Schar von ∞^1 Systemen, von denen jedes durch die Substitution $\bar{e}_3 = -e_4$, $\bar{e}_4 = e_3$ in sein reciprokes übergeht. Das System $\lambda = 1$ ist ausgezeichnet als zu sich selbst reciprok.

V_{16}. (S. XXXIV.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5 \varepsilon)^3 = 0$.

V_{17}. (S. XLI.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & -e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & e_2 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_1 = i e_1 + i e_2, \\ \bar{e}_2 = e_1 - e_2, \\ \bar{e}_3 = e_3 + i e_4, \\ \bar{e}_4 = i e_3 + e_4. \end{cases}$$

$(x - x_5 \varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_1 = e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$.

V_{18}. (S. XLII.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 + e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 + e_2 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5 \varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_2 = -e_2$, $\bar{e}_3 = -e_3$.

V_{19}. (*S. XL.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_2 & e_2+\lambda e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\,\varepsilon)^3 = 0$. Eine Schar von ∞^1 Systemen, von denen jedes in sein reciprokes übergeht durch $\bar{e}_3 = -e_3$.

V_{20}. (*S. XXXVI.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\,\varepsilon)^3 = 0$.

V_{21}. (*S. XXXVII.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\,\varepsilon)^3 = 0$.

V_{22}. (*S. XXXVIII.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\,\varepsilon)^3 = 0$.

V_{23}. (*S. XLIII u. XLV.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & \lambda e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -\lambda e_1 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\,\varepsilon)^3 = 0$. Eine Schar von ∞^1 Systemen, von denen jedes durch $\bar{e}_3 = -e_3$ in sein reciprokes übergeht.

V_{24}. (*S. XLVIII.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\,\varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_3 = -e_3$.

V_{25}. (*S. XLIII für* $\lambda = -1$.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_3 = -e_3$.

V_{26}. (*S. XLVII.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & e_1 & \lambda e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -\lambda e_1 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$. Eine Schar von ∞^1 Systemen, von denen jedes durch $\bar{e}_3 = -e_3$ in sein reciprokes übergeht.

V_{27}. (*S. XLII für* $\lambda = 0$.)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_3 = -e_3$.

V_{28}.

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & e_1 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_4 = -e_4$.

V_{29}. (*S. XLVI.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & e_2 \\ 0 & e_1 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5\varepsilon)^3 = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_4 = -e_4$.

$k = 2$. V_{30}. (*S. L.*)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & -e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4\varepsilon)(x - x_5\varepsilon) = 0$. Geht in sein rec. System über durch $\bar{e}_4 = e_5$, $\bar{e}_5 = e_4$.

V_{31}. (*S. LII.*)

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 \\ \hline e_1 & e_2 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & e_5 \end{array} \equiv \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & e_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & -e_3 & e_3 \\ -e_1 & -e_2 & e_3 & e_5 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \text{ verm. } \begin{cases} \bar{e}_4 = -e_4 + e_5, \\ \bar{e}_5 = e_4 + e_5. \end{cases}$$

$(x - x_4 \varepsilon)(x - x_5 \varepsilon) = 0$. Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_4 = e_5$, $\bar{e}_5 = e_4$.

V_{32}. (*S. LIII.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_3 \\ 0 & 0 & -e_1 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}.$$

$(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$. Geht in sein reciprokes System über durch $\bar{e}_1 = -e_1$.

V_{33}. (*S. LIV.*)

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}$$

$(x - x_5 \varepsilon)^2 = 0$.

Auf die Anwendungen dieser Zusammenstellung gedenke ich bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Jetzt, wo die Theorie der Nqss. einigermassen abgeschlossen ist, handelt es sich darum, auch die Qss. näher zu untersuchen.

§ 10.

Allgemeineres über die Quaternionsysteme.

In § 2 haben wir die Quaternionsysteme definirt als diejenigen, unter deren Zahlen es drei von einander und vom Modul linear unabhängige giebt: e_1, e_2, e_3, für welche

(1) $\quad e_2 e_3 - e_3 e_2 = 2e_1, \quad e_3 e_1 - e_1 e_3 = 2e_2, \quad e_1 e_2 - e_2 e_1 = 2e_3$

ist.

In einer meiner früheren Abhandlungen*) hatte ich bewiesen, dass diese Einheiten e_1, e_2, e_3 zusammen mit noch einer gewissen

*) Vgl. meine zweite Abhandlung S. 405 ff.

Einheit e_4 des Systems ein für sich abgeschlossenes Zahlensystem, nämlich das der Hamilton'schen Quaternionen:

$$\begin{matrix} -e_4 & -e_3 & e_2 & e_1 \\ e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 \\ -e_2 & e_1 & -e_4 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix}$$

bilden. Zu diesem System würden also allgemein noch gewisse Einheiten $e_5, e_6 \dots e_n$ hinzutreten, um das ganze Qs. $(e_1, e_2 \dots e_n)$ zu bilden. Der damalige Beweis dieses Satzes stützte sich jedoch auf einen gewissen Grenzübergang, den ich jetzt nicht mehr für stichhaltig erachte. Glücklicherweise aber kann ich wenigstens zeigen, dass der Satz richtig ist, sobald die Zahl der Einheiten des Qs. kleiner als 9 ist. Da der Satz in meinen diesmaligen Untersuchungen eine untergeordnete Rolle spielen wird, weil ich überhaupt in dieser Arbeit das grössere Gewicht auf die Betrachtung der Nqss. lege, gebe ich den Beweis für $n < 9$ nur in seinen Hauptzügen wieder:

Setzen wir

$$(2) \qquad ie_1 = u, \quad e_2 + ie_3 = v, \quad e_2 - ie_3 = w,$$

und benutzen wir also u, v, w anstatt e_1, e_2, e_3 als Einheiten, so ist nach (1):

$$(3) \quad uv - vu = 2v, \quad uw - wu = -2w, \quad vw - wv = -4u$$

und hieraus folgen leicht die Formeln:

$$(4) \qquad v^\mu u^\lambda = (u - 2\mu\varepsilon)^\lambda v^\mu, \quad w^\mu u^\lambda = (u + 2\mu\varepsilon)^\lambda w^\mu,$$

in denen natürlich ε den Modul bezeichnet.

Denken wir uns nun alle Potenzen und Producte der Zahlen ε, u, v, w unter einander gebildet. Da das Qs. $(e_1, e_2 \dots e_n)$ nur eine endliche Anzahl von unabhängigen Einheiten enthält, hängen alle diese Potenzen und Producte auch nur von einer endlichen Anzahl von Einheiten ab, entweder von allen n Zahlen $e_1, e_2 \dots e_n$ oder aber von weniger. Die Potenzen und Producte der ε, u, v, w bilden demnach ein in sich abgeschlossenes Qs. von n oder weniger als n Einheiten. Wir wollen dies als das System (ε, u, v, w) bezeichnen. Wenn ferner $\varepsilon, u, u^2 \dots u^r$ von einander unabhängig sind, dagegen u^r linear aus $\varepsilon, u, u^2 \dots u^r$ abgeleitet werden kann, so lässt sich unschwer mit Hülfe der Formeln (4) darthun, dass allgemein $v^\varkappa$ von $\varepsilon, u, u^2 \dots u^r, v, v^2 \dots v^{\varkappa-1}$ unabhängig ist, sobald es nicht Null ist. Da nun das System (ε, u, v, w) nur eine endliche Anzahl von unabhängigen Einheiten enthält, so muss es eine Zahl ϱ geben, sodass $v^\varrho = 0$ ist. Alsdann ist ebenso

zu beweisen, dass die Zahl $uv^{\varkappa}$ von $\varepsilon, u, u^2 \dots u^r, v, v^2 \dots v^{\varrho-1}$, $uv, uv^2 \dots uv^{\varkappa-1}$ unabhängig und nicht Null ist, sobald $\varkappa < \varrho - 1$ ist. Also sind $\varepsilon, u, u^2 \dots u^r, v, v^2 \dots v^{\varrho-1}, uv, uv^2 \dots uv^{\varrho-2}$ von einander unabhängig. Ebenso sind von diesen sowie von einander unabhängig die Zahlen $u^2v, u^2v^2, u^2v^3 \dots u^2v^{\varrho-3}$, ferner $u^3v \dots u^3v^{\varrho-4}$ u. s. w. bis zur Zahl $u^{\varrho-2}v$. Darauf beweist man, dass von allen diesen Zahlen und von einander unabhängig sind die ebenso anstatt mit v mit w gebildeten Zahlen.

Sicher also enthält das System (ε, u, v, w), das höchstens n von einander unabhängige Einheiten hat, die von einander unabhängigen Zahlen

$$\begin{array}{l} \varepsilon,\ u,\ u^2 \dots u^r, \\ v,\ v^2,\ v^3 \dots v^{\varrho-1}, \\ uv,\ uv^2,\ uv^3 \dots uv^{\varrho-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ u^{\varrho-2}v, \\ w,\ w^2,\ w^3 \dots w^{\varrho-1}, \\ uw,\ uw^2,\ uw^3 \dots uw^{\varrho-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ u^{\varrho-2}w. \end{array}$$

Eventuell sind noch mehr unabhängige Zahlen vorhanden. Die Summe aller vorstehenden Zahlen beträgt $r + 1 + \varrho(\varrho - 1)$. Es ist daher

$$r + 1 + \varrho(\varrho - 1) \leqq n.$$

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass $r \geqq \varrho - 1$ ist. Daraus folgt dann:

$$n \geqq \varrho + \varrho(\varrho - 1)$$

oder also $n \geqq \varrho^2$. Ist $\varrho > 2$, so wäre also $n \geqq 9$. Mithin ist für Qss. mit höchstens 8 Einheiten sicher $\varrho \leqq 2$, also, da der Fall $\varrho = 1$ wegen $v^\varrho = 0$ ausgeschlossen ist, $\varrho = 2$.

In einem Qs. von höchstens 8 Einheiten ist folglich nach (2):

$$(e_2 + ie_3)^2 = 0, \qquad (e_2 - ie_3)^2 = 0,$$

d. h.

$$e_2^2 = e_3^2, \qquad e_2e_3 + e_3e_2 = 0.$$

Cyklische Vertauschung liefert, dass auch $e_1^2 = e_2^2$ und überdies

$$e_1e_2 + e_2e_1 = 0, \qquad e_1e_3 + e_3e_1 = 0$$

sein muss. Hieraus folgt wegen (1):

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, \quad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1, \quad e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2.$$

Bezeichnen wir $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2$ mit $-e_4$, so kommt noch:

$$e_4e_1 = -e_2^2e_1 = -e_2 \cdot e_2e_1 = e_2e_3 = e_1,$$
$$e_1e_4 = -e_1e_2^2 = -e_1e_2 \cdot e_2 = -e_3e_2 = e_1$$

und analog

$$e_4 e_2 = e_2 e_4 = e_2, \qquad e_4 e_3 = e_3 e_4 = e_3,$$

während

$$e_4^2 = e_1^4 = - e_1 \cdot e_4 \cdot e_1 = - e_1 \cdot e_1 = e_4$$

wird, sodass e_1, e_2, e_3, e_4 zusammen das bekannte System der Hamilton'schen Quaternionen bilden. Damit ist der Satz bewiesen:

(5) *In jedem Quaternionsystem mit höchstens* 8 *Einheiten ist das System der Hamilton'schen Quaternionen enthalten.*

Allerdings ist der Beweis hierfür im Vorhergehenden nur in grossen Zügen angedeutet. Einen anderen Beweis kann man dadurch herstellen, dass man auf das System, welches die Potenzen und Producte der ε, u, v bilden, die frühere Theorie der Nichtquaternionsysteme anwendet. Ich gehe darauf jedoch nicht näher ein.

Da man mit Wahrscheinlichkeit den Satz (5) auch für Systeme von mehr als 8 Einheiten als richtig annehmen kann, erscheint es gerechtfertigt, wenn wir uns im folgenden Paragraphen mit denjenigen Zahlensystemen beschäftigen, welche in sich das System der Hamilton'schen Quaternionen enthalten. Die abzuleitenden Sätze gelten dann sicher für alle Qss. bis zu 8 Einheiten und es ist zu vermuthen, dass sie auch alle Qss. in mehr als 8 Einheiten umfassen.

§ 11.

Die Zahlensysteme, welche das System der Quaternionen Hamilton's enthalten.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Zahlensysteme, in denen vier Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3 existiren derart, dass dieselben für sich das System der Hamilton'schen Quaternionen bilden:

$$\begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & -e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 \end{array}$$

Obgleich e_0 in diesem von e_0, e_1, e_2, e_3 gebildeten System die Rolle des Moduls spielt, so braucht doch keineswegs e_0 für das ganze zu betrachtende System $(e_0, e_1, e_2 \ldots e_n)$ Modul zu sein. Ist x eine allgemeine Zahl dieses ganzen Systems und ist

$$x e_0 = y,$$

so ist wegen $e_0^2 = e_0$:

$$y e_0 = y, \qquad (x-y) e_0 = 0,$$

d. h. x kann aus zwei Theilen y und $x - y$ zusammengesetzt werden, deren einer bei der Multiplication mit e_0 als *zweitem* Factor reproducirt

wird, während der andere dabei Null liefert. Jeder dieser beiden Theile y und $x - y$ kann weiter analog zerlegt werden mit Rücksicht auf e_0 als *ersten* Factor. Hiernach lässt sich die allgemeine Zahl x des Systems in vier Theile zerlegen:

$$x = u + v + w + r,$$

sodass

$$u e_0 = e_0 u = u, \qquad v e_0 = e_0 v = 0,$$
$$w e_0 = w, \quad e_0 w = 0, \qquad r e_0 = 0, \quad e_0 r = r$$

ist. Die zu e_0, e_1, e_2, e_3 hinzutretenden Einheiten $e_4, e_5 \ldots$ können daher ebenfalls in diese 4 Kategorien u, v, w, r eingereiht werden. Dabei ist zu beachten, dass zwei Einheiten e_i, e_k, die zur ersten Kategorie gehören, zu Producten auch nur dieser Kategorie angehörige Zahlen haben. Denn ist

$$e_i e_0 = e_0 e_i = e_i, \qquad e_k e_0 = e_0 e_k = e_k,$$

so ist auch

$$e_i e_k e_0 = e_i e_k, \quad e_0 e_i e_k = e_i e_k, \quad e_k e_i e_0 = e_k e_i, \quad e_0 e_k e_i = e_k e_i.$$

Mithin bilden also diejenigen zu e_0, e_1, e_2, e_3 hinzutretenden Einheiten, denen gegenüber e_0 die Rolle des Moduls spielt, zusammen mit e_0, e_1, e_2, e_3 ein geschlossenes System, und mit der Aufstellung dieses Systems beschäftigen wir uns nun zunächst.

Unser jetziges Problem ist also, zum Quaternionensystem (e_0, e_1, e_2, e_3) *weitere Einheiten* $e_4, e_5 \ldots$ *so hinzuzufügen, dass für das ganze entstehende System* e_0 *der Modul ist.*

Es ist $e_1^2 = - e_0$, d. h. kein Theiler der Null des gesuchten Systems, also auch e_1 keiner. Mithin müssen, da

$$e_0 e_1 = e_1, \quad e_1 e_1 = - e_0, \quad e_2 e_1 = - e_3, \quad e_3 e_1 = e_2$$

ist, die Producte $e_4 e_1$, $e_5 e_1 \ldots$ von einander unabhängig hinsichtlich $e_4, e_5 \ldots$ sein, d. h. es muss in

$$e_4 e_1 = \cdots + a_4 e_4 + b_4 e_5 + \cdots,$$
$$e_5 e_1 = \cdots + a_5 e_4 + b_5 e_5 + \cdots$$

u. s. w., wo die mit e_0, e_1, e_2, e_3 behafteten Glieder nicht mitgeschrieben sind, die Determinante $\Sigma \pm a_4 b_5 \cdots \neq 0$ sein. Daher lassen sich nicht sämmtlich verschwindende Constanten λ_4, $\lambda_5 \ldots$ so wählen, dass $(\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \cdots) e_1$ sich von $\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \cdots$ nur um einen von Null verschiedenen Factor und um additiv hinzutretende $e_0 \ldots e_3$ unterscheidet. Die Grösse $\lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \cdots$ darf als eine von $e_0 \ldots e_3$ unabhängige Einheit benutzt werden. Sie sei mit ε_1 bezeichnet. Dann ist:

$$\varepsilon_1 e_1 = a e_0 + b e_1 + c e_2 + d e_3 + \varrho \varepsilon_1 \qquad (\varrho \neq 0).$$

Bildet man $\varepsilon_1 e_1^2 = - \varepsilon_1 e_0 = - \varepsilon_1$, so findet man $\varrho = i$ und erreicht, indem man statt ε_1 passend $\varepsilon_1 +$ Const. $e_0 + \cdots +$ Const. e_3 als neues

ε_1 benutzt, dass $\varepsilon_1 e_1 = i\varepsilon_1$ wird. $\varepsilon_1 e_2$ hängt nun nicht nur von $e_0 \ldots e_3$ und ε_1 linear ab, denn wäre

$$\varepsilon_1 e_2 = \cdots + \sigma\varepsilon_1,$$

wo die Glieder in $e_0 \ldots e_3$ durch Punkte angedeutet sind, so würde aus $\varepsilon_1 e_2^2 = -\varepsilon_1$ zunächst $\sigma^2 = -1$ hervorgehen. Ferner ist

$$i\varepsilon_1 e_2 = \varepsilon_1 e_1 e_2 = -\varepsilon_1 e_2 e_1.$$

In $i\varepsilon_1 e_2$ hätte aber ε_1 den Coefficienten $i\sigma$, in $-\varepsilon_1 e_2 e_1$ dagegen $-i\sigma$, und beide sind wegen $\sigma^2 = -1$ von einander verschieden. Also darf $\varepsilon_1 e_2$ als eine von $e_0 \ldots e_3$, ε_1 unabhängige Einheit η_1 verwerthet werden. Es ist dann

$$\eta_1 e_1 = \varepsilon_1 e_2 e_1 = -\varepsilon_1 e_1 e_2 = -i\varepsilon_1 e_2 = -i\eta_1$$

und

$$\eta_1 e_2 = \varepsilon_1 e_2^2 = -\varepsilon_1.$$

Also haben sich zwei von $e_0 \ldots e_3$ unabhängige Einheiten ε_1 und η_1 derart ergeben, dass die Regeln gelten:

$$\varepsilon_1 e_1 = i\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 e_2 = \eta_1, \quad \eta_1 e_1 = -i\eta_1, \quad \eta_1 e_2 = -\varepsilon_1.$$

Um nun gleich dem ganzen folgenden Räsonnement durch den Schluss von r auf $r+1$ volle Schärfe zu geben, möge angenommen werden, dass schon $2r$ Einheiten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$, $\eta_1 \ldots \eta_r$ gefunden sind, die von einander und von $e_0 \ldots e_r$ unabhängig sind und die Multiplicationsgesetze erfüllen:

$$\varepsilon_j e_1 = i\varepsilon_j, \qquad \eta_j e_1 = -i\eta_j,$$
$$\varepsilon_j e_2 = \eta_j, \qquad \eta_j e_2 = -\varepsilon_j,$$
$$(j = 1, 2 \ldots r).$$

Alsdann lässt sich unter den übrigen Einheiten — wenn überhaupt noch solche vorhanden — eine, e, so wählen, dass ee_1 sich durch $e_0 \ldots e_3$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$, $\eta_1 \ldots \eta_r$ und e allein ausdrückt, doch so, dass der Factor von e dabei $\neq 0$ ist. Es ist dies bloss eine Folge davon, dass e_1 kein Theiler der Null ist. Dann ist etwa:

$$ee_1 = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3 + \sum_1^r {}^j \alpha_j\varepsilon_j + \sum_1^r {}^j \beta_j\eta_j + \varrho e \quad (\varrho \neq 0).$$

Zunächst lässt sich, indem man passend statt e einen Ausdruck $e + \text{Const.}\, e_1 + \cdots + \text{Const.}\, e_3$ einführt, $a = b = c = d = 0$ machen, sodass bleibt:

$$ee_1 = \sum {}^j \alpha_j\varepsilon_j + \sum {}^j \beta_j\eta_j + \varrho e.$$

Aus $ee_1^2 = -e$ folgt alsdann sofort

$$(\varrho + i)\alpha_j = 0, \quad (\varrho - i)\beta_j = 0, \quad \varrho^2 = -1,$$

d. h. entweder ist

A) $\quad \varrho = + i, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$

oder

B) $\quad \varrho = - i, \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0.$

An Stelle von e werde nun als Einheit eingeführt:

$$\bar{e} = e - \sum^j a_j \varepsilon_j - \sum^j b_j \eta_j.$$

Für $\bar{e}$ ist dann:

$$\bar{e} e_1 = \sum \alpha_j \varepsilon_j + \sum \beta_j \eta_j - \varrho \left(\bar{e} - \sum a_j \varepsilon_j - \sum b_j \eta_j\right) +$$
$$+ i \sum a_j \varepsilon_j - i \sum b_j \eta_j.$$

Hiernach würden alle Glieder mit Annahme von $\bar{e}$ verschwinden, wenn sich erreichen liesse, dass die Ausdrücke

$$\alpha_j - a_j(\varrho - i), \quad \beta_j - b_j(\varrho + i)$$

gleich Null würden. Indem über die a_j und b_j passend verfügt wird, ist dies in der That möglich. Liegt nämlich Fall A) vor, so sind die ersteren Ausdrücke an sich Null, während die letzteren durch die Annahme $b_j = \frac{\beta_j}{2i}$ dazu gebracht werden können. Im Falle B) findet Analoges umgekehrt statt.

Hiernach darf angenommen werden, dass für die neue Einheit e das Product $ee_1 = \pm ie$ ist. Weiter ist ee_2 sicher nicht von $e_0 \ldots e_3$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_j$, $\eta_1 \ldots \eta_j$, e allein abhängig. Wäre dies nämlich der Fall und hätte in dem Ausdruck von ee_2 die Einheit e den Coefficienten σ:

$$ee_2 = \cdots + \sigma e,$$

so würde aus $ee_2{}^2 = - e_1$ zunächst $\sigma^2 = -1$ folgen. Nun ist aber

$$\pm ie \,.\, e_2 = ee_1 \,.\, e_2 = - e \,.\, e_2 e_1 = - ee_2 \,.\, e_1.$$

In $\pm iee_2$ hat e den Coefficienten $\pm i\sigma$, in $-ee_2 \,.\, e_1$ den Coefficienten $\mp i\sigma$. Beide können wegen $\sigma^2 = -1$ unmöglich einander gleich sein. $\pm ee_2$ ist somit eine neue Einheit, die für den Augenblick mit e' bezeichnet werde. Dann ist

$$e'e_1 = \pm ee_2 e_1 = \mp ee_1 e_2 = \mp (\pm iee_2) = - iee_2 = \mp ie',$$

während

$$ee_1 = \pm ie, \quad ee_2 = \pm e', \quad e'e_2 = \pm ee_2{}^2 = \mp e$$

ist. Hieraus ist ersichtlich, dass e und e' als Einheiten ε_{r+1} und η_{r+1} resp. η_{r+1} und ε_{r+1} benutzt werden können, die denselben Regeln folgen wie die Einheiten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$, $\eta_1 \ldots \eta_r$.

Damit ist der Schluss von r auf $r+1$ durchgeführt. Es ist danach ohne weiteres klar, dass alle zu $e_0 \ldots e_3$ hinzutretenden Einheiten sich in zwei Schaaren zertheilen:

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu, \quad \eta_1 \ldots \eta_\nu,$$

sodass allgemein

$$\varepsilon_j e_1 = i\varepsilon_j, \quad \eta_j e_1 = -i\eta_j,$$
$$\varepsilon_j e_2 = \eta_j, \quad \eta_j e_2 = -\varepsilon_j,$$
$$(j=1, 2 \ldots \nu)$$

ist. Auch folgt sofort

$$\varepsilon_j e_3 = i\eta_j, \quad \eta_j e_3 = i\varepsilon_j.$$

Hiermit sind alle Einheiten des Systems so geordnet, dass ihre Producte mit e_1, e_2, e_3 als zweiten Factoren bekannt sind.

Unser Bestreben richtet sich nun darauf, die ε und η weiterhin noch so anzuordnen, dass ihre Producte mit e_1, e_2, e_3 als ersten Factoren einfache Formen annehmen. Zu dem Zwecke bedenken wir, dass sich zunächst $e_1\varepsilon_j$ allgemein linear durch $e_0 \ldots e_3$, die ε und η ausdrückt. Bilden wir aber $e_1\varepsilon_j e_1 = ie_1\varepsilon_j$, so folgt unschwer, dass dieser Ausdruck insbesondere die Form hat:

$$e_1\varepsilon_j = a_j(e_0 - ie_1) + b_j(e_2 + ie_3) + \sum_1^{\nu}{}_{\varkappa}\, \alpha_{j\varkappa}\varepsilon_\varkappa,$$

während wegen $e_1\varepsilon_j e_2 = e_1\eta_j$ hieraus folgt: $\quad (j=1,2\ldots\nu)$

$$e_1\eta_j = a_j(e_2 - ie_3) + b_j(-e_0 - ie_1) + \sum_1^{\nu}{}_{\varkappa}\, \alpha_{j\varkappa}\eta_\varkappa.$$

Die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{\nu\nu}$ ist $\neq 0$, weil e_1 kein Theiler der Null ist, also als erster Factor alle Einheiten reproduciren muss. Es lassen sich daher nicht sämmtlich verschwindende Constanten $\lambda_1 \ldots \lambda_\nu$ so angeben, dass $e_1(\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_\nu\varepsilon_\nu)$ ausser durch $e_0 \ldots e_3$ sich nur noch durch $\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_\nu\varepsilon_\nu$ ausdrückt. Diese Grösse darf an Stelle von ε_1 als Einheit gewählt werden und natürlich ist dann statt des früheren η_1 die Grösse $\lambda_1\eta_1 + \cdots + \lambda_\nu\eta_\nu$ zu nehmen. Folglich giebt es eine Einheit ε_1, für die

$$e_1\varepsilon_1 = a(e_0 - ie_1) + b(e_2 + ie_3) + \varrho\varepsilon_1$$

ist. Wegen $e_1^2\varepsilon_1 = -\varepsilon_1$ folgt hieraus

$$\varrho^2 = -1, \quad a(i+\varrho) = 0, \quad b(i-\varrho) = 0.$$

Entweder ist also

A) $\qquad \varrho = i, \quad a = 0,$

oder

B) $\qquad \varrho = -i, \quad b = 0.$

Man bemerkt, dass man statt ε_1 als Einheit auch

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + A(e_0 - ie_1) + B(e_2 + ie_3)$$

benutzen darf, ohne dadurch das dem ε_1 Charakteristische zu zerstören. Berechnet man dann $e_1\bar{\varepsilon}_1$, so findet man, dass dasselbe gleich $\varrho\bar{\varepsilon}_1$ ist, sobald A und B so gewählt werden können, dass die Ausdrücke

$$A(i-\varrho)+a, \qquad B(i+\varrho)-b$$

verschwinden. Im Fall A) ist der erste Ausdruck an sich Null und kann der zweite durch $B=\frac{b}{2i}$ zu Null gemacht werden. Im Fall B) findet Analoges umgekehrt statt.

Es darf daher angenommen werden:

Alsdann ist: $$\left.\begin{array}{l} e_1\varepsilon_1=\varrho\,\varepsilon_1. \\ e_1\eta_1=\varrho\,\eta_1. \end{array}\right\}\ \varrho=\pm i$$

Um nun gleich zu einem allgemeinen Resultat zu gelangen, wenden wir den Inductionsschluss an. Angenommen, wir haben erreicht, dass sich r der Einheiten ε_j und r der zugehörigen η_j so wählen lassen, dass

$$e_1\varepsilon_j=\varrho_j\varepsilon_j, \qquad e_1\eta_j=\varrho_j\eta_j$$
$$(j=1,2\ldots r)$$

ist, wo ϱ_j entweder $+i$ oder $-i$ bedeutet. Alsdann zeigen wir, dass sich ε_{r+1} und das zugehörige η_{r+1} so wählen lassen, dass diese ebensolchen Relationen genügen.

Zunächst lässt sich unter den noch übrigen Einheiten $\varepsilon_{r+1}\ldots\varepsilon_\nu$ eine — wir bezeichnen sie für den Augenblick mit ε — so wählen, dass

$$e_1\varepsilon=a(e_0-ie_1)+b(e_2+ie_3)+\sum_1^r{}_{\varkappa}\,\alpha_\varkappa\varepsilon_\varkappa+\sigma e$$

wird, weil e_1 kein Theiler der Null ist. Wegen $e_1^2\varepsilon=-\varepsilon$ folgt hieraus:

$$\sigma^2=-1, \quad a(i+\sigma)=0, \quad b(i-\sigma)=0, \quad (\varrho_\varkappa+\sigma)\alpha_\varkappa=0.$$

In Folge der letzten Relation fallen alle diejenigen $\varepsilon_\varkappa$ aus der Formel heraus, für die $\varrho_\varkappa=\sigma$ ist. Für alle verbleibenden $\varepsilon_\varkappa$ sind also die $\varrho_\varkappa$ sämmtlich gleich $\varrho=-\sigma$ und daher entweder

A) $\qquad \varrho=\ \ i, \quad \sigma=-i, \quad b=0$

oder

B) $\qquad \varrho=-i, \quad \sigma=\ \ i, \quad a=0.$

In jedem dieser beiden Fälle können wir statt ε als neue Einheit einführen

$$\bar\varepsilon=\varepsilon+A(e_0-ie_1)+B(e_2+ie_3)+\sum_1^r{}_{\varkappa}\,\beta_\varkappa e_\varkappa,$$

ohne dass $\bar\varepsilon$ die den ε charakteristischen Eigenschaften verliert. Bildet man aber $e_1\bar\varepsilon$, so findet man, dass es sich auf $\sigma\bar\varepsilon=-\varrho\bar\varepsilon$ reduciren würde, sobald die Ausdrücke

$$a - \sigma A + iA,$$
$$b - \sigma B - iB,$$
$$\alpha_\varkappa - \sigma\beta_\varkappa + \varrho\beta_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2 \dots r)$$

durch passende Wahl der A, B, $\beta_\varkappa$ zum Verschwinden gebracht werden können. Dies ist immer möglich. Zunächst nämlich nehmen wir die $\beta_\varkappa$, deren zugehöriges $\alpha_\varkappa = 0$ ist, auch gleich Null an. Im übrigen finden wir im Fall A), dass der zweite Ausdruck an sich verschwindet, während vermöge

$$A = \frac{a}{2i}, \quad \beta_\varkappa = -\frac{\alpha_\varkappa}{2i}$$

auch der erste und letzte Null wird. Analog ist es im Fall B).

Damit ist der Inductionsschluss beendet. Es lassen sich ε_{r+1} und und η_{r+1} so wählen, dass auch

$$e_1 e_{r+1} = \varrho_{r+1}\varepsilon_{r+1}, \quad e_1\eta_{r+1} = \varrho_{r+1}\eta_{r+1}$$

ist, wo $\varrho_{r+1} = \pm 1$ sein kann. Demnach ergiebt sich allgemein: Alle ε und η lassen sich so wählen, dass

$$e_1\varepsilon_j = \varrho_j\varepsilon_j, \quad e_1\eta_j = \varrho_j\eta_j$$
$$(j = 1, 2 \dots \nu)$$

wird, wo $\varrho_j = \pm 1$ sein kann. Auch dürfen wir die ε und η in solcher Reihenfolge anordnen, dass für $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\mu$ etwa $\varrho_1 = \dots = \varrho_\mu = -i$, für $\varepsilon_{\mu+1} \dots \varepsilon_\nu$ dagegen $\varrho_{\mu+1} = \dots = \varrho_\nu = +i$ ist.

Noch nicht haben wir von der Thatsache Gebrauch gemacht, dass das System der Quaternionen (e_0, e_1, e_2, e_3) in sein reciprokes übergeht, wenn e_1, e_2, e_3 durch $-e_1, -e_2, -e_3$ ersetzt werden. Aus dieser Thatsache folgt sofort, dass die zu $e_0 \dots e_3$ hinzutretenden Einheiten sich auch so in zwei Schaaren anordnen lassen:

$$\varepsilon_1' \dots \varepsilon_\nu', \quad \eta_1' \dots \eta_\nu',$$

dass

$$e_1\varepsilon_j' = -i\varepsilon_j', \quad e_1\eta_j' = i\eta_j',$$
$$e_2\varepsilon_j' = -\eta_j', \quad e_2\eta_j' = \varepsilon_j',$$
$$e_3\varepsilon_j' = -i\eta_j', \quad e_3\eta_j' = -i\varepsilon_j'$$

wird, denn diese Relationen gehen aus den früheren $\varepsilon_j e_1 = i\varepsilon_j$ etc. hervor, wenn die Reihenfolge der Factoren verkehrt wird und gleichzeitig e_1, e_2, e_3 durch $-e_1, -e_2, -e_3$ ersetzt, sowie die Bezeichnungen ε_j, η_j mit Accenten versehen werden, um eine Verwechselung derselben mit den ε_j, η_j auszuschliessen.

Die ε_j' und η_j' sind natürlich lineare Ausdrücke in den $e_0 \dots e_3$, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu$, $\eta_1 \dots \eta_\nu$ und als solche unabhängig von einander hinsichtlich $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu$, $\eta_1 \dots \eta_\nu$. Sei etwa

$$\varepsilon_j' = a_j e_0 + b_j e_1 + c_j e_2 + d_j e_3 + \sum_1^\nu{}_\varkappa \alpha_{j\varkappa}\varepsilon_\varkappa + \sum_1^\nu{}_\varkappa \beta_{j\varkappa}\eta_\varkappa,$$

so folgt, wenn man $e_1 \varepsilon_j' = -i\varepsilon_j'$ bildet, dass $b_j = ia_j$, $d_j = ic_j$ und

$$\alpha_{j\varkappa}(\varrho_\varkappa + i) = 0, \quad \beta_{j\varkappa}(\varrho_\varkappa + i) = 0$$

ist. Mithin sind alle $\alpha_{j\varkappa} = 0$, für die $\varkappa = \mu + 1, \ldots \nu$ ist, denn für diese ist $\varrho_\varkappa = + i$. $\varepsilon_1' \ldots \varepsilon_\nu'$ hängen somit nur von $e_0 \ldots e_3$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$, $\eta_1 \ldots \eta_\mu$ ab. Analog ergiebt sich, dass die $\eta_1' \ldots \eta_\nu'$ nur von $e_0 \ldots e_3$, $\varepsilon_{\mu+1} \ldots \varepsilon_\nu$, $\eta_{\mu+1} \ldots \eta_\nu$ abhängen. Da diese Ausdrücke unabhängig von einander sind hinsichtlich $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu$, $\eta_1 \ldots \eta_\nu$, so folgt, dass $\mu = \frac{\nu}{2}$ und also $\nu = 2\mu$ eine gerade Zahl ist.

Es ist jetzt etwa

$$\varepsilon_j' = a_j(e_0 + ie_1) + c_j(e_2 + ie_3) + \sum_1^\mu{}^\varkappa \alpha_{j\varkappa}\,\varepsilon_\varkappa + \sum_1^\mu{}^\varkappa \beta_{j\varkappa}\,\eta_\varkappa$$

und analog:

$$\eta_j' = a_j(e_0 - ie_1) + c_j(e_2 - ie_3) + \sum_{\mu+1}^{2\mu}{}^\varkappa \alpha_{j\varkappa}\,\varepsilon_\varkappa + \sum_{\mu+1}^{2\mu}{}^\varkappa \beta_{j\varkappa}\,\eta_\varkappa$$

$$(j = 1, 2 \ldots 2\mu).$$

Es sind dies je 2μ Gleichungen und beide Gleichungensysteme sind nach allen in ihnen auftretenden $\varepsilon_\varkappa$, $\eta_\varkappa$ auflösbar. Bildet man $e_2 \varepsilon_j' = -\eta_j'$, so findet man daher, dass jedes $e_2 \varepsilon_\varkappa$ und $e_2 \eta_\varkappa$ sich durch $e_0 - ie_1$, $e_2 - ie_3$, $\varepsilon_{\mu+1} \ldots \varepsilon_{2\mu}$, $\eta_{\mu+1} \ldots \eta_{2\mu}$ ausdrückt, sobald $\varkappa \leq \mu$ ist. Beachtet man ferner, dass $e_2 \varepsilon_\varkappa e_1 = ie_2 \varepsilon_\varkappa$ ist u. s. w., so findet man Ausdrücke von der Form

$$(\varkappa \leq \mu) \begin{cases} e_2\,\varepsilon_\varkappa = A_\varkappa(e_0 - ie_1) + \sum_1^\mu{}^\lambda \mathsf{A}_{\varkappa,\mu+\lambda}\,\varepsilon_{\mu+\lambda}, \\[2ex] e_2\,\eta_\varkappa = A_\varkappa(e_2 - ie_3) + \sum_1^\mu{}^\lambda \mathsf{A}_{\varkappa,\mu+\lambda}\,\eta_{\mu+\lambda}. \end{cases}$$

Weil nun ohne Beeinträchtigung aller bisherigen Resultate statt $\varepsilon_{\mu+1} \ldots \varepsilon_{2\mu}$, $\eta_{\mu+1} \ldots \eta_{2\mu}$ neue Einheiten:

$$(i > \mu) \quad \bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + B_i(e_0 - ie_1), \quad \bar{\eta}_i = \eta_i + B_i(e_2 - ie_3)$$

eingeführt werden dürfen, so drücken sich die $e_2\varepsilon_\varkappa$ und $e_2\eta$ $(\varkappa \leq \mu)$ nur durch die $\bar{\varepsilon}_\varkappa$, $\bar{\eta}_i$ $(i > \mu)$ aus und werden frei von $e_0 \ldots e_3$, wenn es gelingt, die $B_{\mu+1} \ldots B_{2\mu}$ so zu wählen, dass jedes

$$A_\varkappa - \sum_1^\mu{}^\lambda \mathsf{A}_{\varkappa,\mu+\lambda}\,B_{\mu+\lambda} = 0$$

$$(\varkappa = 1, 2 \ldots \mu)$$

wird. Dies ist immer möglich. Denn entweder ist $A_1 = \cdots = A_\mu = 0$, und dann ist $B_{\mu+\lambda} = 0$ zu setzen. Oder es verschwinden nicht alle

$A_1 \ldots A_\mu$. Dann lassen sich die $B_{\mu+\lambda}$ so bestimmen, dass sie die vorstehenden Gleichungen erfüllen, da die Determinante

$$\Sigma \pm \mathsf{A}_{1,\mu+1} \ldots \mathsf{A}_{\mu,2\mu} \neq 0$$

ist.

Folglich darf nun vorausgesetzt werden, dass

$$\left.\begin{aligned} e_2\,\varepsilon_\varkappa &= \sum_1^\mu{}^\lambda \mathsf{A}_{\varkappa,\mu+\lambda}\,\varepsilon_{\mu+\lambda}, \\ e_2\,\eta_\varkappa &= \sum_1^\mu{}^\lambda \mathsf{A}_{\varkappa,\mu+\lambda}\,\eta_{\mu+\lambda} \end{aligned}\right\} \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots \mu)$$

ist. An Stelle von $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$ können ferner lineare Combinationen derselben benutzt werden, wenn nur gleichzeitig die entsprechenden linearen Combinationen der $\eta_1 \ldots \eta_\mu$ eingeführt werden. Deshalb lassen sich die $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\mu$, $\eta_1 \ldots \eta_\mu$ so wählen, dass einfacher

$$e_2\,\varepsilon_\varkappa = \varepsilon_{\mu+\varkappa}, \quad e_1\,\eta_\varkappa = \eta_{\mu+\varkappa} \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots \mu)$$

wird. Alsdann folgt

$$e_2\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} = e_2 . e_2\,\varepsilon_\varkappa = -\,\varepsilon_\varkappa, \quad e_2\,\eta_{\mu+\varkappa} = -\,\eta_\varkappa,$$

$$e_3\,\varepsilon_\varkappa = e_1\,e_2\,\varepsilon_\varkappa = e_1\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} = i\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} \text{ etc.}$$

Also ist, zusammengefasst, wenn $\varkappa = 1, 2 \ldots \mu$ ist:

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_\varkappa e_1 = i\varepsilon_\varkappa, & \varepsilon_{\mu+\varkappa} e_1 = i\,\varepsilon_{\mu+\varkappa}, & \eta_\varkappa e_1 = -i\eta_\varkappa, & \eta_{\mu+\varkappa} e_1 = -i\,\eta_{\mu+\varkappa}, \\ \varepsilon_\varkappa e_2 = \eta_\varkappa, & \varepsilon_{\mu+\varkappa} e_2 = \eta_{\mu+\varkappa}, & \eta_\varkappa e_2 = -\,\varepsilon_\varkappa, & \eta_{\mu+\varkappa} e_2 = -\,e_{\mu+\varkappa}, \\ \varepsilon_\varkappa e_3 = i\eta_\varkappa, & \varepsilon_{\mu+\varkappa} e_3 = i\,\eta_{\mu+\varkappa}, & \eta_\varkappa e_3 = i\varepsilon_\varkappa, & \eta_{\mu+\varkappa} e_3 = i\,\varepsilon_{\mu+\varkappa}, \\ e_1\,\varepsilon_\varkappa = -i\,\varepsilon_\varkappa, & e_1\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} = i\,\varepsilon_{\mu+\varkappa}, & e_1\,\eta_\varkappa = -i\eta_\varkappa, & e_1\,\eta_{\mu+\varkappa} = i\,\eta_{\mu+\varkappa}, \\ e_2\,\varepsilon_\varkappa = \varepsilon_{\mu+\varkappa}, & e_2\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} = -\,\varepsilon_\varkappa; & e_2\,\eta_\varkappa = \eta_{\mu+\varkappa}, & e_2\,\eta_{\mu+\varkappa} = -\,\eta_\varkappa, \\ e_3\,\varepsilon_\varkappa = i\,\varepsilon_{\mu+\varkappa}, & e_3\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} = i\,\varepsilon_\varkappa, & e_3\,\eta_\varkappa = i\,\eta_{\mu+\varkappa}, & e_3\,\eta_{\mu+\varkappa} = i\,\eta_\varkappa. \end{array}$$

Nunmehr sind somit die Producte aller Einheiten mit $e_0 \ldots e_3$ bekannt. Jedoch sind die vorstehenden Formeln nicht ganz befriedigend. Während nämlich e_1, e_2, e_3 im Quaternionsystem völlig symmetrisch auftreten, sind ihre Producte mit den ε und η nicht mehr ebenso symmetrisch. Es folgt dies aus der einseitigen Bevorzugung der Einheit e_1 bei den obigen allgemeinen Untersuchungen. Wir führen daher an Stelle von $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2\mu}$ und $\eta_1 \ldots \eta_{2\mu}$ neue Einheiten ein:

$$\left.\begin{aligned} e_{\varkappa 0} &= \varepsilon_{\mu+\varkappa} + \eta_\varkappa, \\ e_{\varkappa 1} &= i\,\varepsilon_{\mu+\varkappa} - i\eta_\varkappa, \\ e_{\varkappa 2} &= -\,\varepsilon_\varkappa + \eta_{\mu+\varkappa}, \\ e_{\varkappa 3} &= i\,\varepsilon_\varkappa + i\,\eta_{\mu+\varkappa}. \end{aligned}\right. \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots \mu)$$

Alsdann ergiebt sich die symmetrische Multiplicationstafel:

$$\begin{array}{cccccccccc}
e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & \cdot & e_{\varkappa 0} & e_{\varkappa 1} & e_{\varkappa 2} & e_{\varkappa 3} & \cdot \\
e_1 & -e_0 & -e_3 & e_2 & \cdot & e_{\varkappa 1} & -e_{\varkappa 0} & -e_{\varkappa 3} & e_{\varkappa 2} & \cdot \\
e_2 & e_3 & -e_0 & -e_1 & \cdot & e_{\varkappa 2} & e_{\varkappa 3} & -e_{\varkappa 0} & -e_{\varkappa 1} & \cdot \\
e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 & \cdot & e_{\varkappa 3} & -e_{\varkappa 2} & e_{\varkappa 1} & -e_{\varkappa 0} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
e_{\varkappa 0} & e_{\varkappa 1} & e_{\varkappa 2} & e_{\varkappa 3} & \cdot \\
e_{\varkappa 1} & -e_{\varkappa 0} & -e_{\varkappa 3} & e_{\varkappa 2} & \cdot \\
e_{\varkappa 2} & e_{\varkappa 3} & -e_{\varkappa 0} & -e_{\varkappa 1} & \cdot \\
e_{\varkappa 3} & -e_{\varkappa 2} & e_{\varkappa 1} & -e_{\varkappa 0} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots \mu)$$

Eine kleine Ausrechnung zeigt, dass, wenn eine Zahl x des Systems die Eigenschaft hat, dass

$$-x = e_1 x e_1 = e_2 x e_2 = e_3 x e_3$$

ist, diese Zahl x sich linear aus e_0, $e_{10} \ldots e_{\mu 0}$ zusammensetzt. Nun hat jedes Product $e_{\varkappa 0} e_{j 0}$ diese Eigenschaft. Es drückt sich daher linear durch e_0 und $e_{10} \ldots e_{\mu 0}$ aus.

Die $(\mu + 1)$ Einheiten e_0, $e_{10} \ldots e_{\mu 0}$ bilden demnach für sich ein Zahlensystem mit dem Modul e_0.

Aus diesem System und dem Quaternionensystem e_0, e_1, e_2, e_3 lässt sich nun das ganze System in $(4\mu + 4)$ Einheiten in folgender Weise ableiten:

Es wird jedes Product einer Einheit des Systems $(e_0, e_{10} \ldots e_{\mu 0})$ mit einer des Systems $(e_0 \ldots e_3)$ gleich einer neuen Einheit gesetzt, so:

$$e_{\varkappa 0} e_1 = e_{\varkappa 1}, \quad e_{\varkappa 0} e_2 = e_{\varkappa 2}, \quad e_{\varkappa 0} e_3 = e_{\varkappa 3},$$

während, da e_0 Modul beider Systeme ist:

$$e_{\varkappa 0} e_0 = e_{\varkappa 0}$$

wird. Ferner wird vorausgesetzt, dass jede Einheit des Systems $(e_0, e_{10} \ldots e_{\mu 0})$ mit jeder des Quaternionensystem vertauschbar sei, also:

$$e_1 e_{\varkappa 0} = e_{\varkappa 0} e_1 = e_{\varkappa 1}, \quad e_2 e_{\varkappa 0} = e_{\varkappa 2}, \quad e_3 e_{\varkappa 0} = e_{\varkappa 2}.$$

Alsdann sind die Producte der $e_{\varkappa i}$ völlig definirt, denn es ist ja:

$$e_{\varkappa i} e_{\lambda j} = e_{\varkappa 0} e_i e_{\lambda 0} e_j = e_{\varkappa 0} e_{\lambda 0} \cdot e_i e_j.$$

Aber $e_{\varkappa 0} e_{\lambda 0}$ ist linear durch $e_0, e_{10} \ldots e_{\mu 0}$ ausgedrückt, $e_i e_j$ linear durch $e_0 \ldots e_3$, etwa:

$$e_{\varkappa 0} e_{\lambda 0} = a_{\varkappa \lambda} e_0 + \sum_1^{\mu} {}^{\tau} \alpha_{\varkappa \lambda \tau} e_{\tau 0}, \qquad e_i e_j = \beta_{ij0}\, e_0 + \cdots + \beta_{ij3}\, e_3.$$

Somit kommt:

$$e_{\varkappa i} e_{\lambda j} = \left(a_{\varkappa \lambda} e_0 + \sum {}^{\tau} \alpha_{\varkappa \lambda \tau} e_{\tau 0}\right) (\beta_{ij0}\, e_0 + \cdots + \beta_{ij3}\, e_3).$$

Multiplicirt man die Klammern aus und bedenkt, dass $e_{\tau 0} e_1 = e_{\tau 1}$ etc. ist, so findet man $e_{\varkappa i} e_{\lambda j}$ linear durch $e_0 \ldots e_3$ und die $e_{\tau \sigma}$ ausgedrückt. Die Producte sind also völlig bestimmt.

Demnach hat sich der merkwürdige Satz ergeben:

(1) *Jedes Zahlensystem S, welches das System Q der Hamilton'schen Quaternionen in sich enthält und in welchem der Modul der Quaternionen gleichzeitig Modul des ganzen Systems S ist, lässt sich dadurch herstellen, dass man als Einheiten alle Zahlen benutzt, welche durch Multiplication der Einheiten von Q mit denen eines Systems P, welches denselben Modul hat, hervorgehen, wenn dabei vorausgesetzt wird, dass die Multiplication einer Zahl des Systems Q mit einer Zahl des Systems P commutativ sei.*

Nach den letzten Auseinandersetzungen des § 4 dürfen wir unser Ergebniss offenbar kürzer so aussprechen:

(2) *Jedes Zahlensystem S, welches das System Q der Hamilton'schen Quaternionen enthält und den Modul des letzteren zum Gesammtmodul hat, ist das Product aus Q und irgend einem Zahlensystem P:*

$$S = QP.$$

Umgekehrt ist jedes Product aus Q und irgend einem Zahlensystem P von r Einheiten ein derartiges System S von 4r Einheiten.

Wir fragen uns, wann das System S reducibel ist. Dazu ist nach Satz (2) des § 4 nothwendig und hinreichend, dass in S ausser dem Modul e_0 noch eine Zahl u existire, deren Producte mit allen Zahlen des Systems commutativ sind und für die $u^2 = u$ ist. Sei also

$$u = u_0 e_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 + \sum^{\varkappa} (u_{\varkappa 0} e_{\varkappa 0} + u_{\varkappa 1} e_{\varkappa 1} + u_{\varkappa 2} e_{\varkappa 2} + u_{\varkappa 3} e_{\varkappa 3})$$

diese Zahl, so müsste insbesondere $u e_1 = e_1 u$ sein. Dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn $u_2 = u_3 = u_{\varkappa 2} = u_{\varkappa 3} = 0$ ist. Aus $u e_2 = e_2 u$ folgt analog $u_1 = u_{\varkappa 1} = 0$. Also bliebe:

$$u = u_0 e_0 + \sum^{\varkappa} u_{\varkappa 0} e_{\varkappa 0},$$

d. h. u wäre eine Zahl des Systems P. Das letztere müsste also reducibel sein. Ist es reducibel, so ist offenbar auch $S = QP$ reducibel, denn es ist ja u als Zahl von P in Producten mit den Zahlen von Q commutativ. Also hat sich ergeben, wie man auch direct aus Satz (10) des § 4 folgern könnte:

(3) *Man erhält alle irreducibelen Zahlensysteme S, welche das System Q der Hamilton'schen Quaternionen enthalten und den Modul der letzteren zum Gesammtmodul haben, indem man Q mit allen irreducibelen Zahlensystemen P multiplicirt.*

Das zu Anfang dieses Paragraphen gestellte Problem ist mit Satz (1) oder (2) noch nicht erledigt. Vielmehr handelt es sich nun noch darum, zum System $S = QP$ Einheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots e_r, \varepsilon_1', \varepsilon_2' \dots \varepsilon_s',$

$\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2 \ldots \mathfrak{c}_t$ derart hinzuzufügen, dass sie zusammen mit denen des Systems S ein Zahlensystem bilden und dass überdies jedes

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_\varkappa e_0 = \varepsilon_\varkappa, & \varepsilon'_\varkappa e_0 = 0, & \mathfrak{c}_\varkappa e_0 = 0, \\ e_0 \varepsilon_\varkappa = 0, & e_0 \varepsilon'_\varkappa = \varepsilon'_\varkappa, & e_0 \mathfrak{c}_\varkappa = 0 \end{array}$$

ist. Man ersieht sofort, dass auch jedes

$$\left.\begin{array}{l} e_i \varepsilon_\varkappa = e_i e_0 \varepsilon_\varkappa = 0, \\ \varepsilon'_\varkappa e_i = \varepsilon'_\varkappa e_0 e_i = 0, \\ e_i \mathfrak{c}_\varkappa = \mathfrak{c}_\varkappa e_i \quad = 0 \end{array}\right\} \quad (i=1, 2, 3)$$

ist. Die Grössen $\varepsilon_\varkappa$ ferner reproduciren sich, wenn sie mit e_0 als zweitem Factor multiplicirt werden. Daher können wir uns ohne weiteres für die $\varepsilon_\varkappa$ genau jene Ergebnisse aneignen, die wir weiter oben für die damals mit e und η bezeichneten Einheiten bei ihrer Multiplication mit e_1, e_2, e_3 als zweiten Factoren erhielten. Demnach ist eine gerade Anzahl der $\varepsilon_\varkappa$ vorhanden und alle $\varepsilon_\varkappa$ zerfallen in zwei Schaaren, die wir mit

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\varrho, \quad \eta_1 \ldots \eta_\varrho$$

bezeichnen, dergestalt, dass für diese die früheren Gesetze hinsichtlich der $\varepsilon_\varkappa e_i$ und $\eta_\varkappa e_i$ gelten. Aehnliches können wir von den $\varepsilon'_\varkappa$ in bezug auf ihre Multiplication mit e_0, e_1, e_2, e_3 als ersten Factoren aussagen, und auch sie zerfallen in zwei Schaaren:

$$\varepsilon_1' \ldots \varepsilon'_\sigma, \quad \eta_1' \ldots \eta'_\sigma.$$

Sonach lautet die Multiplicationstafel des ganzen Systems:

	e_0	e_1	e_2	e_3	·	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	·	ε_α	η_α	·	ε'_β	η'_β	·	$\mathfrak{c}_\gamma$	·
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	·	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	·	ε_α	η_α	·	0	0	·	0	·
e_1	e_1	$-e_0$	$-e_3$	e_2	·	$e_{\varkappa 1}$	$-e_{\varkappa 0}$	$-e_{\varkappa 3}$	$e_{\varkappa 2}$	·	$i\varepsilon_\alpha$	$-i\eta_\alpha$	·	0	0	·	0	·
e_2	e_2	e_3	$-e_0$	$-e_1$	·	$\varepsilon_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 0}$	$-e_{\varkappa 1}$	·	η_α	$-\varepsilon_\alpha$	·	0	0	·	0	·
e_3	e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$	·	$e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 1}$	$-e_{\varkappa 0}$	·	$i\eta_\alpha$	$i\varepsilon_\alpha$	·	0	0	·	0	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	·	·	·	·	·	·	·	·						
$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 1}$	$-e_{\varkappa 0}$	$-e_{\varkappa 3}$	$e_{\varkappa 2}$	·	·	·	·	·	·								
$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 0}$	$-e_{\varkappa 1}$	·	·	·	·										
$e_{\varkappa 3}$	$e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 1}$	$-e_{\varkappa 0}$	·	·	·											
·	·	·	·	·	·	·	·											
ε_α	0	0	0	0	·	·												
η_α	0	0	0	0	·	·												
·	·	·	·	·	·													
ε'_β	ε'_β	$-i\varepsilon'_\beta$	$-\eta'_\beta$	$-i\eta'_\beta$	·													
η'_β	η'_β	$i\eta'_\beta$	ε'_β	$-i\varepsilon'_\beta$	·													
·	·	·	·	·	·													
$\mathfrak{c}_\gamma$	0	0	0	0	·													
·	·	·	·	·	·													

$$\begin{array}{l} \varkappa = 1, 2 \ldots \mu, \\ \alpha = 1, 2 \ldots \varrho, \\ \beta = 1, 2 \ldots \sigma, \\ \gamma = 1, 2 \ldots \tau. \end{array}$$

Diese Tafel hat den Nachtheil, dass in ihr imaginäre Factoren auftreten. Um diese zu entfernen, benutzen wir das System der Quaternionen (e_0, e_1, e_2, e_3) in seiner zweiten reellen Form, welche dadurch hervorgeht, dass wir ie_1, $-e_2$, ie_3 als die neuen Einheiten e_1, e_2, e_3 benutzen. Entsprechend führen wir $ie_{\varkappa 1}$, $-e_{\varkappa 2}$, $ie_{\varkappa 3}$ als neue $e_{\varkappa 1}$, $e_{\varkappa 2}$, $e_{\varkappa 3}$ ein und benutzen überdies statt ε_α lieber $-\varepsilon_\alpha$ als Einheit. Alsdann nimmt die Tafel die folgende Gestalt an:

	e_0	e_1	e_2	e_3	·	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	·	ε_α	η_α	·	ε'_β	η'_β	·	$\mathfrak{e}_\gamma$	·
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	·	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	·	ε_α	η_α	·	0	0	·	0	·
e_1	e_1	e_0	e_3	e_2	·	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 3}$	$e_{\varkappa 2}$	·	$-\varepsilon_\alpha$	η_α	·	0	0	·	0	·
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	·	$e_{\varkappa 2}$	$-e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	·	η_α	$-\varepsilon_\alpha$	·	0	0	·	0	·
e_3	e_3	$-e_2$	$-e_1$	e_0	·	$e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 2}$	$-e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 0}$	·	η_α	ε_α	·	0	0	·	0	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 3}$	·	·	·	·	·	·								
$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 3}$	$e_{\varkappa 2}$	·	·	·	·	·									
$e_{\varkappa 2}$	$e_{\varkappa 2}$	$-e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 0}$	$e_{\varkappa 1}$	·	·	·	·										
$e_{\varkappa 3}$	$e_{\varkappa 3}$	$-e_{\varkappa 2}$	$-e_{\varkappa 1}$	$e_{\varkappa 0}$	·	·	·											
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·									
ε_α	0	0	0	0	·	·												
η_α	0	0	0	0	·	·												
·	·	·	·	·	·	·												
ε'_β	ε'_β	ε'_β	η'_β	η'_β	·													
η'_β	η'_β	$-\eta'_\beta$	$-\varepsilon'_\beta$	ε'_β	·													
·	·	·	·	·	·													
$\mathfrak{e}_\gamma$	0	0	0	0	·													
·	·	·	·	·	·													

$$\varkappa = 1, 2 \ldots \mu,$$
$$\alpha = 1, 2 \ldots \varrho,$$
$$\beta = 1, 2 \ldots \sigma,$$
$$\gamma = 1, 2 \ldots \tau.$$

Hierin können wir die Producte der $e_{\varkappa\lambda}$ mit einander nach dem Früheren als bekannt ansehen. Für die übrigen Producte folgen aus dem associativen Gesetze mit Leichtigkeit eine Anzahl Bedingungen, die hier zusammengestellt werden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha e_{\varkappa 0} &= \Sigma a_{\alpha\varkappa j}\,\varepsilon_j, & e_{\varkappa 0}\,\varepsilon_\alpha &= 0, \\ \eta_\alpha e_{\varkappa 0} &= \Sigma a_{\alpha\varkappa j}\,\eta_j, & e_{\varkappa 0}\,\eta_\alpha &= 0, \\ \varepsilon'_\beta e_{\varkappa 0} &= 0, & e_{\varkappa 0}\,\varepsilon'_\beta &= \Sigma b_{\varkappa\beta j}\,\varepsilon'_j, \\ \eta'_\beta e_{\varkappa 0} &= 0, & e_{\varkappa 0}\,\eta'_\beta &= \Sigma b_{\varkappa\beta j}\,\eta'_j, \\ \mathfrak{e}_\gamma e_{\varkappa 0} &= 0, & e_{\varkappa 0}\,\mathfrak{e}_\gamma &= 0. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_\alpha e_a = 0,\quad \varepsilon_\alpha \eta_a = 0,\quad \eta_\alpha \eta_a = 0,\quad \eta_\alpha \varepsilon_a = 0,$$
$$\varepsilon'_\beta \varepsilon_b = 0,\quad \varepsilon'_\beta \eta_b = 0,\quad \eta'_\beta \eta'_b = 0,\quad \eta'_\beta \varepsilon'_b = 0.$$

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon_\alpha \varepsilon'_\beta = 0, & \varepsilon'_\beta \varepsilon_\alpha = \lambda_{\beta\alpha}(e_3 - e_2) + \Sigma d_{\beta\alpha j}(e_{j3} - e_{j2}),\\
\eta_\alpha \varepsilon'_\beta = \Sigma c_{\alpha\beta j}\mathfrak{e}_j, & \varepsilon'_\beta \eta_\alpha = \lambda_{\beta\alpha}(e_0 + e_1) + \Sigma d_{\beta\alpha j}(e_{j0} + e_{j1}),\\
\varepsilon_\alpha \eta'_\beta = \Sigma c_{\alpha\beta j}\mathfrak{e}_j, & \eta'_\beta \varepsilon_\alpha = \lambda_{\beta\alpha}(e_0 - e_1) + \Sigma d_{\beta\alpha j}(e_{j0} - e_{j1}),\\
\eta_\alpha \eta'_\beta = 0, & \eta'_\beta \eta_\alpha = \lambda_{\beta\alpha}(e_3 + e_2) + \Sigma d_{\beta\alpha j}(e_{j3} + e_{j2}).
\end{array}$$

$$\varepsilon_\alpha \mathfrak{e}_\gamma = 0,\quad \eta_\alpha \mathfrak{e}_\gamma = 0,\quad \mathfrak{e}_\gamma \varepsilon_\alpha = \Sigma f_{\gamma\alpha j}\varepsilon_j,\quad \mathfrak{e}_\gamma \eta_\alpha = \Sigma f_{\gamma\alpha j}\eta_j,$$
$$\mathfrak{e}_\gamma \varepsilon'_\beta = 0,\quad \mathfrak{e}_\gamma \eta'_\beta = 0,\quad \varepsilon'_\beta \mathfrak{e}_\gamma = \Sigma g_{\beta\gamma j}\varepsilon'_j,\quad \eta'_\beta \mathfrak{e}_\gamma = \Sigma f_{\beta\gamma j}\eta'_j.$$

$$\mathfrak{e}_\gamma \mathfrak{e}_\delta = \Sigma h_{\gamma\,\delta j}\mathfrak{e}_j.$$

Die Summen sind hierin immer über alle vorhandenen Werthe von j zu erstrecken. Die Producte mit $e_{\varkappa 1}$, $e_{\varkappa 2}$, $e_{\varkappa 3}$ sind nicht in diese Tabelle aufgenommen worden, da sie sich leicht ableiten lassen. Es ist ja $e_{\varkappa 0}e_j = e_j e_{\varkappa 0} = e_{\varkappa j}$.

Allerdings sind die in der Tabelle auftretenden Constanten a, b, c, d, e, f, g, h und λ nicht ganz beliebig zu wählen, sondern noch gewissen aus dem associativen Gesetze folgenden Bedingungen zu unterwerfen.

Wir wollen jedoch auf die weitere Behandlung dieser Systeme nicht eingehen, da wir nur in beschränktem Maasse von ihnen Gebrauch machen werden. Bemerkt sei nur, dass die $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_t$ für sich ein System bilden und zwar ein System mit Modul, da sonst die ganze Tafel, wie man leicht sieht, ein ausgeartetes System darstellen würde. Der Modul des Gesammtsystems ist die Summe aus diesem Modul und aus e_0.

§ 12.

Aufstellung aller irreducibelen Quaternionsysteme in 4, 5, 6, 7 und 8 Einheiten.

Es macht jetzt keine Schwierigkeiten mehr, alle irreducibelen Quaternionsysteme bis zu 8 Einheiten aufzustellen. Nach Satz (5) des § 10 enthält jedes derartige System die Hamilton'schen Quaternionen und gehört daher zu den in § 11 betrachteten Systemen.

Sei zunächst die Zahl der Einheiten

$$n = 4,$$

so ergiebt sich nur das Hamilton'sche System, das sich am Schluss dieses Paragraphen unter der Bezeichnung Q_1 angegeben findet.

Ist

$$n = 5,$$

so gehört das System sicher nicht zu denen, in welchen der Quaternionenmodul Gesammtmodul ist, denn nach Satz (2) des § 11 giebt es derartige Systeme nur in 4, 8, 12 u. s. w. Einheiten. Da nun in den Systemen des § 11 die ε und η, ε' und η' immer paarweis auftreten, so kommt ausser e_0, e_1, e_2, e_3 nur eine Einheit, ein $\mathfrak{e}$, vor. Offenbar ist aber ein solches System reducibel.

Haben wir

$$n = 6,$$

so kommen, da ein $\mathfrak{e}$ sicher auftreten muss, ausser e_0, e_1, e_2, e_3 noch zwei Einheiten $\mathfrak{e}$ vor. Jedes solche System ist jedoch reducibel.

Für

$$n = 7$$

kommen ausser e_0, e_1, e_2, e_3 entweder drei $\mathfrak{e}$ vor — und dies gäbe ein reducibeles System — oder aber ein $\mathfrak{e}$, ein ε und ein η oder endlich ein $\mathfrak{e}$, ein ε' und ein η'. Der zweite Fall giebt, wenn ε mit e_4, η mit e_5, $\mathfrak{e}$ mit e_6 bezeichnet wird, das weiter unten mit Q_2 bezeichnete irreducibele System. Der dritte Fall liefert das dazu reciproke System.

Ist schliesslich

$$n = 8,$$

so haben wir zunächst Systeme von der Form $P.Q$ des vorigen Paragraphen. Nach Satz (3) desselben und der Tabelle in § 9 ergiebt sich hier ein derartiges irreducibeles System durch Multiplication der Hamilton'schen Quaternionen mit dem System in zwei Einheiten e_1, e_2:

$$\begin{matrix} 0 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{matrix}$$

in der unten angegebenen Form Q_3. In Bezug auf die übrigen Qss. in 8 Einheiten sind mehrere Fälle denkbar:

a) Es kommen ausser e_0, e_1, e_2, e_3 noch vier $\mathfrak{e}$ vor. Jedes solche System ist reducibel.

b) Ausser e_0, e_1, e_2, e_3 kommen noch ein ε, ein η und zwei $\mathfrak{e}$ vor. Werden diese Einheiten fortlaufend mit e_4, e_5, e_6, e_7 bezeichnet, so haben wir nur noch die Producte $e_6 e_4$, $e_6 e_5$, $e_7 e_4$, $e_7 e_5$ zu berechnen, während e_6 und e_7 eines der beiden Systeme in 2 Einheiten bilden, nämlich entweder das irreducibele oder das reducibele:

$$\begin{matrix} 0 & e_6 \\ e_6 & e_7 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} e_6 & 0 \\ 0 & e_7 . \end{matrix}$$

Beide Male haben die noch fehlenden Producte nach der Uebersicht zum Schluss des § 11 die Formen:

$$e_6 e_4 = a e_4, \quad e_6 e_5 = a e_5; \qquad e_7 e_4 = b e_4, \quad e_7 e_5 = b e_5 .$$

Im ersten Falle ist $e_0 + e_7$ Gesammtmodul und also $b = 1$. Alsdann kann unschwer $a = 0$ oder $= 1$ gemacht werden. So gehen die beiden untenstehenden Systeme Q_4 und Q_5 hervor, welche beide irreducibel sind. Im zweiten Falle ist $e_0 + e_6 + e_7$ Gesammtmodul, also $a + b = 1$. Aus $e_6 e_7 . e_4 = e_6 . e_7 e_4$ folgt dann $ab = 0$. Es ist also entweder $a = 0$, $b = 1$ oder $a = 1$, $b = 0$. In beiden Fällen ist das System reducibel, im ersten ist e_6, im zweiten e_7 der Reducent.

c) Ausser e_0, e_1, e_2, e_3 kommen ein ε', ein η' und zwei $\mathfrak{e}$ vor. Die sich hier ergebenden Systeme sind natürlich zu den schon gefundenen reciprok.

Da sicher ein $\mathfrak{e}$ vorkommen muss, so sind hiermit alle Möglichkeiten erschöpft.

Es haben sich also nur die fünf in nachfolgender Tabelle zusammengestellten irreducibelen Qss. in 4, 5, 6, 7, 8 Einheiten ergeben. In dieser Tabelle ist jedesmal die zugehörige charakteristische Gleichung den Systemen beigefügt. Die Berechnung derselben wird durch die Benutzung des Satzes (10) des § 1 ganz erheblich erleichtert. k bedeutet wie immer den Grad des Systems, ε den Modul derselben.

$n = 4.$

$k = 2.$ $Q_1.$

$$\begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & -e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x_0 x + (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\varepsilon = 0.$$

$$\varepsilon = e_0.$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\bar{e}_1 = -e_1, \ \bar{e}_2 = -e_2, \ \bar{e}_3 = -e_3.$$

$n = 7.$

$k = 3.$ $Q_2.$

$$\begin{array}{ccccccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & 0 \\ e_1 & e_0 & e_3 & e_2 & -e_4 & e_5 & 0 \\ e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 & e_5 & -e_4 & 0 \\ e_3 & -e_2 & -e_1 & e_0 & e_5 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \end{array}$$

$$[x^2 - 2x_0 x + (x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)\varepsilon] \,.$$
$$. \, [x - x_6 \varepsilon] = 0.$$

$$\varepsilon = e_0 + e_6.$$

Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.

$$n = 8.$$

$k=4.$ Q_3.

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e_1 & -e_0 & -e_3 & e_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e_2 & e_3 & -e_0 & -e_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 \\
e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\
e_1 & -e_0 & -e_3 & e_2 & e_5 & -e_4 & -e_7 & e_6 \\
e_2 & e_3 & -e_0 & -e_1 & e_6 & e_7 & -e_4 & -e_5 \\
e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 & e_7 & -e_6 & e_5 & -e_4
\end{array}$$

$$[x^2 - 2x_4x + (x_4{}^2 + x_5{}^2 + x_6{}^2 + x_7{}^2)\varepsilon]^2 = 0.$$

$$\varepsilon = e_4.$$

Geht in sein reciprokes System über durch

$$\bar{e}_1 = -e_1, \quad \bar{e}_2 = -e_2, \quad \bar{e}_3 = -e_3,$$
$$\bar{e}_5 = -e_5, \quad \bar{e}_6 = -e_6, \quad \bar{e}_7 = -e_7.$$

Q_4.

$$\begin{array}{cccccccc}
e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\
e_1 & e_0 & e_3 & e_2 & -e_4 & e_5 & 0 & 0 \\
e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 & e_5 & -e_4 & 0 & 0 \\
e_3 & -e_2 & -e_1 & e_0 & e_5 & e_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 & e_7
\end{array}$$

$$[x^2 - 2x_0x + (x_0{}^2 - x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2)\varepsilon][x - x_7\varepsilon]^2 = 0.$$

$$\varepsilon = e_0 + e_7.$$

Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.

$k=5.$ Q_5.

$$\begin{array}{cccccccc}
e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & 0 & 0 \\
e_1 & e_0 & e_3 & e_2 & -e_4 & e_5 & 0 & 0 \\
e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 & e_5 & -e_4 & 0 & 0 \\
e_3 & -e_2 & -e_1 & e_0 & e_5 & e_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 & e_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 & e_5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 & e_7
\end{array}$$

$$[x^2 - 2x_0x + (x_0{}^2 - x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2)\varepsilon][x - (x_6 + x_7)\varepsilon][x - x_7\varepsilon]^2 = 0.$$

$$\varepsilon = e_0 + e_7.$$

Kann nicht in sein reciprokes System übergeführt werden.

§ 13.

Verschiedene Bemerkungen über Quaternionsysteme.

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass es kein Qs. giebt, dessen Grad gleich oder um Eins kleiner als die Anzahl der Einheiten ist. Es gilt nämlich zunächst der Satz:

(1) *Giebt es in einem Zahlensysteme nur l von einander unabhängige und unter einander commutative Zahlen, so ist der Grad des Systems höchstens gleich l.*

In der That, ist k der Grad, x eine allgemeine Zahl des Systems und ε der Modul desselben, so sind $\varepsilon, x, x^2 \dots x^{k-1}$ von einander unabhängig und unter einander commutativ, daher $k \leq l$.

Sollte nun ein Qs. $(e_1 \dots e_n)$ vom Grade $k = n$ sein, so würde hiernach das ganze System commutativ sein, was nicht der Fall ist.

Sollte ferner ein Qs. $(e_1 \dots e_n)$ vom Grade $k = n - 1$ sein, so müsste das System $n - 1$ mit einander commutative Einheiten enthalten. Bedeuten e_1, e_2, e_3 die Einheiten, für welche

$$e_2 e_3 - e_3 e_2 = 2 e_1, \quad e_3 e_1 - e_1 e_3 = 2 e_2, \quad e_1 e_2 - e_2 e_1 = 2 e_3$$

ist, so müssten also auch zwei von einander unabhängige, aus e_1, e_2, e_3 ableitbare Zahlen existiren, die mit einander commutativ wären, etwa

$$\alpha e_1 + \beta e_2, \qquad \gamma e_1 + \delta e_3.$$

Natürlich dürfen β und δ nicht beide Null sein, ebenso nicht α und β oder γ und δ. Es ist jedoch

$$(\alpha e_1 + \beta e_2)(\gamma e_1 + \delta e_3) - (\gamma e_1 + \delta e_3)(\alpha e_1 + \beta e_2) = -2\alpha\delta e_2 - 2\beta\gamma e_3 + 2\beta\delta e_1.$$

Dies ist nur dann Null, wenn

$$\alpha\delta = 0, \quad \beta\gamma = 0, \quad \beta\delta = 0$$

ist. Wenn $\beta \neq 0$ ist, so würde $\gamma = \delta = 0$ folgen, während $\beta = 0$ noch $\alpha = 0$ oder $\delta = 0$ nach sich zöge. Dies darf nicht sein, daher:

(2) *Der Grad eines Quaternionsystems ist wenigstens um 2 kleiner als die Anzahl der Einheiten des Systems.*

Vergleichen wir hiermit die Sätze (1) und (2) in § 6, so erkennen wir, dass wir in jenen Sätzen an Stelle des Wortes Nichtquaternionsystem allgemein das Wort Zahlensystem hätten setzen dürfen, wie wir schon dort hervorhoben.

Um alle Quaternionsysteme aufzustellen, deren Grade um 2 kleiner als die Anzahl der Einheiten sind, verfahren wir so: Ist n die Zahl der Einheiten und x eine beliebige Zahl des Systems, so sind der Modul ε und $x, x^2 \dots x^{n-3}$ sicher $n - 2$ von einander unabhängige

und mit einander commutative Einheiten. Das System enthält daher $n-2$ unter sich commutative Einheiten, aber auch nicht mehr als diese, da es ein Quaternionsystem sein soll, also 3 Einheiten enthält, die nicht unter einander commutativ sind. Wie in § 10 können wir das System dadurch als Qs. definiren, dass in ihm drei von einander unabhängige Zahlen u, v, w derart vorkommen, dass

(3) $$uv - vu = 2v, \quad uw - wu = -2w, \quad vw - wv = -4u$$

ist. Ferner dürfen wir annehmen, u gehöre zu jenen $n-2$ unter einander commutativen Einheiten, die wir für den Augenblick mit $e_1 \dots e_{n-2}$ bezeichnen wollen. Alsdann sind also $e_1 \dots e_{n-2}, v, w$ gerade n von einander unabhängige Einheiten des Systems. Sei nun

$$e_i v = a_{i1} e_1 + \cdots + a_{in-2} e_{n-2} + \lambda_i v + \lambda_i' w,$$

so ist, weil $ue_i = e_i u$ ist:

$$ue_i v = e_i uv = a_{i1} ue_1 + \cdots + a_{in-2} ue_{n-2} + \lambda_i uv + \lambda_i' uw$$

und

$$e_i vu = a_{i1} e_1 u + \cdots + a_{in-2} e_{n-2} u + \lambda_i vu + \lambda_i' wu.$$

Subtrahiren wir beide Gleichungen von einander, so bleibt wegen $e_j = e_j u$ und wegen der obigen Formeln (3):

$$2e_i v = 2\lambda_i v - 2\lambda_i' w.$$

Vergleichen wir dies mit dem angenommenen Werth von $e_i v$, so ersehen wir, dass $\lambda_i = 0$ und

$$e_i v = \lambda_i v$$

ist. Aehnlich kommt:

$$ve_i = \mu_i v.$$

Sei ferner

$$v^2 = b_1 e_1 + \cdots + b_{n-2} e_{n-2} + \nu v + \nu' w,$$

so wird analog

$$uv^2 - v^2 u = \nu(uv - vu) + \nu'(uw - wu)$$

oder, da $v^2 u = uv^2 - 2v^2$ ist (vgl. § 10):

$$2v^2 = 2\nu v - 2\nu' w.$$

Demnach ist auch $\nu' = 0$ und es kommt:

$$v^2 = \nu v.$$

Ganz ähnlich ergiebt sich

$$we_i = \lambda_i' w, \quad e_i w = \mu_i' w, \quad w^2 = \nu' w.$$

Aus $ve_i \,.\, v = v \,.\, e_i v$ und $we_i \,.\, w = w \,.\, e_i w$ folgt noch:

$$(\lambda_i - \mu_i)\nu = 0, \qquad (\lambda_i' - \mu_i')\nu' = 0.$$

Da nun sicher v nicht mit allen Einheiten $e_1 \dots e_{n-2}$ commutativ ist, so ist wenigstens für ein i auch $\lambda_i \neq \mu_i$, d. h. $\nu = 0$. Ebenso ist $\nu' = 0$. Somit bleibt:

$$(4) \qquad \begin{cases} e_i v = \lambda_i v, & v e_i = \mu_i v, \quad v^2 = 0; \\ e_i w = \lambda_i' w, & w e_i = \mu_i' w, \quad w^2 = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit η_1, η_2, η_3 jene drei Einheiten unseres Qs., für welche

$$(5) \quad \eta_2\eta_3 - \eta_3\eta_2 = 2\eta_1, \quad \eta_3\eta_1 - \eta_1\eta_3 = 2\eta_2, \quad \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_1 = 2\eta_3$$

ist, so haben wir zu setzen (vgl. § 10):

$$u = i\eta_1, \quad v = \eta_2 + i\eta_3, \quad w = \eta_2 - i\eta_3$$

und aus (4) folgt insbesondere

$$(\eta_2 \pm i\eta_3)^2 = 0.$$

Da η_1, η_2, η_3 im Qs. symmetrisch auftreten, so ist auch

$$(\eta_1 \pm i\eta_2)^2 = 0, \quad (\eta_3 \pm i\eta_2)^2 = 0,$$

d. h.

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2,$$

und wegen (5):

$$\begin{aligned} \eta_2\eta_3 &= \eta_1, & \eta_3\eta_1 &= \eta_2, & \eta_1\eta_2 &= \eta_3, \\ \eta_3\eta_2 &= -\eta_1, & \eta_1\eta_3 &= -\eta_2, & \eta_2\eta_1 &= -\eta_3, \end{aligned}$$

während, wenn $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2$ mit $-\eta_0$ bezeichnet wird, ohne Mühe folgt, dass η_0 Modul für das System $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ist.

Wir sehen also, dass das gesuchte Qs. in sich das System der Hamilton'schen Quaternionen enthält. Es gehört also zu den in § 11 untersuchten Systemen. Wir wollen jedoch von den damals gefundenen Tafeln keinen Gebrauch machen, da sich das jetzt vorliegende Problem leicht direct lösen lässt: Es hat sich ergeben:

$$\begin{aligned} &u^2 = \eta_0 & &v^2 = 0, & &w^2 = 0, & &\eta_0^2 = \eta_0, \\ &uv = v, & &uw = -w, & &vw = (\eta_2 + i\eta_3)(\eta_2 - i\eta_3) = -\eta_0 - 2u, \\ &vu = -v, & &wu = w, & &wv = (\eta_2 - i\eta_3)(\eta_2 + i\eta_3) = -\eta_0 + 2u, \end{aligned}$$

$$u\eta_0 = \eta_0 u = u, \quad v\eta_0 = \eta_0 v = v, \quad w\eta_0 = \eta_0 w = w.$$

η_0 gehört dem System $(e_1 \ldots e_{n-2})$ an und es ist $\eta_0^2 = \eta_0$. Sicher ist η_0 nicht Modul dieses Systems, sobald $n > 4$ ist, denn es ist nach (4):

$$-2\eta_0 e_i = (vw + wv)e_i = \mu_i'(-\eta_0 - 2u) + \mu_i(-\eta_0 + 2u)$$

und dies ist verschieden von $-2e_i$, sobald nicht alle Einheiten $e_1 \ldots e_{n-2}$ sich auf η_0 und u allein reduciren. Im letzteren Falle wäre das ganze System nichts anderes als das der Hamilton'schen Quaternionen. Sehen wir davon ab, so folgt also nach Satz (2) des § 4, dass η_0 Reducent des Systems $(e_1 \ldots e_{n-2})$ ist. Da alle $\eta_0 e_i = e_i \eta_0$ nur η_0 und u enthalten, so ist eines der Theilsysteme, in welches das System $(e_1 \ldots e_{n-2})$ zerfällt, das System (η_0, u). Die übrigen Einheiten des Systems $(e_1 \ldots e_{n-2})$ geben mit diesem multiplicirt Null und daher

auch wegen $uv = v$ etc. auch dann, wenn man sie mit v oder w multiplicirt. Wir können also folgern: Das gesuchte Qs. zerfällt in ein commutatives System von $n-4$ Einheiten und das System (η_0, u, v, w) oder $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_2)$ der Hamilton'schen Quaternionen. Letzteres hat den Grad 2, ersteres also, da das ganze System vom Grad $n-2$ sein soll, nach Satz (5) des § 4 den Grad $n-4$. Es ist also ein System, dessen Grad gleich der Anzahl der Einheiten ist, ein Study'-sches System. Daher:

(6) *Jedes Quaternionsystem, dessen Grad um 2 kleiner als die Anzahl der Einheiten ist, zerfällt in das System der Hamilton'schen Quaternionen und ein Study'sches System.*

Das einzige irreducibele derartige System ist also das der Hamilton'schen Quaternionen.

Etwas leichter lässt sich die Frage erledigen, ob und welche Qss. es giebt, deren Grad gleich 2 ist.

In einem solchen System muss das Quadrat jeder Zahl durch sie selbst und den Modul ε ausdrückbar sein. Es ist also auch etwa:

(7) $e_1^2 = \lambda_1 e_1 + \mu_1 \varepsilon, \quad e_2^2 = \lambda_2 e_2 + \mu_2 \varepsilon, \quad e_3^2 = \lambda_3 e_3 + \mu_3 \varepsilon.$

Hier sollen e_1, e_2, e_3 jene drei Einheiten bedeuten, für welche

$$e_2 e_3 - e_3 e_2 = 2 e_1, \quad e_3 e_1 - e_1 e_3 = 2 e_2, \quad e_1 e_2 - e_2 e_1 = 2 e_3$$

ist. Aus (7) würde folgen:

$$e_1^2 e_2 - e_2 e_1^2 = 2 \lambda_1 e_3$$

oder da

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 + 2 e_3, \quad e_2 e_1 = e_1 e_2 - 2 e_3$$

ist:

$$e_1(e_2 e_1 + 2 e_3) - (e_1 e_2 - 2 e_3) e_1 = 2 \lambda_1 e_3,$$

d. h.:

$$e_1 e_3 + e_3 e_1 = \lambda_1 e_3.$$

Da nun

$$e_1 e_3 - e_3 e_1 = 2 e_2$$

ist, so käme

$$e_1 e_3 = -e_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 e_3, \qquad e_3 e_1 = e_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 e_3.$$

Analog wäre

$$e_2 e_1 = -e_3 + \frac{1}{2} \lambda_2 e_1, \qquad e_1 e_2 = e_3 + \frac{1}{2} \lambda_2 e_1;$$

$$e_3 e_2 = -e_1 + \frac{1}{2} \lambda_3 e_2, \qquad e_2 e_3 = e_1 + \frac{1}{2} \lambda_3 e_2.$$

Demnach käme:

$$e_1 e_2 . e_3 = \left(e_3 + \frac{1}{2} \lambda_2 e_1\right) e_3 = \lambda_3 e_3 + \mu_3 \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda_2 \left(-e_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 e_3\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \lambda_2 e_2 + \left(\lambda_3 + \frac{1}{4} \lambda_1 \lambda_2\right) e_3 + \mu_3 \varepsilon$$

und andererseits:

$$e_1 \cdot e_2 e_3 = e_1 \left(e_1 + \frac{1}{2} \lambda_3 e_2\right) = \lambda_1 e_1 + \mu_1 \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda_3 \left(e_3 + \frac{1}{2} \lambda_2 e_1\right)$$
$$= \frac{1}{2} \lambda_3 e_3 + \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} \lambda_2 \lambda_3\right) e_1 + \mu_1 \varepsilon.$$

Es müssten beide Werthe rechts gleich sein, und somit wäre:

$$-\left(\lambda_1 + \frac{1}{4} \lambda_2 \lambda_3\right) e_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 e_2 + \left(\frac{1}{2} \lambda_3 + \frac{1}{4} \lambda_1 \lambda_2\right) e_3 + (\mu_3 - \mu_1) \varepsilon = 0.$$

Da aber $e_1, e_2, e_3, \varepsilon$ von einander unabhängig sind, so müssten mithin die vier Coefficienten einzeln verschwinden. Da ferner auch die durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 hervorgehenden Formeln richtig sein müssten, so wäre also:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3,$$

d. h.

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = \mu \varepsilon,$$
$$e_1 e_3 = -e_2, \quad e_2 e_1 = -e_3, \quad e_3 e_2 = -e_1,$$
$$e_3 e_1 = e_2, \quad e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1$$

und wegen

$$e_1^2 \cdot e_2 = \mu e_2 = e_1 \cdot e_1 e_2 = e_1 e_3 = -e_2$$

auch $\mu = -1$. Die Einheiten e_1, e_2, e_3 und ε würden also für sich das System der Hamilton'schen Quaternionen bilden. Das gesuchte System würde danach zu den Systemen des Satzes (2) in § 11 gehören, die durch Multiplication der Quaternionen Q mit einem Zahlensystem P entstehen. Offenbar müsste auch der Grad des Systems P, wenn es überhaupt mehr als eine Einheit enthält, gleich 2 sein. Es wäre also, wenn x eine Zahl des Quaternionensystems Q, y eine des Systems P bedeutete, etwa:

$$x^2 = \alpha x + \beta \varepsilon, \qquad y^2 = \gamma y + \delta \varepsilon,$$

daher, da x und y gegenseitig commutativ wären:

$$(xy)^2 = x^2 y^2 = \alpha \gamma xy + \alpha \delta x + \beta \gamma y + \beta \delta \varepsilon.$$

Nun aber müsste $(xy)^2$ nach Voraussetzung darstellbar sein in der Form:

$$(xy)^2 = \lambda xy + \mu \varepsilon.$$

Da jedoch xy, x, y, ε von einander unabhängige Zahlen des Systems PQ wären, so würde hieraus $\alpha\delta = \beta\gamma = 0$ folgen. α und γ sind natürlich verschieden von Null, sodass folglich $\beta = \delta = 0$, d. h. $x^2 = \alpha x$ oder $x = \alpha \varepsilon$ hervorginge, was absurd ist. Das System P muss sich vielmehr auf nur eine Einheit reduciren, d. h. PQ das System Q selbst sein. Hiermit ist bewiesen:

(8) *Das einzige Quaternionsystem, dessen Grad gleich zwei ist, ist das System der Hamilton'schen Quaternionen.*

§ 14.

Geschichtliche und litterarische Nachweise.

Die Theorie der complexen Zahlensysteme hat ihren Ursprung in der durch Gauss 1831 bewirkten definitiven Aufnahme der gewöhnlich complexen Zahlen in die Wissenschaft. Von Gauss rührt auch der Name „complexe Zahl" her. Mit der Deutung der Zahlen $a + bi$ als Punkte der Ebene lag für ihn die Erweiterung des Zahlengebietes in geometrischer Hinsicht nahe. Doch ist uns über seine Ansichten und etwaigen Arbeiten in diesem Gebiete nichts überkommen ausser einer durch neuere Autoren vielbesprochenen Bemerkung, nach welcher er sich darüber Klarheit verschafft haben muss, warum die Arithmetik keiner höheren complexen Zahlen bedarf.

Auch W. R. Hamilton ging zunächst von der geometrischen Deutung der Zahlen als Punkte und zwar als Punkte des Raumes aus und gelangte so 1843 zu seinen Quaternionen, deren Studium er sich zur Lebensaufgabe machte.

Der erste, der die Zahlensysteme in allgemeinstem Umfang einführte, ist H. Grassmann in seiner zweiten Ausdehnungslehre von 1862. Für die Productbildung setzte er das distributive Gesetz fest, während er die Gültigkeit des commutativen und associativen Principes der Multiplication dahingestellt sein liess. Gewisse specielle Multiplicationsarten spielen in seiner Ausdehnungslehre eine wichtige Rolle. Uebrigens definirte er das Zahlensystem insofern allgemeiner, als jetzt gebräuchlich, als er nicht verlangte, dass die Producte $e_i e_k$ nothwendig wieder dem ursprünglichen System $(e_1 \dots e_n)$ angehören sollten. Ihre Producte mit den Einheiten können fernerhin zu abermals neuen Zahlen führen u. s. w. Setzt man jedoch voraus, dass die Bildung neuer Zahlen auf diesem Wege der Multiplication schliesslich eine Grenze habe, so kann man alle so entstandenen neuen Zahlen dem ursprünglichen System adjungiren und gelangt dadurch zu dem modernen Begriff eines begrenzten complexen Systems, der zuerst von H. Hankel 1867 in voller Allgemeinheit eingeführt wurde. Auch Hankel nimmt von vornherein nur das Bestehen des distributiven Gesetzes an, indem er sich die Producte der Einheiten in beliebiger Weise als lineare Functionen der Einheiten definirt denkt.

In der Folgezeit treten nun immer deutlicher in den vielen einzelnen, namentlich englisch-americanischen Abhandlungen, wie in denen von Cayley, Clifford, Peirce und Sylvester zwei Gesichtspunkte hervor: Einmal die Bedeutung des associativen Gesetzes der Multiplication, das von nun an überall beibehalten wird, andererseits die Auffassung der Multiplication als lineare Substitution. Der Zusammenhang

zwischen complexen Zahlen und linearen Substitutionen ist alsdann namentlich von Frobenius*) 1878 erfolgreich verwerthet worden.

Alle Zahlensysteme in zwei Einheiten — es giebt deren bekanntlich nur zwei Typen — wurden zuerst und zwar vor 1880 von Weierstrass in seinen Vorlesungen über Functionentheorie bestimmt. Unabhängig davon berechnete Cayley 1883—84 ebenfalls diese und überdies auch die ausgearteten Systeme in zwei Einheiten, sodass es für ihn nur eines Schrittes — der Hinzufügung des Moduls — bedurft hätte, um daraus die Systeme in drei Einheiten abzulesen.

Während man sich in England und America vielfach mit den complexen Zahlen beschäftigte, veranlasste in Deutschland der Umstand, dass 1884 Weierstrass einen an H. A. Schwarz gerichteten Brief veröffentlichen liess, der über gewisse specielle Systeme und die Beantwortung der erwähnten Gauss'schen Frage handelte, eine Reihe von Arbeiten über complexe Zahlen, unter denen namentlich die von Dedekind zu nennen sind. Um dieselbe Zeit machte Poincaré in einer nicht ganz scharf formulirten Note zum ersten Mal ausdrücklich auf den Zusammenhang aufmerksam, der zwischen den Zahlensystemen und gewissen continuirlichen Gruppen von linearen Transformationen besteht. Hiernach war es für Lie, den Begründer der Theorie der Transformationsgruppen, naturgemäss von besonderem Interesse, diesen Zusammenhang näher ergründet zu sehen. Er forderte daher wiederholt in seinen Vorlesungen dazu auf, die Begriffe und Sätze der Gruppentheorie auf die Zahlensysteme anzuwenden. Er veranlasste so auch mich, nach dieser Richtung hin zu arbeiten.

Schur veröffentlichte 1888 eine Abhandlung, welche von der in gewissem Sinne allgemeinst denkbaren Form der Operationen der Addition und Multiplication ausgehend diese durch Einführung passender Variabeln auf die gebräuchliche Form der Zahlensysteme und die zugehörigen Transformationsgruppen zurückführte, während Study 1889 zum ersten Mal eine völlig erschöpfende Darstellung des Zusammenhangs zwischen Zahlen und Gruppen lieferte, indem er namentlich die äusserst wichtige Umkehrbarkeit dieses Zusammenhanges darthat. (Man vergleiche die betreffenden Bemerkungen in § 1). Auch bestimmte er 1889 alle Zahlensysteme in vier Einheiten und alle diejenigen, deren Grad gleich der Zahl der Einheiten ist. Zur selben Zeit gelangte ich dazu, alle Systeme in 5 Einheiten sowie gewisse allgemeine Sätze aufzustellen, indem ich alle Systeme auf Grund gruppentheoretischer Thatsachen in zwei Classen einreihte.

Durch die neueren Untersuchungen namentlich Study's ist die

---

*) Nachträglich bemerke ich, dass sich die Sätze (5) und (10) des § 1 schon, wenn auch in anderer Einkleidung, bei Frobenius und Weyr finden.

Theorie der complexen Zahlensysteme mit associativer Multiplication ein Theil der Lie'schen Theorie der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen geworden, und ein Fortschritt im einen bedeutet einen Fortschritt im andern Gebiet.

In Bezug auf Litteraturnachweise aus älterer Zeit bis zum Jahre 1867 kann ich auf das Lehrbuch von H. Hankel verweisen. Im Nachfolgenden findet man eine chronologische Zusammenstellung von allerdings sehr verschiedenartigen neueren Arbeiten über complexe Zahlen und verwandte Gebiete, wie bilineare Formen und Matricen. Diese Zusammenstellung kann jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen. Im zweiten Theil von Stolz' Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*) findet der Leser eine gedrängte Darstellung der Arbeiten über complexe Zahlen von Weierstrass, Dedekind und ihren Nachfolgern.

Litteratur.

H. Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. 1. Theil: Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig 1867.

Ch. Peirce, Description of a notation for the logic of relatives. Memoirs Am. Acad. Sciences IX (1870).

Clifford, Preliminary sketch of biquaternions. Proceed. of the Lond. Math. Soc. IV (1873), S. 381–395.

— Further note on biquaternions, Notes on biquaternions. (1876). Mathem. papers by Clifford, London 1882, S. 385—396.

Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelle's Journal 84 (1878), S. 1—63 (insbesondere § 14).

Pincherle, Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche second i principii del Prof. Weierstrass. Giornale di Matematiche, XVIII (1880), 2. Theil, S. 317 ff. (namentlich S. 203—210).

Lipschitz, Principes d'un calcul algébrique, qui contient comme espèces particulièrs le calcul des quantités imaginaires et des quaternions. Comptes Rendus XCI (1880), S. 619–621, 660—664. Wiederabdruck im Bulletin des Sc. Math., 2. Série XI (1887), 1. partie, S. 115—120.

B. Peirce, Linear associative algebra. With notes and addenda by C. S. Peirce, son of the author. American Journal of Math. IV (1881), S. 97—229.

Cayley, On the 8-square imaginaires. Americ. Journ. of Math. IV (1881), S. 293—296.

— On associative imaginaries. Johns Hopkins Univers. Circular II (1882), S. 15ff.

*) Irrthümlicherweise ist daselbst S. 26—27 als charakteristische Gleichung der Quaternionen eine Gleichung dritten Grades angegeben, während doch schon eine Gleichung zweiten Grades existirt.

C. S. Peirce, On a class of multiple algebras. Johns Hopkins Univers. Circ. II (1882), S. 3 ff.

Sylvester, A word on nonions. Johns Hopk. Circ. II, S. 241 (1882).

— Sur les quantités formants une groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. Comptes Rendus XCVII (1883), S. 1336—1340, XCVIII (1884), S. 273—276, 471—475.

Cayley, On double algebra. Proceed. of the Lond. Math. Soc. XV (1883—84), S. 185—197.

Poincaré, Sur les nombres complexes. Comptes Rendus XCIX (1884), S. 740—742.

Sylvester, On the three laws of motion in the world of universal algebra. Johns Hopkins Circ. 1884.

— Lectures on the principles of universal algebra. Americ. Journal of Math. VI (1884), S 270—286.

Weierstrass, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Göttinger Nachr. 1884, S. 395—419.

Schwarz, Bemerkungen zu der in Nr. 10 dieser Nachrichten abgedruckten Mittheilung des Herrn Weierstrass. Gött. Nachr. 1884, S. 516—519.

Dedekind, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. Nachr. 1885, S. 141—159.

J. Petersen, Om algebraens Grundbegreber. Tidsskrift for Math. 5. Raekke, 3. Aargang (1885), S. 1—22.

Berloty, Theorie des quantités complexes à n unités principales. (Thèse). Paris 1886.

Buchheim, Note on linear associative algebra. Messenger of Math. 15 (1886), S. 76—78.

Hölder, Bemerkungen zu der Mittheilung des Herrn Weierstrass. Göttinger Nachr. 1886, S. 241—244.

Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, 2. Theil. Leipzig 1886. (Namentlich S. 1—29).

Dedekind, Erläuterungen zur Theorie der sogen. allgemeinen complexen Grössen. Götting. Nachr. 1887, S. 1—7.

Buchheim, Note on double alg. Messenger of Math. 16 (1887), S. 62—63.

— Note on triple algebra. Messenger of Math. 16 (1887), S. 111—114.

Ed. Weyr, Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices. Prager Berichte 1887, S. 616—618.

— Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales. Bulletin des Sc. Math. 2. Série XI (1887), 1. partie, S. 205—215.

Cayley, On multiple Algebra. Quarterly Journal of Math. 22 (1887), S. 270—308.

J. Petersen, Ueber n-dimensionale complexe Zahlen. Götting. Nachr. 1887, S. 489—502.

F. Schur, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Math. Annalen XXXIII (1888), S. 49—60.

Hölder, Bemerkungen zur Quaternionentheorie. Götting. Nachr. 1889, S. 34—38.

Study, Ueber Systeme von complexen Zahlen. Götting. Nachr. 1889, S. 237—268.

Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. Leipz. Berichte, math.-phys. Classe, 1889, S. 177—228.

Scheffers, Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen. Leipz. Berichte, math.-phys. Classe, 1889, S. 290—307.

Lie, Ueber irreducibele Berührungstransformationsgruppen. Leipz. Berichte, math.-phys. Class, 1889, S. 320—327 (insbes. S. 326—327).

Scheffers, Ueber die Berechnung von Zahlensystemen. Leipz. Berichte, math.-phys. Classe, 1889, S. 400—457.

Ed. Weyr, Zur Theorie der bilinearen Formen. Monatshefte für Math. u. Phys. I (1890), S. 163—236.

Study, Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen. Monatshefte für Math. u. Phys. I (1890), S. 283—355.

Taber, On the theorie of matrices. Amer. Journ. of Math. XII (1890), S. 337—396. (Historisches S. 352 ff).

Study, Recurrirende Reihen und bilineare Formen. Monatshefte für Math. u. Phys. II (1891), S. 23—54.

Rohr, Ueber die aus fünf Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme. (Dissertation). Marburg 1890.

Inhaltsverzeichniss.

Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. I.

Von

J. Horn in Freiburg i. Br.

Die Theorie der regulären Lösungen der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x) \cdot y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, m)$$

ist von den Herren Sauvage*) und Grünfeld**), sowie von Herrn Koenigsberger in seinem Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen***) behandelt worden. Insoferne sich diese Arbeiten direct an die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen anschliessen, lassen sie die allgemeineren Verhältnisse, welche ein solches System von Differentialgleichungen gegenüber einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung darbietet, nicht genügend hervortreten. Durch die Beschäftigung mit Systemen linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen†), wobei sich die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen nicht direct verwerthen lässt, wurde ich auf die Betrachtung der oben bezeichneten Systeme hingewiesen. Ich theile hier zunächst über die Form der regulären Lösungen eines Differentialgleichungensystems von der Gestalt

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + \cdots)\, y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, m)$$

*) Sur les solutions régulières d'un systeme d'équations différentielles (Ann. de l'Ec. norm. 1886, 1888, 1889).

**) Ueber die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen (Denkschriften der Wiener Academie, math.-naturw. Cl., Bd. 54, 1888).

***) Seite 441—469.

†) Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen (Act. math. Bd. 12). — Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie u. s. w. (Act. math. Bd. 14). — Ueber Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen; Freiburger Habilitationsschrift 1890 (Berlin, Mayer u. Müller).

eine Untersuchung mit, welche für eine demnächstige Veröffentlichung über Systeme totaler linearer Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen als Grundlage dienen soll. Ausserdem mag die gegenwärtige Arbeit als Ergänzung zu den Nummern 5, 6, 7 von Capitel 6, II. des Koenigsberger'schen Lehrbuchs gelten, in welchem das Princip, die Differentialgleichungen höherer Ordnung durch Differentialgleichungensysteme mit mehreren abhängigen Veränderlichen zu ersetzen, vollständig durchgeführt ist. Ausser Koenigsberger, Capitel 6, I. wird nichts aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen vorausgesetzt, wohl aber die Weierstrass'sche Theorie der bilinearen Formen*), auf welche sich das Folgende stützt.

§ 1.

Normalform des Differentialgleichungensystems für die Umgebung eines singulären Punktes.

Um die Lösungen des Differentialgleichungensystems

$$(1) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta A_{\alpha\beta}\, y_\beta \quad (\alpha,\ \beta = 1, \cdots, m),$$

$$A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + a''_{\alpha\beta}x^2 + \cdots$$

in der Umgebung der singulären Stelle $x = 0$ zu untersuchen, führen wir dasselbe unter Anwendung der Theorie der Transformation einer bilinearen Formenschaar in eine gewisse Normalform über. Mit Hilfe der Unbestimmten $u_1, \ldots, u_m$ fassen wir die m Gleichungen (1) zusammen in

$$x\frac{d\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha}{dx} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, y_\beta.$$

Durch die lineare Substitution

$$u_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha\beta}\, v_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta}\, z_\beta,$$

$$v_\beta = \sum_\alpha h_{\alpha\beta}\, u_\alpha, \qquad z_\beta = \sum_\alpha g_{\alpha\beta}\, y_\alpha$$

möge das bilineare Formenpaar

$$\sum_\alpha u_\alpha\, y_\alpha, \qquad \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}\, u_\alpha\, y_\beta$$

in die Weierstrass'sche Normalform

*) Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. (Berliner Monatsberichte 1868).

$$\sum_\alpha v_\alpha z_\alpha, \quad \sum_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} v_\alpha z_\beta$$

übergehen. Ist

$$\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} v_\alpha z_\beta,$$

so wird die obige zusammenfassende Gleichung

$$x \frac{d \sum_\alpha v_\alpha z_\alpha}{dx} = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} v_\alpha z_\beta,$$

und hieraus gehen, da $v_1, \ldots, v_m$ Unbestimmte sind, die m Gleichungen

$$x \frac{dz_\alpha}{dx} = \sum_\beta P_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, m), \tag{2}$$

$$P_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} g_{\lambda\alpha} h_{\mu\beta} \quad (\lambda, \mu = 1, \cdots, m)$$

$$= p_{\alpha\beta} + p'_{\alpha\beta} x + p''_{\alpha\beta} x^2 + \cdots$$

hervor. Das Differentialgleichungensystem (2) benutzen wir als *Normalform* des Differentialgleichungensystems (1) für die Umgebung des singulären Punktes $x = 0$. Die Determinante

$$P(p) = |a_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}| \text{ *)} \tag{3}$$

nennen wir die zur singulären Stelle $x = 0$ gehörige *charakteristische Determinante* und die Gleichung

$$P(p) = |a_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta}| = (p_1 - p) \cdots (p_m - p) = 0$$

mit den Wurzeln $p_1, \ldots, p_m$ (welche der determinirenden Fundamentalgleichung einer Fuchs'schen Differentialgleichung entspricht) die *charakteristische Gleichung* des Differentialgleichungensystems (1) oder (2).

Ist $p - p_\alpha$ ein einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante, so ist

$$p_{\alpha\alpha} = p_\alpha, \quad p_{\alpha\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, \alpha - 1, \alpha + 1, \cdots, m),$$

und die α^{te} Gleichung (2) besitzt die Gestalt

$$x \frac{dz_\alpha}{dx} = p_\alpha z_\alpha + x \sum_\beta p'_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots. \tag{2a}$$

Ist $p_{\alpha'} = p_{\alpha''} = \cdots = p_{\alpha^{(e)}} = p^0$ und ist $(p - p^0)^e$ ein e-facher Elementartheiler der Determinante (3), so wird

$$p_{\alpha'\alpha'} = p^0, \quad p_{\alpha''\alpha''} = p^0, \cdots, p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e)}} = p^0,$$

$$p_{\alpha''\alpha'} = 1, \quad p_{\alpha'''\alpha''} = 1, \cdots, p_{\alpha^{(e)}\alpha^{(e-1)}} = 1,$$

---

*) $\delta_{\alpha\beta} = 1$ für $\alpha = \beta$, $= 0$ für $\alpha \gtrless \beta$.

alle übrigen $p_{\alpha\beta}$, in welchen α eine der Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(e)}$ ist, sind gleich Null, so dass die den Indices $\alpha = \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(e)}$ entsprechenden Differentialgleichungen (2) die Gestalt haben:

$$
(2\text{b}) \qquad
\begin{aligned}
x\,\frac{dz_{\alpha'}}{dx} &= p^0 z_{\alpha'} &&+ \cdots,\\
x\,\frac{dz_{\alpha''}}{dx} &= p^0 z_{\alpha''} + z_{\alpha'} &&+ \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x\,\frac{dz_{\alpha^{(e)}}}{dx} &= p^0 z_{\alpha^{(e)}} + z_{\alpha^{(e-1)}} &&+ \cdots,
\end{aligned}
$$

wo an Stelle der Punkte die Ausdrücke

$$x\sum_\beta p'_{\alpha\beta} z_\beta + x^2 \sum_\beta p''_{\alpha\beta} z_\beta + \cdots$$

für bezw. $\alpha = \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(e)}$ stehen.

Die Form der Lösungen unseres Differentialgleichungensystems wird, wie in § 3 und § 4 gezeigt wird, *wesentlich bedingt durch die Elementartheiler der charakteristischen Determinante.**)

§ 2.

Methode für die Berechnung der Lösungen.

Zur Ermittelung der Form und zur Berechnung der Lösungen unseres Differentialgleichungensystems bedienen wir uns der von Herrn Frobenius**) für die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen angegebenen Methode, welche auch schon von Herrn Grünfeld auf die von uns betrachteten Differentialgleichungensysteme, freilich nur unter beschränkenden Voraussetzungen in Betreff der charakteristischen Determinante, angewandt worden ist. Es sei noch bemerkt, dass es im gegenwärtigen Paragraphen nicht nothwendig ist, unter dem Differentialgleichungensystem (2) die Normalform zu verstehen, welche erst in § 3 und § 4 zur Geltung kommt.

---

*) Die gegenwärtige Untersuchung ist allgemeiner als die entsprechende für eine Fuchs'sche Differentialgleichung, weil einer μ-fachen Wurzel p^0 der determinirenden Gleichung einer solchen Differentialgleichung stets ein μ-facher Elementartheiler $(p - p^0)^\mu$ der charakteristischen Determinante des Differentialgleichungensystems entspricht, in welches die Fuchs'sche Differentialgleichung übergeführt wird. In der oben erwähnten Arbeit des Herrn Grünfeld sind die Differentialgleichungensysteme nur unter dieser für eine Fuchs'sche Differentialgleichung gültigen Voraussetzung untersucht. Vgl. meine Habilitationsschrift Seite 62.

**) Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen (Journ. f. Math. Bd. 76).

Wenn das Differentialgleichungensystem (2) eine Lösung

(4) $$z_\alpha = x^p \zeta_\alpha(x) \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

besitzt, in welcher die ζ_α Potenzreihen von x sind,

$$\zeta_\alpha(x) = (\zeta_\alpha)_0 + (\zeta_\alpha)_1 x + (\zeta_\alpha)_2 x^2 + \cdots,$$

so bestehen die Recursionsformeln

(5a) $$\sum_\beta (p_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta})(\zeta_\beta)_0 = 0,$$

(5b) $$\sum_\beta \big(p_{\alpha\beta} - (p+1)\,\delta_{\alpha\beta}\big)(\zeta_\beta)_1 + \sum_\beta p'_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_0 = 0,$$

(5c) $$\sum_\beta \big(p_{\alpha\beta} - (p+2)\,\delta_{\alpha\beta}\big)(\zeta_\beta)_2 + \sum_\beta p'_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_1 + \sum_\beta p''_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_0 = 0,$$

. . . .

(5n) $$\sum_\beta \big(p_{\alpha\beta} - (p+\nu)\,\delta_{\alpha\beta}\big)(\zeta_\beta)_\nu + \sum_\beta p'_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_{\nu-1} + \cdots$$
$$+ \sum_\beta p^{(\nu-1)}_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_1 + \sum_\beta p^{(\nu)}_{\alpha\beta}(\zeta_\beta)_0 = 0,$$

. . . .

Sollen die Anfangswerthe $(\zeta_\alpha)_0$ der Potenzreihen ζ_α nicht sämmtlich verschwinden, so muss nach (5a) p eine der Wurzeln $p_1, \ldots, p_m$ der charakteristischen Gleichung $|p_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta}| = 0$ sein. Lassen wir aber *zunächst* die Gleichungen (5a) ausser Betracht und sehen wir p als unbestimmte Grösse an, so lassen sich vermittelst der Formeln (5b), (5c), ..., (5n), ... die Grössen $(\zeta_\alpha)_1, (\zeta_\alpha)_2, \ldots, (\zeta_\alpha)_\nu, \ldots, (\alpha = 1, \ldots, m)$ durch $(\zeta_\alpha)_0$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ ausdrücken:

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \sum_\beta \frac{\mathfrak{P}^{(\nu)}_{\alpha\beta}(p)}{P(p+1)\ldots P(p+\nu)}(\zeta_\beta)_0,$$

wo $\mathfrak{P}^{(\nu)}_{\alpha\beta}(p)$ eine ganze Function der Grössen $p, p_{\alpha\beta}, p'_{\alpha\beta}, \ldots, p^{(\nu)}_{\alpha\beta}$ bedeutet. Ein verschwindender Nenner tritt nur dann auf, wenn p einen der Werthe $p = p_\alpha - \nu$ $(\alpha = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, \infty)$ erhält. Die zunächst unbestimmt gelassenen Grössen $p, (\zeta_1)_0, \ldots, (\zeta_m)_0$ müssen *nachträglich* so gewählt werden, dass die unter alleiniger Benutzung der Recursionsformeln (5b), ... berechneten Ausdrücke (4) auch wirklich dem Differentialgleichungensystem genügen. Ist $p = p^{(i)}$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung und sind ausserdem noch Wurzeln $p^0, p', \ldots, p^{(i-1)}$ in der Weise vorhanden, dass $p^{(i-1)} - p^{(i)} = d^{(i)}, \ldots, p^0 - p' = d'$ ganze positive Zahlen sind, so verschwinden für $p = p^{(i)}$ die Ausdrücke $P(p + d^{(i)}), P(p + d^{(i)} + d^{(i-1)}), \ldots, P(p + d^{(i)} + \cdots + d')$ in irgend einer Ordnung; wir setzen daher voraus, dass die Anfangs-

werthe $(\zeta_\alpha)_0$ desjenigen Potenzreihensystems ζ_α, in welchem nachher $p = p^{(i)}$ gesetzt werden soll, eine solche Potenz von $p - p^{(i)}$ als Factor enthalten, dass keiner der aus obiger Formel berechneten Ausdrücke $(\zeta_\alpha)_\nu$ für $p = p^{(i)}$ unendlich gross wird.

Wenn die Grössen $(\zeta_\alpha)_0$ in der angegebenen Weise gewählt sind, so sind die noch von p abhängigen Potenzreihen

$$\zeta_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\zeta_\alpha)_\nu\, x^\nu$$

für hinreichend kleine Werthe von x convergent und zwar gleichmässig für alle Werthe von p, welche einer hinreichend kleinen Umgebung von $p = p^{(i)}$ angehören*). Die Formeln ($5\,n$) lassen sich unter Anwendung der Bezeichnung

$$-L_\alpha^{(\nu)}(x) = \sum_\beta p'_{\alpha\beta}\, x \cdot (\zeta_\beta)_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + \sum_\beta p_{\alpha\beta}^{(\nu)} x^\nu \cdot (\zeta_\beta)_0$$

schreiben:

$$\sum_\beta \left(p_{\alpha\beta} - (p+\nu)\,\delta_{\alpha\beta}\right) (\zeta_\beta)_\nu\, x^\nu = L_\alpha^{(\nu)}(x).$$

Bezeichnet man die Determinante $|p_{\alpha\beta} - (p+\nu)\delta_{\alpha\beta}|$ mit $P(p+\nu)$ und die durch $P(p+\nu)$ dividirte Adjuncte von $p_{\alpha\beta} - (p+\nu)\,\delta_{\alpha\beta}$ mit $R_{\alpha\beta}(p+\nu)$, so ergiebt sich:

$$(\zeta_\alpha)_\nu\, x^\nu = \sum_\lambda R_{\lambda\alpha}(p+\nu) \cdot L_\lambda^{(\nu)}(x).$$

Wenn die Reihen $\sum\limits_\nu p_{\alpha\beta}^{(\nu)} x^\nu$ für $|x| = r$ convergiren, so giebt es eine Zahl σ der Art, dass für $\nu = 1, 2 \ldots$ und für $|x| \leq r$ $|p_{\alpha\beta}^{(\nu)} x^\nu| < \sigma$ ist. Denkt man sich für $|x| \leq r$ und für diejenigen Werthe von p, welche einer gewissen Umgebung $\mathfrak{R}$ von $p^{(i)}$ angehören, die Maxima der Grössen $|(\zeta_\beta)_0|, \ldots, |(\zeta_\beta)_{\nu-1}\, x^{\nu-1}|$ bestimmt und bezeichnet man das grösste dieser Maxima mit $Z^{(\nu)}$, so ist für den betrachteten Bereich von p

$$|L_\lambda^{(\nu)}(x)| < m\nu\sigma\, Z^{(\nu)}.$$

Da $\lim\limits_{q=\infty} q R_{\lambda\alpha}(q)$ endlich ist, so kann man einen Werth n so bestimmen, dass für $\nu \geq n$ und für alle Werthe von p im Bereich $\mathfrak{R}$ $|\nu R_{\lambda\alpha}(p+\nu)|$ kleiner als eine angebbare Zahl k ist. Dann ist aber

$$|(\zeta_\alpha)_\nu\, x^\nu| < m^2 k \sigma\, Z^{(\nu)},$$

*) Das Folgende ist nur eine Reproduction des von Herrn Sauvage (Ann. de l'Éc. norm. 1886, S. 394—397) gegebenen Convergenzbeweises mit den durch die bei uns vorliegenden Verhältnisse bedingten Modificationen.

und wenn man r so klein nimmt, dass $\sigma < \frac{1}{m^2 k}$ ist, so hat man für $\nu \geqq n$, für $|x| \leqq r$ und für das Gebiet $\mathfrak{R}$ von p

$$|(\zeta_\alpha)_\nu x^\nu| < Z^{(\nu)} = Z^{(n)}.$$

Für $|x| < r$ hat man also, wenn $n' \geqq n$ ist,

$$\left|\sum_{\nu=n'}^{\nu=\infty} (\zeta_\alpha)_\nu x^\nu\right| < Z^{(n)} \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n'} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{r}};$$

nimmt man n' hinreichend gross, so wird die rechte Seite und folglich auch die linke für alle p des angenommenen Bereiches kleiner als eine beliebig kleine Zahl. Mithin ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\zeta_\alpha)_\nu x^\nu$, wenn $|x| < r$ ist, für alle Werthe von p in der Umgebung von $p^{(i)}$ gleichmässig convergent.

Setzt man

$$(6)\quad P_\alpha(z_1, \ldots, z_m) = -x \frac{dz_\alpha}{dx} + \sum_\beta P_{\alpha\beta} z_\beta \quad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

so wird, wenn man unter ζ_α die auf die angegebene Weise berechnete Potenzreihe mit den unbestimmten Grössen p, $(\zeta_1)_0, \ldots, (\zeta_m)_0$ versteht,

$$(7)\quad P_\alpha(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) = x^p \cdot \sum_\beta (p_{\alpha\beta} - p\,\delta_{\alpha\beta})\,(\zeta_\beta)_0.$$

Wenn man die Grössen $(\zeta_1)_0, \ldots, (\zeta_m)_0$ so wählen kann, dass keine der Grössen $(\zeta_\alpha)_\nu$ für $p = p^{(i)}$ unendlich gross wird und dass $P_\alpha(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m)$ für $p = p^{(i)}$ von der Ordnung h verschwindet, dass also

$$\left(\frac{d^\lambda P_\alpha(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m)}{dp^\lambda}\right)_{p^{(i)}} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \cdots, h-1)$$

ist, so sind wegen

$$\frac{d^\lambda P_\alpha(z_1, \ldots, z_m)}{dp^\lambda} = P_\alpha\left(\frac{d^\lambda z_1}{dp^\lambda}, \ldots, \frac{d^\lambda z_m}{dp^\lambda}\right)$$

die h Ausdrücke

$$(8)\quad z_\alpha = \left(\frac{d^\lambda (x^p \zeta_\alpha)}{dp^\lambda}\right)_{p^{(i)}} = x^{p^{(i)}} \left\{\left(\frac{d^\lambda \zeta_\alpha}{dp^\lambda}\right)_{p^{(i)}} + \binom{\lambda}{1} \left(\frac{d^{\lambda-1} \zeta_\alpha}{dp^{\lambda-1}}\right)_{p^{(i)}} \log x \right.$$
$$\left. + \cdots + \binom{\lambda}{\lambda-1} \left(\frac{d\zeta_\alpha}{dp}\right)_{p^{(i)}} (\log x)^{\lambda-1} + (\zeta_\alpha)_{p^{(i)}} (\log x)^\lambda \right\}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, h-1)$$

Lösungen unseres Differentialgleichungensystems. Da die Potenzreihen $\zeta_\alpha(x)$ in der Umgebung von $p = p^{(i)}$ gleichmässig convergiren, so sind

$$\bigl(\zeta_\alpha(x)\bigr)_{p^{(i)}}, \quad \left(\frac{d\zeta_\alpha(x)}{dp}\right)_{p^{(i)}} \cdots \left(\frac{d^{h-1}\zeta_\alpha(x)}{dp^{h-1}}\right)_{p^{(i)}}$$

sämmtlich Potenzreihen von x, die durch gliedweise Differentiation von $\zeta_\alpha(x)$ berechnet werden.

Diejenigen der angeschriebenen Lösungen, welche nicht wirklich zum Exponenten $p^{(i)}$ gehören, werden wir ausschliessen, und es wird sich im Folgenden zeigen, dass zu einer μ-fachen Wurzel der charakteristischen Gleichung stets μ Lösungen des Differentialgleichungensystems gehören und dass man auf diesem Wege ein Fundamentalsystem von m Lösungen erhält.

§ 3.

Form der Lösungen für einfache Elementartheiler der charakteristischen Determinante.

I. *Zunächst sei* $p_\lambda = p^0$ *für* $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r$; $p - p^0$ *möge* r*-mal als einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante auftreten und die Wurzel* p^0 *mit keiner anderen Wurzel der charakteristischen Gleichung eine ganzzahlige Differenz bilden.* Um eine zum Exponenten p^0 gehörige Lösung zu erhalten, welche einem bestimmten der r Elementartheiler $p - p_\lambda$ entspricht, setzen wir*)

(9) $$(\zeta_\lambda)_0 = \varepsilon_\lambda, \quad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \gtrless \lambda,$$

wo ε eine Constante, etwa 1, oder eine für $p = p^0$ nicht verschwindende ganze Function von p bedeutet. Versteht man unter ζ_α die unter Zugrundlegung dieser Anfangswerthe berechnete Potenzreihe, die wir, wo es nöthig ist, mit $\zeta_\alpha(x)_\lambda$ bezeichnen, so ist nach (7)

$$P_\lambda(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_\lambda(p - p^0)\cdot x^p,$$
$$P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = 0, \quad (\alpha \gtrless \lambda).$$

Hiernach ist, wenn man den Werth der Potenzreihe $\zeta_\alpha(x)_\lambda$ für $p = p^0$ mit $\zeta_\alpha^0(x)_\lambda$ bezeichnet,

(10) $$z_\alpha^{(\lambda)} = x^{p^0}\zeta_\alpha^0(x)_\lambda$$

eine Lösung unseres Differentialgleichungensystems, welche thatsächlich zum Exponenten p^0 gehört, da der Anfangswerth von $\zeta_\lambda^0(x)_\lambda$ gleich ε_λ von Null verschieden ist.

Jedem einfachen Elementartheiler $p - p^0$ *der charakteristischen Determinante entspricht eine Lösung des Differentialgleichungensystems von der Form* (10,) *vorausgesetzt dass die Wurzel* p^0 *sich von keiner*

*) Unter λ ist hier eine bestimmte der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ zu verstehen.

anderen Wurzel der charakteristischen Gleichung um eine ganze Zahl unterscheidet.

Die den r einfachen Elementartheilern entsprechenden Lösungen $z_\alpha^{(\lambda_1)}, \ldots, z_\alpha^{(\lambda_r)}$ sind linear unabhängig, denn aus den Relationen

$$\sum_\lambda C_\lambda z_\alpha^{(\lambda)} = 0 \quad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$$

würden die Gleichungen

$$\sum_\lambda C_\lambda \zeta_\alpha^0(x)_\lambda = 0$$

und, wenn man $x = 0$ setzt, die Gleichungen

$$C_\lambda \varepsilon_\lambda = 0 \quad (\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$$

hervorgehen.

II. *Weiter sei* $p_{\lambda^0} = p^0$ *für* $\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r^0}^0$, $p_{\lambda'} = p'$ *für* $\lambda' = \lambda_1', \ldots, \lambda_{r'}'$ *u. s. w.,* $p_{\lambda^{(n)}} = p^{(n)}$ *für* $\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{r^{(n)}}^{(n)}$; *die Differenzen* $p^0 - p' = d', \ldots, p^{(n-1)} - p^{(n)} = d^{(n)}$ *seien ganze positive Zahlen, während keine andere Wurzel der charakteristischen Gleichung mit den angegebenen ganzzahlige Differenzen bildet; die charakteristische Determinante besitze* r^0 *einfache Elementartheiler* $p - p^0$, r' *einfache Elementartheiler* $p - p'$ *u. s. w.,* $r^{(n)}$ *einfache Elementartheiler* $p - p^{(n)}$.

Um die Lösung zu finden, welche einem bestimmten der Elementartheiler $p - p_{\lambda^{(i)}}$ entspricht, setzen wir*)

$$(\zeta_{\lambda^{(i)}})_0 = \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p - p^{(i)})^i, \quad (\zeta_\alpha)_0 = 0 \text{ für } \alpha \gtrless \lambda^{(i)}. \tag{11}$$

Das unter Zugrundlegung dieser Anfangswerthe bestimmte System von Potenzreihen $\zeta_\alpha(x)_{\lambda^{(i)}}$ erfüllt die Gleichungen

$$P_{\lambda^{(i)}}(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta_m) = -\varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p - p^{(i)})^{i+1} \cdot x^p,$$
$$P_\alpha(x^p\zeta_1, \ldots, x^p\zeta^m) = 0, \quad \left(\alpha \gtrless \lambda^{(i)}\right).$$

Folglich genügen die $i + 1$ Ausdrücke

$$z_\alpha^{(\lambda^{(i)}, h)} = \left(\frac{d^h(x^p\zeta_\alpha)}{dp^h}\right)_{p^{(i)}} \quad (h = 0, 1, \ldots, i)$$

unserem Differentialgleichungensystem. In unserem Falle liefern die Formeln (5b), ..., (5n), ... für $(\zeta_\alpha)_\nu$ einen Ausdruck von der Gestalt

$$(\zeta_\alpha)_\nu = \frac{\mathfrak{O}_{\alpha\lambda^{(i)}}^{(\nu)}(p)}{Q(p+1)\ldots Q(p+\nu)} \cdot \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p - p^{(i)})^i,$$

wo

$$Q(p) = (p - p^0)(p - p')\ldots(p - p^{(n)})$$

*) Unter $\lambda^{(i)}$ wird eine bestimmte der Zahlen $\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{r^{(i)}}^{(i)}$ verstanden.

und $\mathfrak{Q}^{(\nu)}_{\alpha\lambda(i)}$ eine rationale Function von p ist, welche für $p = p^0$, p', ..., $p^{(n)}$ nicht unendlich wird. Für $p = p^{(i)}$ verschwinden daher

$$\begin{array}{lcccc} (\zeta_\alpha)_0, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d^{(i)}-1} & \text{von der Ordnung} & & & i, \\ (\zeta_\alpha)_{d^{(i)}}, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d^{(i)}+d^{(i-1)}-1} & " & " & " & i-1, \\ \ldots & & & & \\ (\zeta_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d''}, \ldots, (\zeta_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d'-1} & " & " & " & 1; \end{array}$$

man kann also setzen:

$$(12) \quad \begin{aligned} (\zeta_\alpha(x)_{\lambda(i)})_{p^{(i)}} &= x^{d^{(i)}+\cdots+d'}\zeta^0_\alpha(x)_{\lambda(i)}, \\ \left(\frac{d\zeta_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp}\right)_{p^{(i)}} &= x^{d^{(i)}+\cdots+d''}\zeta'_\alpha(x)_{\lambda(i)}, \\ \ldots & \\ \left(\frac{d^{i-1}\zeta_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp^{i-1}}\right)_{p^{(i)}} &= x^{d^{(i)}}\zeta^{(i-1)}_\alpha(x)_{\lambda(i)}, \\ \left(\frac{d^i\zeta_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp^i}\right)_{p^{(i)}} &= \zeta^{(i)}_\alpha(x)_{\lambda(i)}, \end{aligned}$$

wo $\zeta^{(h)}_\alpha(x)_{\lambda(i)}$ Potenzreihen von x darstellen.

Da der Anfangswerth von $\zeta^{(i)}_{\lambda(i)}(x)_{\lambda(i)}$ gleich

$$\left(\frac{d^i(\varepsilon_{\lambda(i)}(p - p^{(i)})^i)}{dp^i}\right)_{p^{(i)}}$$

von Null verschieden ist, so können nicht sämmtliche Potenzreihen $\zeta^{(i)}_\alpha(x)_{\lambda(i)}$ durch x theilbar sein. Daher gehört von den angeschriebenen $i+1$ Lösungen die letzte, nämlich $z^{(\lambda(i),\,i)}_\alpha = z^{(\lambda(i))}_\alpha$

$$(13) \quad \begin{aligned} z^{(\lambda(i))}_\alpha = x^{p^{(i)}}\zeta^{(i)}_\alpha(x)_{\lambda(i)} + \binom{i}{1} x^{p^{(i-1)}}\zeta^{(i-1)}_\alpha(x)_{\lambda(i)}\log x \\ + \cdots + \binom{i}{i-1} x^{p'}\zeta'_\alpha(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{i-1} + x^{p^0}\zeta^0_\alpha(x)_{\lambda(i)}(\log x)^i \end{aligned}$$

nothwendig zum Exponenten $p^{(i)}$; dagegen ergiebt sich für

$$z^{(\lambda(i),\,h)}_\alpha \quad (h = 0, 1, \ldots, i-1)$$

der Ausdruck

$$(14) \quad \begin{aligned} z^{(\lambda(i),\,h)}_\alpha = x^{p^{(h)}}\zeta^{(h)}_\alpha(x)_{\lambda(i)} + \binom{h}{1} x^{p^{(h-1)}}\zeta^{(h-1)}_\alpha(x)_{\lambda(i)}\log x \\ + \cdots + \binom{h}{h-1} x^{p'}\zeta'_\alpha(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{h-1} + x^{p^0}\zeta^0_\alpha(x)_{\lambda(i)}(\log x)^h, \end{aligned}$$

den wir bei Bestimmung der zum Exponenten $p^{(i)}$ gehörigen Lösungen ausser Betracht lassen dürfen.

Einer Gruppe einfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante von der angegebenen Beschaffenheit entspricht eine Gruppe von Lösungen des Differentialgleichungensystems von der Form:

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
z_\alpha^{(\lambda^0)} &= x^{p^0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^0},\\
z_\alpha^{(\lambda')} &= x^{p'}\zeta'_\alpha(x)_{\lambda'} + x^{p^0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda'}\log x,\\
z_\alpha^{(\lambda'')} &= x^{p''}\zeta''_\alpha(x)_{\lambda''} + x^{p'}\zeta'_\alpha(x)_{\lambda''}\log x + x^{p^0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda''}(\log x)^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_\alpha^{(\lambda^{(n)})} &= x^{p^{(n)}}\zeta_\alpha^{(n)}(x)_{\lambda^{(n)}} + x^{p^{(n-1)}}\zeta_\alpha^{(n-1)}(x)_{\lambda^{(n)}}\log x + \cdots\\
&\quad + \binom{n}{n-1}x^{p'}\zeta'_\alpha(x)_{\lambda^{(n)}}(\log x)^{n-1} + x^{p^0}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^{(n)}}(\log x)^n,\\
&\quad \left(\lambda^0 = \lambda_1^0,\ldots,\lambda_{r^0}^0;\ldots;\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_{r^{(n)}}^{(n)}\right).
\end{aligned}
$$

Die Potenzreihen $\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda^{(i)}}, \zeta'_\alpha(x)_{\lambda^{(i)}}, \ldots, \zeta_\alpha^{(i-1)}(x)_{\lambda^{(i)}}$ können möglicherweise identisch verschwinden und daher aus den angeschriebenen Ausdrücken die logarithmischen Glieder sämmtlich oder theilweise herausfallen.

Die zu der betrachteten Gruppe von Elementartheilern gehörigen Lösungen sind stets linear unabhängig, denn die Relation

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{\lambda^{(i)}} C_{\lambda^{(i)}}\, z_\alpha^{(\lambda^{(i)})} = 0$$

würde die Relation

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{\lambda^{(i)}} C_{\lambda^{(i)}}\, x^{p^{(i)}}\zeta_\alpha^{(i)}(x)_{\lambda^{(i)}} = 0$$

zur Folge haben; hieraus ergiebt sich nach Division durch $x^{p^{(n)}}$ für $x = 0$

$$C_{\lambda^{(n)}}\,\varepsilon_{\lambda^{(n)}} = 0 \qquad \left(\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_{r^{(n)}}^{(n)}\right),$$

weiter durch Division mit $x^{p^{(n-1)}}$ und Nullsetzen von x

$$C_{\lambda^{(n-1)}}\,\varepsilon_{\lambda^{(n-1)}} = 0 \qquad \left(\lambda^{(n-1)} = \lambda_1^{(n-1)},\ldots,\lambda_{r^{(n-1)}}^{(n-1)}\right)$$

u. s. w. Da zwischen den verschiedenen Gruppen von Wurzeln entsprechenden Lösungen eine lineare Abhängigkeit auch nicht bestehen kann*), so bildet die Gesammtheit der Gruppen von Lösungen von

*) Beweis nach Thomé, zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (Journ. f. Math. Bd. 74, Seite 195).

der Form (15) ein Fundamentalsystem unseres Systems von Differentialgleichungen.

Die Lösung $z_\alpha^{(\lambda^{(i)},h)}$ für $h < i$, welche dem Fundamentalsystem nicht angehört, lässt sich durch die Lösungen des Fundamentalsystems ausdrücken und zwar in der Form

$$z_\alpha^{(\lambda^{(i)},h)} = \sum_{\lambda^{(h)}} C_{\lambda^{(h)}}^{(\lambda^{(i)},h)} z_\alpha^{(\lambda^{(h)})} + \cdots + \sum_{\lambda^0} C_{\lambda^0}^{(\lambda^{(i)},h)} z_\alpha^{(\lambda^0)}.$$

Durch Vergleichung der von $\log x$ freien Glieder ergiebt sich, dass $\zeta_\alpha^{(h)}(x)_{\lambda^{(i)}}$ eine lineare Verbindung von

$$\zeta_\alpha^{(h)}(x)_{\lambda^{(h)}},\quad x^{d^{(h)}} \zeta_\alpha^{(h-1)}(x)_{\lambda^{(h-1)}},\ \ldots,\ x^{d^{(h)}+\cdots+d'} \zeta_\alpha^0(x)_0$$

ist. Von der weiteren Untersuchung dieser Beziehungen wollen wir jedoch absehen.

§ 4.

Form der Lösungen für mehrfache Elementartheiler der charakteristischen Determinante.

I. *Die charakteristische Gleichung besitze die mehrfache Wurzel* p^0, *welche mit keiner anderen Wurzel eine ganzzahlige Differenz bildet; die charakteristische Determinante habe die Elementartheiler* $(p-p^0)^{e_\lambda}$ *für* $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Wir nehmen an, die Differentialgleichungen (2b) für $e = e_\lambda$ seien die zu dem Elementartheiler $(p-p^0)^{e_\lambda}$ gehörigen Gleichungen der Normalform. Um die diesem Elementartheiler entsprechenden Lösungen des Differentialgleichungensystems zu berechnen, setzen wir

$$(16)\qquad \begin{aligned}
(\zeta_{\alpha'})_0 &= \varepsilon_\lambda (p-p^0)^{e_\lambda - 1},\\
(\zeta_{\alpha''})_0 &= \varepsilon_\lambda (p-p^0)^{e_\lambda - 2},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(\zeta_{\alpha^{(e_\lambda-1)}})_0 &= \varepsilon_\lambda (p-p^0),\\
(\zeta_{\alpha^{(e_\lambda)}})_0 &= \varepsilon_\lambda,
\end{aligned}$$

wo ε_λ eine Constante oder eine für $p = p^0$ nicht verschwindende ganze Function von p ist; alle übrigen $(\zeta_\alpha)_0$ nehmen wir gleich Null an. Verstehen wir unter $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x)_\lambda$ die unter Zugrundelegung dieser Anfangswerthe berechnete Potenzreihe, so ist nach (2b) und (7)

$$\begin{aligned}
P_{\alpha'}(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) &= -\varepsilon_\lambda (p-p^0)^{e_\lambda},\\
P_\alpha(x^p \zeta_1, \ldots, x^p \zeta_m) &= 0 \qquad \left(\alpha \gtrless \alpha'\right).
\end{aligned}$$

Setzt man

$$(17)\quad \begin{aligned} &(\zeta_\alpha(x)_\lambda)_{p^0} = \zeta^0_\alpha(x)_\lambda, \\ &\left(\frac{d\,\zeta_\alpha(x)_\lambda}{dp}\right)_{p^0} = \zeta'_\alpha(x)_\lambda, \\ &\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\left(\frac{d^{e_\lambda-1}\,\zeta_\alpha(x)_\lambda}{dp^{e_\lambda-1}}\right)_{p^0} = \zeta^{(e_\lambda-1)}_\alpha(x)_\lambda, \end{aligned}$$

so sind $\zeta^0_\alpha(x)_\lambda,\ \zeta'_\alpha(x)_\lambda, \ldots, \zeta^{(e_\lambda-1)}_\alpha(x)_\lambda$ Potenzreihen von x, und $\zeta^0_{\alpha'},\ \zeta'_{\alpha''}, \ldots, \zeta^{(e_\lambda-1)}_{\alpha^{(e_\lambda)}}$ haben den von Null verschiedenen Anfangswerth ε_λ. Das Differentialgleichungensystem besitzt die Lösungen

$$(18)\quad \begin{aligned} z^{(\lambda,0)}_\alpha &= x^{p^0}\,\zeta^0_\alpha(x)_\lambda, \\ z^{(\lambda,1)}_\alpha &= x^{p^0}\left(\zeta'_\alpha(x)_\lambda + \zeta^0_\alpha(x)_\lambda \log x\right), \\ z^{(\lambda,2)}_\alpha &= x^{p^0}\left(\zeta''_\alpha(x)_\lambda + 2\,\zeta'_\alpha(x)_\lambda \log x + \zeta^0_\alpha(x)_\lambda\cdot(\log x)^2\right), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z^{(\lambda,e_\lambda-1)}_\alpha &= x^{p^0}\Big(\zeta^{(e_\lambda-1)}_\alpha(x)_\lambda + \binom{e_\lambda-1}{1}\zeta^{(e_\lambda-2)}_\alpha(x)_\lambda \log x \\ &\quad + \cdots + \binom{e_\lambda-1}{e^\lambda-2}\zeta'_\alpha(x)_\lambda(\log x)^{e_\lambda-2} + \zeta^0_\alpha(x)_\lambda(\log x)^{e_\lambda-1}\Big), \end{aligned}$$

welche sämmtlich zum Exponenten p^0 gehören und aus welchen die Logarithmen nicht herausfallen können. Da die sämmtlichen zum Elementartheiler $(p-p^0)^{e_\lambda}$ gehörigen Lösungen aus der letzten folgen*),

---

*) Ist

$$z_\alpha = x^{p^0}\left(\zeta^{(e)}_\alpha(x) + \binom{e}{1}\zeta^{(e-1)}_\alpha(x)\log x + \cdots + \binom{e}{e-1}\zeta'_\alpha(x)(\log x)^{e-1} + \zeta^0_\alpha(x)(\log x)^e\right),$$

worin die e^{te} Potenz von $\log x$ thatsächlich vorkommt, eine Lösung unseres Differentialgleichungensystems, so genügen $\zeta^0_\alpha(x), \ldots, \zeta^{(e)}_\alpha(x)$ gewissen Differentialgleichungen, welche man erhält, indem man die obige Lösung in das System (1) oder (2) einsetzt und die Coefficienten entsprechender Potenzen von $\log x$ vergleicht. Diese Differentialgleichungen zwischen den ζ sagen aber aus, dass auch

$$\begin{aligned} z_\alpha &= x^{p^0}\left(\zeta^{(e-1)}_\alpha(x) + \binom{e-1}{1}\zeta^{(e-2)}_\alpha(x)\log x + \cdots + \binom{e-1}{e-2}\zeta'_\alpha(x)(\log x)^{e-2} + \zeta^0_\alpha(x)(\log x)^{e-1}\right), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ z_\alpha &= x^{p^0}\left(\zeta'_\alpha(x) + \zeta^0_\alpha(x)\log x\right), \\ z_\alpha &= x^{p^0}\,\zeta^0_\alpha(x) \end{aligned}$$

Lösungen sind. Vgl. Jürgens, die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen (Journ. für Math. Bd. 80).

so genügt es, als zum Elementartheiler $(p-p)^{e_\lambda}$ gehörige Lösung nur die eine anzugeben:

$$(19)\quad z_\alpha^{(\lambda)} = x^{p^0}\Big(\zeta_\alpha^{(e_\lambda-1)}(x)_\lambda + \binom{e_\lambda-1}{1}\zeta_\alpha^{(e_\lambda-2)}(x)_\lambda \log x$$
$$+\cdots+\binom{e_\lambda-1}{e_\lambda-2}\zeta_\alpha(x)_\lambda (\log x)^{e_\lambda-2} + \zeta_\alpha^0(x)_\lambda (\log x)^{e_\lambda-1}\Big).$$

Einem mehrfachen Elementartheiler $(p-p^0)^{e_\lambda}$ *der charakteristischen Determinante entspricht, vorausgesetst dass keine Wurzel der charakteristischen Gleichung mit* p^0 *eine ganzzahlige Differenz bildet, eine Lösung von der Form* (19) *bezw. die daraus abzuleitenden* e_λ *Lösungen* (18).

Die Unmöglichkeit einer Relation

$$\sum_\lambda \left(C_{\lambda 0} z_\alpha^{(\lambda,0)} + \cdots + C_{\lambda, e_\lambda - 1} z_\alpha^{(\lambda, e_\lambda - 1)}\right) = 0$$

ergiebt sich, indem man unter Weglassung des Factors x^p in den verschiedenen Gleichungen, welche durch Nullsetzen der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\log x$ entstehen, $x=0$ setzt.

II. Wir gehen nun zum allgemeinsten Fall über, *wo* $p^0, p', \ldots, p^{(n)}$, *zwischen welchen die positiven ganzzahligen Differenzen* $p^0 - p' = d', \ldots, p^{(n-1)} - p^{(n)} = d^{(n)}$ *auftreten, Wurzeln der charakteristischen Gleichung von beliebiger Vielfachheit sind und wo die charakteristische Determinante die Elementartheiler* $(p-p^0)^{e_{\lambda^0}}$ $(\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r^0}^0)$, $(p-p')^{e_{\lambda'}}$ $(\lambda' = \lambda_1', \ldots, \lambda_{r'}')$, $\ldots, (p-p^{(n)})^{e_{\lambda^{(n)}}}$ $\left(\lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{r^{(n)}}^{(n)}\right)$ *besitzt; die grösste der Zahlen* $e_{\lambda^0}, e_{\lambda'}, \ldots, e_{\lambda^{(n)}}$ *sei bezw.* $e^0, e', \ldots, e^{(n)}$. Um die zu einem Elementartheiler $(p-p^{(i)})^{e_{\lambda^{(i)}}}$, welchem in der Normalform die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{e_{\lambda^{(i)}}}$ entsprechen mögen, gehörigen Lösungen zu berechnen, setzen wir

$$(20)\quad \begin{aligned}
(\zeta_{\alpha_1})_0 &= \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p-p^{(i)})^{e^0+\cdots+e^{(i-1)}+e_{\lambda^{(i)}}-1},\\
(\zeta_{\alpha_2})_0 &= \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p-p^{(i)})^{e^0+\cdots+e^{(i-1)}+e_{\lambda^{(i)}}-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left(\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^{(i)}}-1}}\right)_0 &= \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p-p^{(i)})^{e^0+\cdots+e^{(i-1)}+1},\\
\left(\zeta_{\alpha_{e_{\lambda^{(i)}}}}\right)_0 &= \varepsilon_{\lambda^{(i)}}(p-p^{(i)})^{e^0+\cdots+e^{(i-1)}},
\end{aligned}$$

wo $\varepsilon_{\lambda^{(i)}}$ eine Constante oder eine ganze Function von p ist, welche für $p = p^{(i)}$ nicht verschwindet; alle übrigen $(\zeta_\alpha)_0$ nehmen wir gleich Null an. Setzt man für ζ_α die unter Zugrundelegung der Anfangswerthe (20) berechnete Potenzreihe $\zeta_\alpha(x)_{\lambda^{(i)}}$, so wird

$$P_{\alpha_1}(x^p\xi_1,\ldots,x^p\xi_m) = -\varepsilon_{\lambda(i)}(p-p^{(i)})^{e^0+\cdots+e^{(i-1)}+e_{\lambda(i)}}x^p$$
$$P_\alpha(x^p\xi_1,\ldots,x^p\xi_m) = 0 \qquad (\alpha \gtrless \alpha_1).$$

Wenn man $e^0 = l^0$, $e^0 + e' = l'$, ..., $e^0 + \cdots + e^{(i-1)} = l^{(i-1)}$, $e^0 + \cdots + e^{(i-1)} + e_{\lambda(i)} = l_{\lambda(i)}$ setzt, so hat man die Lösungen

$$z_\alpha = \left(\frac{d^{\mu^0}(x^p\xi_\alpha)}{dp^{\mu^0}}\right)_{p^{(i)}} \qquad (\mu^0 = 0,\ldots, l^0-1),$$
$$z_\alpha = \left(\frac{d^{\mu'}(x^p\xi_\alpha)}{dp^{\mu'}}\right)_{p^{(i)}} \qquad (\mu' = l^0,\ldots, l'-1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_\alpha = \left(\frac{d^{\mu^{(i-1)}}(x^p\xi_\alpha)}{dp^{\mu^{(i-1)}}}\right)_{p^{(i)}} \qquad (\mu^{(i-1)} = l^{(i-2)},\ldots, l^{(i-1)}+1),$$
$$z_\alpha = \left(\frac{d^{\mu_{\lambda(i)}}(x^p\xi_\alpha)}{dp^{\mu_{\lambda(i)}}}\right)_{p^{(i)}} \qquad (\mu_{\lambda(i)} = l^{(i-1)},\ldots, l_{\lambda(i)}-1).$$

Aus den Recursionsformeln (5b), ..., (5n), ... ergiebt sich in unserem Falle

$$(\xi_\alpha)_\nu = \sum_{h=1}^{h=e_{\lambda(i)}} \frac{\mathfrak{Q}^{(\nu)}_{\alpha\alpha_h}(p)\,.\,(p-p^{(i)})^{h-1}}{Q(p+1)\ldots Q(p+\nu)}\cdot \varepsilon_{\lambda(i)}(p-p^{(i)})^{l^{(i-1)}},$$

wobei

$$Q(p) = (p-p^0)^{e^0}(p-p')^{e'}\ldots(p-p^{(n)})^{e^{(n)}}$$

und $\mathfrak{Q}^{(\nu)}_{\alpha\alpha_h}(p)$ eine rationale Function von p ist, welche für $p = p^0, p', \ldots, p^{(n)}$ nicht unendlich wird. Für $p = p^{(i)}$ verschwinden hiernach

$(\xi_\alpha)_0$	$,\ldots,(\xi_\alpha)_{d^{(i)}-1}$	von der Ordnung		$l^{(i-1)}$,
$(\xi_\alpha)_{d^{(i)}}$	$,\ldots,(\xi_\alpha)_{d^{(i)}+d^{(i-1)}-1}$	"	" "	$l^{(i-2)}$,
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .	. . .
$(\xi_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d''}$	$,\ldots,(\xi_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d''-1}$	"	" "	l',
$(\xi_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d''}$	$,\ldots,(\xi_\alpha)_{d^{(i)}+\cdots+d'-1}$	"	" "	l^0;

man kann daher schreiben:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{d^{\mu^0}\xi_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp^{\mu^0}}\right)_{p^{(i)}} &= x^{d^{(i)}+\cdots+d'}\xi_\alpha^{(0,\varrho^0)}(x)_{\lambda(i)},\\ \left(\frac{d^{\mu'}\xi_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp^{\mu'}}\right)_{p^{(i)}} &= x^{d^{(i)}+\cdots+d''}\xi_\alpha^{(1,\varrho')}(x)_{\lambda(i)},\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

. . . .

$$(21)\qquad \left(\frac{d^{\mu^{(i-1)}}\zeta_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp^{\mu^{(i-1)}}}\right)_{p^{(i)}} = x^{d^{(i)}}\zeta_\alpha^{(i-1,\varrho^{(i-1)})}(x)_{\lambda(i)},$$

$$\left(\frac{d^{\mu_{\lambda(i)}}\zeta_\alpha(x)_{\lambda(i)}}{dp^{\mu_{\lambda(i)}}}\right)_{p^{(i)}} = \zeta_\alpha^{(\varrho_{\lambda(i)})}(x)_{\lambda(i)};$$

hierbei ist

$$\varrho^0 = \mu^0,\ \varrho' = \mu' - l^0, \ldots, \varrho^{(i-1)} = \mu^{(i-1)} - l^{(i-2)},$$
$$\varrho_{\lambda(i)} = \mu_{\lambda(i)} - l^{(i-1)},$$

folglich hat man

$$\varrho^0 = 0, \ldots, e^0 - 1;\ \varrho' = 0, \ldots, e' - 1; \ldots;\ \varrho^{(i-1)} = 0, \ldots, e^{(i-1)} - 1;$$
$$\varrho_{\lambda(i)} = 0, \ldots, e_{\lambda(i)} - 1.$$

Es gehören also nur die $e_{\lambda(i)}$ Lösungen

$$(22)\qquad z_\alpha = \left(\frac{d^{\mu_{\lambda(i)}}(x^p\zeta_\alpha)}{dp^{\mu_{\lambda(i)}}}\right)_{p^{(i)}}$$

$$= x^{p^{(i)}}\left(\left(\frac{d^{\mu_{\lambda(i)}}\zeta_\alpha}{dp^{\mu_{\lambda(i)}}}\right)_{p^{(i)}} + \binom{\mu_{\lambda(i)}}{1}\left(\frac{d^{\mu_{\lambda(i)}-1}\zeta_\alpha}{dp^{\mu_{\lambda(i)}-1}}\right)_{p^{(i)}}\log x + \cdots \right.$$
$$\left. + \binom{\mu_{\lambda(i)}}{\mu_{\lambda(i)}}(\zeta_\alpha)_{p^{(i)}}(\log x)^{\mu_{\lambda(i)}}\right)$$

$$(\mu_{\lambda(i)} = l^{(i-1)}, \ldots, l_{\lambda(i)} - 1)$$

wirklich zum Exponenten $p^{(i)}$.

Die dem Werthe $\mu_{\lambda(i)} = l_{\lambda(i)} - 1$ entsprechende Lösung kann man auf die Form bringen:

$$(23)\qquad z_\alpha^{(\lambda(i))} = x^{p^{(i)}}\mathsf{Z}_\alpha(x)_{\lambda(i)}$$
$$+ x^{p^{(i-1)}}\mathsf{Z}_\alpha^{(i-1)}(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{e_{\lambda(i)}}$$
$$+ x^{p^{(i-2)}}\mathsf{Z}_\alpha^{(i-2)}(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{e^{(i-1)}+e_{\lambda(i)}}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ x^{p^0}\mathsf{Z}_\alpha^0(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{e'+\cdots+e_{\lambda(i)}},$$

wenn man setzt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Z}_\alpha(x)_{\lambda(i)} &= \zeta_\alpha^{(e_{\lambda(i)}-1)}(x)_{\lambda(i)} + \binom{l_{\lambda(i)}-1}{1}\zeta_\alpha^{(e_{\lambda(i)}-2)}(x)_{\lambda(i)}\log x \\
&\quad + \cdots + \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e_{\lambda(i)}-1}\zeta_\alpha^0(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{e_{\lambda(i)}-1}, \\
\mathsf{Z}_\alpha^{(i-1)}(x)_{\lambda(i)} &= \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e_{\lambda(i)}}\zeta^{(i-1,e^{(i-1)}-1)}(x)_{\lambda(i)} \\
&\quad + \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e_{\lambda(i)}+1}\zeta_\alpha^{(i-1,e^{(i-1)}-2)}(x)_{\lambda(i)}\log x \\
&\quad + \cdots + \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e^{(i-1)}+e_{\lambda(i)}-1}\zeta_\alpha^{(i-1,0)}(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{e^{(i-1)}-1}, \qquad (24) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathsf{Z}_\alpha^0(x)_{\lambda(i)} &= \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e'+\cdots+e_{\lambda(i)}}\zeta_\alpha^{(0,e^0-1)}(x)_{\lambda(i)} \\
&\quad + \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e'+\cdots+e_{\lambda(i)}+1}\zeta_\alpha^{(0,e^0-2)}(x)_{\lambda(i)}\log x \\
&\quad + \cdots + \binom{l_{\lambda(i)}-1}{e^0+\cdots+e_{\lambda(i)}-1}\zeta_\alpha^{(0,0)}(x)_{\lambda(i)}(\log x)^{e^0-1}.
\end{aligned}
$$

Da die Anfangswerthe $\zeta_{\alpha_{e_{\lambda(i)}}}^{(e_{\lambda(i)}-1)}(x)_{\lambda(i)}, \ldots, \zeta_{\alpha_1}^0(x)_{\lambda(i)}$ von Null verschieden sind, also die logarithmischen Glieder aus $\mathsf{Z}_\alpha(x)_{\lambda(i)}$ nicht herausfallen können, so lassen sich sämmtliche zu $p^{(i)}$ gehörigen Lösungen

$$z_\alpha^{(\lambda(i),0)}, \ldots, z_\alpha^{(\lambda(i),e_{\lambda(i)}-1)},$$

die den Werthen $\mu_{\lambda(i)} = l^{(i-1)}, \ldots, l_{\lambda(i)}-1$ entsprechen, aus $z_\alpha^{(\lambda(i))}$ ableiten*), und man braucht daher nur die einzige zum Elementartheiler $(p-p^{(i)})^{e_{\lambda(i)}}$ gehörige Lösung $z^{(\lambda(i))}$ anzugeben.

Einer Gruppe mehrfacher Elementartheiler der charakteristischen Determinante von der angegebenen Beschaffenheit entspricht eine Gruppe von Lösungen des Differentialgleichungensystems von der Form:

$$
\begin{aligned}
z_\alpha^{(\lambda^0)} &= x^{p^0} Z_\alpha(x)_{\lambda^0}, \\
z_\alpha^{(\lambda')} &= x^{p'} Z_\alpha(x)_{\lambda'} + x^{p^0} Z_\alpha^0(x)_{\lambda'}(\log x)^{e_{\lambda'}}, \qquad (25) \\
z_\alpha^{(\lambda'')} &= x^{p''} Z_\alpha(x)_{\lambda''} + x^{p'} Z_\alpha'(x)_{\lambda''}(\log x)^{e_{\lambda''}} \\
&\quad + x^{p^0} Z_\alpha^0(x)_{\lambda''}(\log x)^{e'+e_{\lambda''}}, \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

*) Vgl. Anmerkung auf Seite 403.

. . . .

$$
(25)\qquad \begin{aligned} z_\alpha^{(\lambda^{(n)})} = {} & x^{p^{(n)}} Z_\alpha(x)_{\lambda^{(n)}} + x^{p^{(n-1)}} Z_\alpha^{(n-1)}(x)_{\lambda^{(n)}} (\log x)^{e_{\lambda^{(n)}}} \\ & + x^{p^{(n-2)}} Z_\alpha^{(n-2)}(x)_{\lambda^{(n)}} (\log x)^{e^{(n-1)}+e_{\lambda^{(n)}}} \\ & + \cdots + x^{p^0} Z_\alpha^0(x)_{\lambda^{(n)}} (\log x)^{e'+\cdots+e_{\lambda^{(n)}}} \\ & \left(\lambda^0 = \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{r^0}^0; \ldots; \lambda^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{r^{(n)}}^{(n)}\right), \end{aligned}
$$

wo $Z_\alpha(x)_{\lambda^{(i)}}, Z_\alpha^{(i-1)}(x)_{\lambda^{(i)}}, \ldots, Z_\alpha^0(x)_{\lambda^{(i)}}$ *die durch* (24) *definirten ganzen Functionen von* $\log x$ *von den Graden* $e_{\lambda^{(i)}} - 1, e^{(i-1)} - 1, \ldots, e^0 - 1$ *sind.*

Eine lineare Abhängigkeit kann weder zwischen den Lösungen einer Gruppe noch zwischen den Lösungen verschiedener Gruppen stattfinden, so dass sich auf diesem Wege ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungensystems ergiebt.

Da zwischen einer Lösung $z_1, \ldots, z_m$ des normalen Systems (2) und der entsprechenden Lösung $y_1, \ldots, y_m$ des Systems (1) die Beziehung

$$
y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)
$$

stattfindet, so bleiben die für das System (2) abgeleiteten Sätze über die Form der Lösungen für das System (1) bestehen.

Freiburg i. B., 29. Juni 1891.

Ueber continuirliche Transformationsgruppen.

Von

L. Maurer in Strassburg.

Die bisher erschienenen Arbeiten über continuirliche Transformationsgruppen beschäftigen sich ausschliesslich mit den allgemeinen Eigenschaften derartiger Gruppen: mit den Eigenschaften, welche sich aus dem Gruppenbegriff allein ergeben und welche demnach allen continuirlichen Gruppen zukommen, durch welche Functionen auch immer die Substitutionen der Gruppe analytisch dargestellt werden. Dagegen ist noch nicht untersucht worden, welche Nebenbedingungen zu den aus dem Gruppenbegriff fliessenden Bestimmungen hinzutreten, wenn die Substitutionen der Gruppe rational oder wenigstens algebraisch sind.

Im Folgenden soll nun ein Theil dieser Nebenbedingungen nachgewiesen werden, nämlich die Nebenbedingungen, welche sich auf die Zusammensetzung der Gruppe beziehen.

I.

Ich stelle zunächst diejenigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen zusammen, von welchen im Folgenden Gebrauch gemacht wird. Bezüglich der Beweise verweise ich auf das grundlegende Werk des Herrn Lie*) sowie auf die von Herrn Schur**) und mir***) gegebenen Darstellungen.

Ich bezeichne mit $f_\lambda(x \mid u)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ Functionen der Variabeln $x_1\, x_2 \ldots x_n$, welche ausserdem noch von m verfügbaren Parametern $u_1\, u_2 \ldots u_m$ abhängen und setze voraus, es sei unmöglich die n Functionen f_λ durch eine geringere Anzahl verfügbarer Parameter darzustellen. Jedem bestimmten Werthsystem der Parameter entspricht eine bestimmte Substitution

*) Theorie der Transformationsgruppen 1ter Abschnitt.

**) Annalen Bd. 38.

***) Journal f. Math. Bd. 107.

(C) $$y_\lambda = f_\lambda(x|u) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Bei unbeschränkter Variabilität der Parameter erhalten wir demnach ein m-fach unendliches Substitutionensystem. Wir bezeichnen dasselbe als m-gliedrige Transformationsgruppe, wenn es die identische Substitution enthält, und wenn ausserdem die Zusammensetzung zweier Substitutionen des Systems wieder eine Substitution des Systems ergiebt. Der ersten Bedingung zufolge entsprechen einem bestimmten Werthsystem der Parameter — etwa den Werthen $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$ — die Functionswerthe $f_\lambda = x_\lambda$. Der zweiten Bedingung zufolge ergiebt die Elimination der Grössen y aus den Gleichungen

$$z_\lambda = f_\lambda(y \mid v), \quad y_\lambda = f_\lambda(x \mid u) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ein Gleichungssystem

$$z_\lambda = f_\lambda(x \mid w)$$

und zwar sind die in den Schlussgleichungen auftretenden Grössen w Functionen der Grössen u und v aber unabhängig von den Variabeln x.

Wir bezeichnen diese Functionen mit

(Γ) $$w_\mu = \varphi_\mu(u \mid v) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Betrachten wir die Grössen v als zu transformirende, die Grössen w als neu einzuführende Variable, die Grössen u als Parameter, so stellen auch die Gleichungen (Γ) ein m-fach unendliches Substitutionensystem dar und es ist leicht zu zeigen, dass auch dieses System eine m-gliedrige Gruppe bildet.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass den Parameterwerthen $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$ die Functionswerthe $\varphi_\mu = v_\mu$ entsprechen, dass also das Substitutionensystem (Γ) die identische Substitution enthält.

Bilden wir sodann die Substitutionen

$$t_\lambda = f_\lambda(z \mid r), \quad z_\lambda = f_\lambda(y \mid v), \quad y_\lambda = f_\lambda(x \mid u)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und eliminiren das eine Mal zuerst die Grössen z und dann die Grössen y, dass andere Mal zuerst die Grössen y und dann die Grössen z, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
t_\lambda &= f_\lambda(y \mid r'), & r'_\mu &= \varphi_\mu(v \mid r),\\
t_\lambda &= f_\lambda(x \mid r''), & r''_\mu &= \varphi_\mu(u \mid r'),\\
z_\lambda &= f_\lambda(x \mid w), & w_\mu &= \varphi_\mu(u \mid v),\\
t_\lambda &= f_\lambda(x \mid r''), & r''_\mu &= \varphi_\mu(w \mid r),
\end{aligned}$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n; \quad \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Gleichungen

$$r''_\mu = \varphi_\mu(u \mid r'),$$
$$r'_\mu = \varphi_\mu(v \mid r),$$
$$r''_\mu = \varphi_\mu(w \mid r), \qquad w_\mu = \varphi_\mu(u \mid v)$$

zeigen, dass die Zusammensetzung zweier Substitutionen des Systems (Γ) wieder eine Substitution desselben Systems ergiebt, womit der Gruppencharakter des Systems erwiesen ist.

Die Gruppe (Γ) bezeichnet Herr Lie als Parametergruppe.

Die Functionen f_λ genügen zwei verschiedenen Systemen partieller Differentialgleichungen, nämlich erstens den folgenden:

$$(\mathrm{D}) \qquad \sum_{\mu=1}^{m} Q^{\varkappa}_{\mu}(u) \frac{\partial f_\lambda}{\partial u_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} X^{\varkappa}_{\nu}(x) \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} = 0$$

$$(\lambda = 1, \ldots, n; \quad \varkappa = 1, \ldots, m),$$

welche sich auch in der Form

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} P^{\mu}_{\varkappa}(u)\, X^{\varkappa}_{\nu}(x) \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu}$$

schreiben lassen, und zweitens den Differentialgleichungen

$$(\mathrm{D}') \qquad \sum_{\mu=1}^{m} T^{\varkappa}_{\mu}(u) \frac{\partial f_\lambda}{\partial u_\mu} - X^{\varkappa}_{\lambda}(f) = 0.$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Coefficienten dieser Differentialgleichungen unterliegen den folgenden Bedingungen:

1) Die Functionen $Q^{\varkappa}_{\mu}(u)$ — und ebenso die Functionen $T^{\varkappa}_{\mu}(u)$ — hängen nur von den Parametern u, aber nicht von den Variabeln x ab, wie dies schon durch die Bezeichnung angedeutet ist.

Die Determinante der Functionen $Q^{\varkappa}_{\mu}(u)$ verschwindet nicht identisch und dasselbe gilt für die Determinante der Functionen $T^{\varkappa}_{\mu}(u)$.

2) Die Functionen $X^{\varkappa}_{\nu}(x)$ hängen nur von den Variabeln x aber nicht von den Parametern u ab. Dementsprechend kommen in den Ausdrücken $X^{\varkappa}_{\nu}(f)$ die Parameter nicht explicite vor.

Die Functionen $X^{\varkappa}_{\nu}$ genügen keiner Relation der Form

$$c_1 X^1_\lambda + c_2 X^2_\lambda + \cdots + c_m X^m_\lambda = 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, \ldots, n$$

mit constanten Coefficienten c.

Wegen 1) sind die Differentialgleichungen (D) von einander unabhängig, und da denselben n von einander unabhängige Functionen

genügen, so bilden sie ein vollständiges System. Dasselbe gilt für die Differentialgleichungen (D′).

Durch die Differentialgleichungen (D) oder (D′) und die Anfangsbedingungen $f_\lambda = x_\lambda$ für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$ sind die Functionen f_λ vollkommen bestimmt. Diese Differentialgleichungen sind für die Transformationsgruppe charakteristisch: jedes vollständige System von Differentialgleichungen der Form (D) oder (D′), deren Coefficienten den Bedingungen 1) und 2) genügen, definirt eine m-gliedrige Transformationsgruppe, soferne die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass einem Werthsystem der Parameter die Functionswerthe $f_\lambda = x_\lambda$ entsprechen.

Ebenso wie die Functionen f_λ kann man auch die Functionen φ_μ in doppelter Weise durch ein System von Differentialgleichungen bestimmen. Ich führe von diesen beiden Systemen nur das eine an, welches den Differentialgleichungen (D′) entspricht.

Dasselbe lautet:

$$(\Delta) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} Q_\nu^\varkappa(u) \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\nu} - Q_\mu^\varkappa(\varphi) = 0 \qquad (\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Durch diese Differentialgleichungen und die Anfangsbedingungen $\varphi_\mu = v_\mu$ für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_m = 0$ sind die Functionen φ_μ vollkommen bestimmt.

Zu einer bemerkenswerthen Umformung der Differentialgleichungen gelangt man, wenn man an Stelle der Functionen $Q_\mu^\varkappa$ die Functionen $P_\mu^\varkappa$ einführt, welche durch die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\mu} P_\varkappa^\nu Q_\mu^\varkappa = \binom{\nu}{\mu} \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, m)^{*})$$

bestimmt sind. Dann treten an Stelle der Differentialgleichungen (Δ) die folgenden:

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} P_\mu^\varkappa(\varphi) \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial u_\nu} = P_\mu^\nu(u)$$

und diese lassen sich ersetzen durch die m Differentialgleichungen

$$(\Delta') \qquad \sum_{\varkappa=1}^{m} P_\mu^\varkappa(\varphi)\, d\varphi_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{m} P_\mu^\varkappa(u)\, du_\varkappa \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

---

*) Das Symbol $\binom{\nu}{\mu}$ bedeutet 1 oder 0, je nachdem μ und ν gleich oder ungleich sind.

II.

Aus den Differentialgleichungen (D) lassen sich in bekannter Weise durch Differentiation und Elimination der höheren Derivirten neue Differentialgleichungen ableiten. Aber weil die Differentialgleichungen (D) ein vollständiges System bilden, darf keine der Art abgeleitete Gleichung von den Gleichungen (D) unabhängig sein. Daraus folgt, dass die Coefficienten der Differentialgleichungen (D) Gleichungen der folgenden Form genügen*:

$$\text{(J)}\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu^\varkappa \frac{\partial X_\lambda^\mu}{\partial x_\nu} - X_\nu^\mu \frac{\partial X_\lambda^\varkappa}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} X_\lambda^\nu, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{(J')}\qquad \sum_{\nu=1}^{m}\left(Q_\nu^\varkappa \frac{\partial Q_\lambda^\mu}{\partial u_\nu} - Q_\nu^\mu \frac{\partial Q_\lambda^\varkappa}{\partial u_\nu}\right) = -\sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} Q_\lambda^\nu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, m$$

$$(\varkappa, \mu = 1, \ldots, m).$$

Die auf den rechten Seiten dieser Differentialgleichungen auftretenden Multiplicatoren $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ sind wegen der Bedingungen, welchen die Functionen $Q_\nu^\varkappa$ und $X_\nu^\varkappa$ unterliegen, sowohl von den Variabeln x als auch von den Parametern u unabhängig, demnach constant. Dieselben genügen den Gleichungen

$$\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = -\varepsilon_\nu^{\mu\varkappa},$$

$$\text{(E)}\qquad \varepsilon_\nu^{\mu\varkappa} \sum_{\nu=1}^{m} \left(\varepsilon_\nu^{\varkappa\lambda}\varepsilon_\sigma^{\nu\mu} + \varepsilon_\nu^{\lambda\mu}\varepsilon_\sigma^{\nu\varkappa} + \varepsilon_\nu^{\mu\varkappa}\varepsilon_\sigma^{\nu\lambda}\right) = 0$$

$$(\varkappa, \lambda, \mu, \sigma = 1, 2, \ldots, m).$$

Das erste dieser Gleichungssysteme ist ohne weiteres evident. Das zweite beweist man, indem man die Gleichungen (J') differenzirt und sodann die Differentialquotienten der Functionen $Q_\nu^\varkappa$ eliminirt. Wegen der hervorragenden Rolle, welche die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ in der Theorie der continuirlichen Gruppen spielen, sollen dieselben im Folgenden als charakteristische Constante der Gruppe bezeichnet werden.

Gruppen, welchen dieselben charakteristischen Constanten entsprechen, bezeichnet Herr Lie als gleichzusammengesetzt. Demnach sind die Gruppe (C) und die Parametergruppe (Γ) als gleichzusammengesetzte Gruppen zu bezeichnen.

Wenn eine Transformationsgruppe vorgelegt ist, so sind die zugehörigen charakteristischen Constanten nicht vollkommen bestimmt. Ersetzen wir nämlich die m Differentialgleichungen (D), welche die

*) Lie a. a. O. Kap. 9.

Gruppe definiren, durch m lineare Combinationen derselben, so treten an Stelle der Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ andere Constante $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$, welche im Allgemeinen von den ersteren verschieden sind. Bezeichnen wir, um dies näher auszuführen, mit $c_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m)$ beliebige Constante, welche nur an die eine Bedingung gebunden sind, dass ihre Determinante C nicht verschwinde. Setzen wir dann

$$\overline{X}_\lambda^\mu = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\mu\nu} X_\lambda^\nu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\overline{Q}_\varkappa^\mu = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\mu\nu} Q_\varkappa^\nu \qquad \mu, \varkappa = 1, 2, \ldots, m$$

so lassen sich die Differentialgleichungen (D) ersetzen durch die folgenden

$$\sum_{\nu=1}^{m} \overline{Q}_\nu^\mu(u) \frac{\partial f_\lambda}{\partial u_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \overline{X}_\nu^\mu \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} = 0.$$

Die Coefficienten dieser Differentialgleichungen genügen einem Gleichungssystem der Form:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\overline{X}_\nu^\varkappa \frac{\partial \overline{X}_\lambda^\mu}{\partial x_\nu} - \overline{X}_\nu^\mu \frac{\partial \overline{X}_\lambda^\varkappa}{\partial x_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \delta_\nu^{\varkappa\mu} \overline{X}_\lambda^\nu,$$

$$\sum_{\nu=1}^{m} \left(\overline{Q}_\nu^\varkappa \frac{\partial \overline{Q}_\lambda^\mu}{\partial u_\nu} - \overline{Q}_\nu^\mu \frac{\partial \overline{Q}_\lambda^\varkappa}{\partial u_\nu} \right) = -\sum_{\nu=1}^{m} \delta_\nu^{\varkappa\mu} \overline{Q}_\lambda^\nu.$$

Eine einfache Rechnung ergiebt für die Constante $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ die Werthe

$$\delta_\nu^{\varkappa\mu} = \sum_{\varrho=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{m} \varepsilon_\varrho^{\sigma\tau} c_{\varkappa\sigma} c_{\mu\tau} \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial c_{\nu\varrho}} \qquad (\varkappa, \mu, \nu, \cdots = 1, 2, \cdots, m).$$

Die beiden Constantensysteme $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ und $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ bezeichne ich als äquivalent.

An die letzten Gleichungen knüpft sich eine Bemerkung, von welcher im Folgenden Gebrauch gemacht wird. Nehmen wir an, die Grössen $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ genügen den Gleichungen

$$\sum_{\sigma=1}^{m} c_{\varkappa\sigma} \varepsilon_\varrho^{\sigma\tau} = 0 \quad (\tau, \varrho = 1, 2, \ldots, m;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, m - m_1)$$

aber keiner weiteren von dieser unabhängigen Gleichung derselben Form. Dann wird $\delta_\nu^{\varkappa\mu} = 0$ für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m$, und $\varkappa = 1, 2, \ldots, m - m_1$. Dagegen besteht zwischen den übrigen Constanten $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ keine Relation der Form

$$\sum_{\varkappa=m-m_1+1}^{m} k_\varkappa \delta_\nu^{\varkappa\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

III.

Um eine bestimmte Substitution S der Transformationsgruppe (C) zu erhalten, müssen wir in den Formeln

$$y_\lambda = f_\lambda(x \mid u)$$

den Parametern u ein bestimmtes Werthsystem beilegen. Bezeichnen wir nun mit $\bar{u}_1\, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_m$ m beliebige von einander unabhängige Functionen von $u_1\, u_2 \ldots u_m$ und setzen $f_\lambda(x \mid u) = \bar{f}_\lambda(x \mid \bar{u})$, dann werden wir offenbar die Substitution S auch erhalten, wenn wir in den Formeln

$$y_\lambda = \bar{f}_\lambda(x \mid \bar{u})$$

die Grössen $\bar{u}$ in geeigneter Weise specialisiren.

Die letzteren Formeln geben daher nur eine andere Darstellungsform der Gruppe (C).

Die Ausdrücke $f_\lambda(x \mid u)$ und $\bar{f}_\lambda(x \mid \bar{u})$ sind als Functionen von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ betrachtet offenbar Functionen derselben Art, dagegen können die Ausdrücke $\bar{f}_\lambda$ von den neuen Parametern $\bar{u}$ in wesentlich anderer Weise abhängen, wie die Ausdrücke f_λ von den ursprünglichen Parametern u. Nehmen wir an, die Ausdrücke f_λ und $\bar{f}_\lambda$ seien algebraische Functionen der Variabeln x, und die letzteren Ausdrücke seien überdies algebraische Functionen der neuen Parameter $\bar{u}$, dann bezeichne ich die Gruppe (C) als algebraische Gruppe, ohne Rücksicht darauf, ob die Ausdrücke f_λ, welche ursprünglich zur Darstellung der Gruppe dienten, von den Parametern u algebraisch abhängen oder nicht.

Die Differentialgleichungen (D) des ersten Artikels gehen bei Einführung des neuen Parametersystems über in

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \bar{Q}_\mu^\varkappa(\bar{u}) \frac{\partial \bar{f}_\lambda}{\partial \bar{u}_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\varkappa(x) \frac{\partial \bar{f}_\lambda}{\partial x_\nu}$$

und hier ist

$$(\mathrm{P}) \qquad \bar{Q}_\mu^\varkappa(\bar{u}) = \sum_{\nu=1}^{m} Q_\nu^\varkappa(u) \frac{\partial \bar{u}_\mu}{\partial u_\nu} \quad (\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Die aus den m^2 Functionen $\bar{Q}_\mu^\varkappa$ gebildete Determinante ist das Product aus der Determinante der Functionen $Q_\mu^\varkappa$ und der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(\bar{u}_1\, \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_m)}{\partial(u_1\, u_2 \ldots u_m)},$$

sie verschwindet demnach nicht identisch. Die Functionen $\bar{Q}_\mu^\varkappa$ genügen, wie man sich leicht überzeugt, den partiellen Differentialgleichungen

$$(\mathrm{J}_1') \qquad \sum_{\nu=1}^{m}\left(\overline{Q}_\nu^\varkappa(\overline{u})\,\frac{\partial \overline{Q}_\lambda^\mu(\overline{u})}{\partial \overline{u}_\nu} - \overline{Q}_\nu^\mu(\overline{u})\,\frac{\partial \overline{Q}_\lambda^\varkappa(\overline{u})}{\partial \overline{u}_\nu}\right) = -\sum_{\nu=1}^{m}\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}\,\overline{Q}_\lambda^\nu(\overline{u})$$

$$(\lambda, \varkappa, \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Das sind dieselben Differentialgleichungen, welche auch für die Functionen $Q_\mu^\varkappa(u)$ gelten (Art. II).

Nehmen wir nun umgekehrt an, von den Functionen $\overline{Q}_\mu^\varkappa$ sei nur bekannt, dass dieselben den Differentialgleichungen (J_1') genügen, und dass ihre Determinante nicht verschwindet. Dann kann man die Grössen $\overline{u}_1\,\overline{u}_2\ldots\overline{u}_m$ der Art als Functionen von $u_1\,u_2\ldots u_m$ bestimmen, dass die Gleichungen (P) erfüllt sind*), und diese m Functionen sind nothwendig von einander unabhängig. Daraus folgt: unter den angegebenen Voraussetzungen bestimmen die Differentialgleichungen (D_1) eine Darstellungsform der Gruppe (C).

Die Bedingung, dass die Functionen $\overline{Q}_\mu^\varkappa$ den Differentialgleichungen (J_1') genügen sollen, wird vollständig vertreten durch die Bedingung, dass die m Differentialgleichungen (D_1) ein vollständiges System bilden. Ist dies nämlich der Fall, so gelten für die Coefficienten derselben Differentialgleichungen der Form:

$$\sum_{\nu=1}^{m}\left(\overline{Q}_\nu^\varkappa\,\frac{\partial \overline{Q}_\lambda^\mu}{\partial \overline{u}_\nu} - \overline{Q}_\nu^\mu\,\frac{\partial \overline{Q}_\lambda^\varkappa}{\partial \overline{u}_\nu}\right) = -\sum_{\nu=1}^{m}\gamma_\nu^{\varkappa\mu}\,\overline{Q}_\lambda^\nu,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu^\varkappa\,\frac{\partial X_\lambda^\mu}{\partial x_\nu} - X_\nu^\mu\,\frac{\partial X_\lambda^\varkappa}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{m}\gamma_\nu^{\varkappa\mu}\,X_\lambda^\nu,$$

woraus nach Art. II (J) folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{m}(\gamma_\nu^{\varkappa\mu} - \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu})\,X_\lambda^\nu = 0.$$

Weil die Determinante der Functionen $\overline{Q}_\mu^\varkappa$ nicht verschwindet, müssen die Multiplicatoren $\gamma_\nu^{\varkappa\mu}$ jedenfalls von den Variabeln x unabhängig sein, und weil zwischen den Functionen X_λ^ν keine lineare Relation der Form

$$\sum_{\nu=1}^{m}k_\nu X_\lambda^\nu = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

mit von den Variabeln x unabhängigen Coefficienten besteht (Art. I), so folgt hieraus weiter $\gamma_\nu^{\varkappa\mu} = \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$.

*) Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Kap. 19.

IV.

In Art. I wurde bemerkt, dass jeder m-gliedrigen Gruppe (C) $y_\lambda = f_\lambda(x \mid u)$ eine m-gliedrige Parametergruppe (Γ) $w_\mu = \varphi_\mu(u \mid v)$ zugeordnet ist.

Führen wir an Stelle des Parametersystems u ein neues Parametersystem ein, so wird auch an Stelle der Parametergruppe (Γ) eine neue Parametergruppe treten. Jeder Gruppe (C) sind demnach unendlich viele Parametergruppen zugeordnet, in der Weise, dass jeder bestimmten Darstellungsform der Gruppe (C) eine bestimmte Parametergruppe entspricht. Ist die Gruppe (C) algebraisch, so muss es auch unter den zugeordneten Parametergruppen algebraische Gruppen geben, und die Bedingungen dafür, dass dies der Fall ist, müssen ihren Ausdruck in gewissen für die charakteristischen Constanten geltenden Bedingungen finden. Es treten also, wenn die Gruppe (C) algebraisch ist, zu den Gleichungen (E) des Art. II, welchen die charakteristischen Constanten auf jeden Fall genügen müssen, noch gewisse Nebenbedingungen hinzu.

Um die in Betracht kommenden Verhältnisse genauer auseinander zu setzen, gehen wir von der Definition der Gruppe (C) durch die Differentialgleichungen (D) des Art. I aus, und legen uns die Frage vor: welchen Bedingungen müssen die Coefficienten X_ν^μ dieser Differentialgleichungen genügen, damit die Gruppe (C) algebraisch ist?

Diese Bedingungen nun zerfallen in zwei vollständig getrennte Kategorien. Die Bedingungen der ersten Kategorie betreffen ausschliesslich die charakteristischen Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$.

Nehmen wir an, es sei ein System von charakteristischen Constanten gegeben, welches diesen Bedingungen genügt. Dann müssen die Functionen X_ν^μ zunächst den partiellen Differentialgleichungen (J) des Art. II genügen; sie müssen aber ausserdem noch gewisse Nebenbedingungen erfüllen, welche sich aus der Forderung ergeben, dass die Gruppe (C) algebraisch sein soll. Um diese zweite Kategorie von Bedingungen allgemein anzugeben, reichen die zu Gebote stehenden analytischen Hülfsmittel bei weitem nicht aus. Dagegen lassen sich die Bedingungen der ersten Kategorie vollständig nachweisen. Um diesen Nachweis zu führen, beweisen wir zunächst einen Satz, der für zahlreiche Untersuchungen über Transformationsgruppen den geeignetsten Ausgangspunkt bildet, nämlich den Satz, dass jede m-gliedrige Transformationsgruppe durch die Aufeinanderfolge von m eingliedrigen Gruppen ersetzt werden kann.

V.

Wir beginnen mit der Untersuchung einer eingliedrigen Gruppe

$$y_\lambda = f_\lambda(x_1\, x_2 \ldots x_n \,|\, u) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Eine derartige Gruppe ist definirt durch n Differentialgleichungen der Form

$$\text{(D)} \qquad Q(u)\frac{\partial f_\lambda}{\partial u} - \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und die Anfangsbedingungen $f_\lambda = x_\lambda$ für $u = 0$.

$Q(u)$ kann als constant und $= 1$ betrachtet werden. Um dies zu erzwingen, hat man nur an Stelle des Parameters u den Parameter

$$\bar{u} = \int_0^u \frac{du}{Q}$$

einzuführen.

Die n Functionen f_λ genügen noch einem zweiten System von Differentialgleichungen, nämlich den folgenden:

$$\text{(D}'\text{)} \qquad \frac{\partial f_\lambda}{\partial u} = X_\lambda(f).$$

Zum Beweise werden wir zeigen, dass die n Ausdrücke

$$S_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu}$$

den Differentialgleichungen (D) genügen. Daraus folgt dann, dass sich S_λ als Function von $f_1 f_2 \ldots f_n$ darstellen lässt, und weil für $u = 0$ $f_\lambda = x_\lambda$ wird, so ist $S_\lambda(f) = X_\lambda(f)$.

Nun ist

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial X_\nu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu} + X_\nu(x)\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right)$$

und

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x_\nu \partial u} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} X_\nu(x)\left(\frac{\partial X_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\mu} + X_\mu(x)\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right).$$

Folglich

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x)\frac{\partial S_\lambda}{\partial x_\nu} \quad \text{w. z. b. w.}$$

Um die Parametergruppe der eingliedrigen Gruppe zu bestimmen, führen wir zwei Substitutionen der Gruppe nach einander aus.

Sei

$$z_\lambda = f_\lambda(y \mid v), \qquad y_\lambda = f_\lambda(x \mid u).$$

Dann ergiebt sich aus (D)

$$\frac{\partial z_\lambda}{\partial v} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(y) \frac{\partial z_\lambda}{\partial y_\nu}.$$

Andererseits ergiebt sich aus (D')

$$\frac{\partial z_\lambda}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial z_\lambda}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(y) \frac{\partial z_\lambda}{\partial y_\nu}.$$

Folglich

$$\frac{\partial z_\lambda}{\partial u} = \frac{\partial z_\lambda}{\partial v}.$$

Diese Differentialgleichung zeigt, dass z_λ — bei gegebenen Werthen der x — nur von der Summe $w = u + v$ abhängt. Als Function von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ und w betrachtet genügt z_λ den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial z_\lambda}{\partial w} = \frac{\partial z_\lambda}{\partial v} = X_\lambda(z).$$

Für $u = 0$, $v = 0$ sind $z_\lambda = y_\lambda = x_\lambda$, also gelten die Anfangsbedingungen $z_\lambda = x_\lambda$ für $w = 0$. Demnach ist $z_\lambda = f_\lambda(x \mid w)$ und die Parametergruppe wird dargestellt durch die Gleichung

$$w = u + v.$$

Setzt man $v = -u$, so sind $w = 0$ und $z_\lambda = x_\lambda$. Demnach ist

$$x_\lambda = f_\lambda(y \mid -u)$$

die zur Substitution

$$y_\lambda = f_\lambda(x \mid u)$$

inverse Substitution.

VI.

Der Nachweis, dass jede m-gliedrige Gruppe aus m eingliedrigen Gruppen zusammengesetzt werden kann, beruht auf einem Hülfssatze der zunächst abgeleitet werden soll.

Es seien mn Functionen $X_\nu^\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$) von $x_1\, x_2 \ldots x_n$ gegeben, welche den partiellen Differentialgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\lambda^\varkappa \frac{\partial X_\lambda^\mu}{\partial x_\nu} - X_\nu^\mu \frac{\partial X_\lambda^\varkappa}{\partial x_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} X_\lambda^\nu$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \varkappa, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen. Wir bestimmen nun eine eingliedrige Gruppe durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial y_\lambda}{\partial u}=\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\sigma(x)\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu} \quad (\lambda=1,2,\ldots,n)$$

und die Anfangsbedingungen $y_\lambda = x_\lambda$ für $u=0$.

Im vorhergehenden Artikel wurde bewiesen, dass sich die rechten Seiten dieser Differentialgleichungen auch in der Form $X_\lambda^\sigma(y)$ darstellen lassen. Wir stellen uns nun die Aufgabe die allgemeinen Ausdrücke

$$S_\lambda^\tau=\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(x)\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu}$$

als Functionen von $y_1\, y_2 \ldots y_n$ und u darzustellen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir S_λ^τ durch ein System von partiellen Differentialgleichungen. Es ist

$$\frac{\partial S_\lambda^\tau}{\partial x_\mu}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial X_\nu^\tau(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu}+X_\nu^\tau(x)\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_\nu \partial x_\mu}\right)$$

und

$$\frac{\partial S_\lambda^\sigma}{\partial u}=\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(x)\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial x_\nu \partial u}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} X_\nu^\tau(x)\left(\frac{\partial X_\mu^\sigma(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\mu}+X_\mu^\sigma(x)\frac{\partial^2 y_\lambda}{\partial y_\nu \partial x_\mu}\right).$$

Folglich

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\sigma(x)\frac{\partial S_\lambda^\tau}{\partial x_\nu}-\frac{\partial S_\lambda^\tau}{\partial u}=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(X_\nu^\sigma(x)\frac{\partial X_\mu^\tau(x)}{\partial x_\nu}-X_\nu^\tau(x)\frac{\partial X_\mu^\sigma(x)}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\mu}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n}\varepsilon_\nu^{\sigma\tau} X_\mu^\nu(x)\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\mu}=\sum_{\nu=1}^{m}\varepsilon_\nu^{\sigma\tau} S_\lambda^\nu$$

$$(\lambda=1,2,\ldots,n;\quad \tau=1,2,\ldots,m).$$

Diese Differentialgleichungen formen wir in der Weise um, dass in denselben nur noch die Differentialquotienten der zu bestimmenden Functionen aber nicht diese selbst vorkommen.

Unter $b_{\tau\varrho}^\sigma\,(\tau,\varrho=1,2,\ldots,m)$ Functionen von u verstehend erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\sigma(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sum_{\tau=1}^{m} S_\lambda^\tau b_{\tau\varrho}^\sigma-\frac{\partial}{\partial u}\sum_{\tau=1}^{m} S_\lambda^\tau b_{\tau\varrho}^\sigma$$

$$=\sum_{\nu=1}^{m}\left(\sum_{\tau=1}^{m}\varepsilon_\varrho^{\sigma\tau} b_{\tau\varrho}^\sigma-\frac{\partial b_{\nu\varrho}^\sigma}{\partial u}\right)S_\lambda^\nu.$$

Die zur Verfügung stehenden Multiplicatoren $b^\sigma_{\tau\varrho}$ bestimmen wir nun durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial b^\sigma_{\tau\varrho}}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon^{\sigma\nu}_{\tau} b^\sigma_{\nu\varrho} \quad (\tau, \varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Anfangsbedingungen $b^\sigma_{\tau\varrho} = \binom{\tau}{\varrho}$ für $u = 0$.

Jeder der Ausdrücke

$$\sum_{\tau=1}^{m} S^\tau_\lambda b^\sigma_{\tau\varrho} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n; \quad \varrho = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt nun mehr der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} X^\sigma_\nu(x) \frac{\partial F}{\partial x_\nu} = 0$$

und lässt sich demnach als Function von $y_1\, y_2 \ldots y_n$ darstellen. Für $u = 0$ hat der vorstehende Ausdruck $\left(\text{wegen } y_\lambda = x_\lambda;\ b^\sigma_{\tau\varrho} = \binom{\tau}{\varrho}\right)$ den Werth $X^\varrho_\lambda(x)$.

Folglich ist für beliebige Werthe der Variabeln x und u

$$\sum_{\tau=1}^{m} S^\tau_\lambda b^\sigma_{\tau\varrho}(u) = \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} X^\tau_\nu(x) \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu} b^\sigma_{\tau\varrho}(u) = X^\varrho_\lambda(y).$$

VII.

Die Bestimmung der oben eingeführten Multiplicatoren $b^\sigma_{\tau\varrho}$ erfordert die Integration eines Systems von Differentialgleichungen der Form

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\lambda\nu} b_{\nu\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit den Anfangsbedingungen $b_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u = 0$. Wir fassen die m^2 Functionen $b_{\lambda\mu}$ als Coefficienten einer linearen Substitution auf

$$\eta_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} b_{\lambda\mu} \xi_\mu$$

und betrachten die Grössen $\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_m$ als Functionen der unabhängigen Variabeln $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_m$ und u.

Die m^2 Differentialgleichungen (C) werden dann vollständig vertreten durch die m Differentialgleichungen

$$\text{(C')} \qquad \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\lambda\nu} \eta_\nu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

für welche die Anfangsbedingungen $\eta_\lambda = \xi_\lambda$ für $u = 0$ gelten.

Die Natur der Functionen, auf welche die Integration der Differentialgleichungen (C′) führt, hängt wesentlich ab von den Eigenschaften der „charakteristischen“ Determinante

$$\psi(r) = \begin{vmatrix} c_{11}-r & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22}-r & c_{23} & \dots & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-r & \dots & c_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mm}-r \end{vmatrix}.$$

Die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\psi(r) = 0$ bezeichne ich mit $r_1\, r_2 \dots r_{m'}$ $(m' \leqq m)$ und die Exponenten der zur Wurzel $r_\varkappa$ gehörigen Elementartheiler mit $e_0^\varkappa\, e_1^\varkappa \dots e_{l_\varkappa}^\varkappa$.

Wie ich in meiner Inauguraldissertation bewiesen habe, lassen sich m^2 Grössen $[gh\lambda]_\varkappa$ mit nicht verschwindender Determinante der Art bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_{\mu\lambda}[gh\mu]_\varkappa = r_\varkappa[gh\lambda]_\varkappa + [g-1\,h\lambda]_\varkappa \quad \lambda = 1, 2, \quad \dots, m,$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_{\mu\lambda}[1h\mu]_\varkappa = r_\varkappa[1h\lambda]_\varkappa \qquad g = 2, 3, \quad \dots, e_h^\varkappa,$$

$$h = 0, 1, 2, \dots, l_\varkappa,$$

$$\varkappa = 1, 2, \quad \dots, m'.$$

Die Gleichungen (C′) lassen sich nun durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial u}[1h\eta]_\varkappa = r_\varkappa[1h\eta]_\varkappa,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}[gh\eta]_\varkappa = r_\varkappa[gh\eta]_\varkappa + [(g-1)h\eta]_\varkappa$$

wo zur Abkürzung $[gh\eta]_\varkappa$ für $\sum_{\mu=1}^{m}[gh\mu]_\varkappa\, \eta_\mu$ geschrieben ist.

Die Integration dieser Differentialgleichungen ergiebt bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$[1h\eta]_\varkappa = e^{r_\varkappa u}[1h\xi]_\varkappa,$$

$$[gh\eta]_\varkappa = e^{r_\varkappa u}\Big\{[gh\xi]_\varkappa + u[(g-1)h\xi]_\varkappa + \frac{u^2}{1.2}[(g-2)h\xi]_\varkappa$$

$$+ \frac{u^3}{1.2.3}[(g-3)h\xi]_\varkappa + \dots + \frac{u^{g-1}}{1.2.3\dots(g-1)}[1h\xi]_\varkappa\Big\}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Werthe der Grössen $b_{\lambda\mu}$, wenn man in denselben η_λ durch $\sum_\mu b_{\lambda\mu}\xi_\mu$ ersetzt, und beachtet, dass die Grössen ξ unabhängig variabel sind.

Die Grössen $b_{\lambda\mu}$ lassen sich in zwei Fällen als rationale Functionen eines variabeln Parameters darstellen, nämlich erstens dann, wenn die Gleichung $\psi(r)=0$ keine von Null verschiedene Wurzel hat, und zweitens dann, wenn alle Elementartheiler der Determinante $\psi(r)$ von der ersten Ordnung und ausserdem die Verhältnisse der Wurzeln $r_1\, r_2 \ldots r_{m'}$ rationale Zahlen sind. Im ersten Fall sind die Grössen $b_{\lambda\mu}$ ganze Functionen von u, im zweiten Fall rationale Functionen einer Exponentialgrösse e^{ku}. Tritt einer dieser beiden Fälle ein, so bezeichne ich das System der Constanten $c_{\lambda\mu}$ als regulär.

Die Substitutionen $\eta_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}(u)\,\xi_\mu$ bilden eine eingliedrige Gruppe und es gelten für diese Gruppe*) die in Artikel V entwickelten Sätze:

1) Die zur Substitution $\eta_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}(u)\xi_\mu$ inverse Substitution ist $\xi_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}(-u)\,\eta_\mu$.

2) Die Functionen η, welche den Differentialgleichungen (C′) genügen, genügen auch dem zweiten System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m} c_{\nu\mu}\,\xi_\mu\,\frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \xi_\nu}.$$

Daraus folgt: die Grössen $b_{\lambda\mu}$ genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial b_{\lambda\mu}}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}.$$

Lassen wir an Stelle der Grössen $c_{\lambda\mu}$ die Grössen $\varepsilon_\lambda^{\varkappa\mu}$ und dementsprechend an Stelle der Functionen $b_{\lambda\mu}$ die Functionen $b_{\lambda\mu}^{\varkappa}$ treten, so gehen die vorstehenden Differentialgleichungen über in

$$\frac{\partial b_{\lambda\mu}^{\varkappa}}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\lambda\nu}^{\varkappa}\,\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, da $e_\nu^{\varkappa\varkappa}=0$ ist (Art. II, E) $\frac{\partial b_{\lambda\varkappa}^{\varkappa}}{\partial u}=0$ also $b_{\lambda\varkappa}^{\varkappa} = \binom{\lambda}{\varkappa}$.

VIII.

Auf Grund des Hülfssatzes des Art. VI lässt sich nun beweisen, dass sich jede m-gliedrige Gruppe aus m eingliedrigen Gruppen zusammensetzen lässt.

*) Dies ergiebt sich aus der Definition der Functionen durch die Differentialgleichungen (C′) vergl. Art. I.

Die ursprünglich vorgelegte m-gliedrige Gruppe (C)

$$g_\lambda = f_\lambda(x|u)$$

war definirt durch die Differentialgleichungen

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} P_\varkappa^\mu(u)\, X_\nu^\varkappa(x) \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots m \\ \lambda = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

und die Anfangsbedingungen $f_\lambda = x_\lambda$ für $u_1 = 0,\ u_2 = 0 \ldots u_m = 0$.

Für die Coefficienten $X_\nu^\varkappa$ dieser Differentialgleichungen gelten die Bedingungen (Art. I u. II)

$$1) \sum_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu^\varkappa \frac{\partial X_\lambda^\mu}{\partial x_\nu} - X_\nu^\mu \frac{\partial X_\lambda^\varkappa}{\partial x_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} X_\lambda^\nu \quad \begin{pmatrix} \varkappa, \mu = 1, 2, \ldots m \\ \lambda = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}.$$

2) Die Functionen $X_\nu^\varkappa$ genügen keiner Relation

$$\sum_{\nu=1}^{m} k_\nu X_\lambda^\nu = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

mit constanten Coefficienten k.

Wir bestimmen nun m Functionensysteme

$$h_\lambda^\mu(x_1 x_2 x_3 \ldots x_r | u) = h_\lambda^\mu(x|u) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

durch die Differentialgleichungen

$$\text{(H)} \qquad \frac{\partial h_\lambda^\mu}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\mu(x) \frac{\partial h_\lambda^\mu}{\partial x_\nu} = X_\lambda^\mu(h^\mu)\ ^{*)}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots n;\ \mu = 1, 2, \ldots m)$$

und die Anfangsbedingungen $h_\lambda^\mu = x_\lambda$ für $u = 0$.

Sodann bilden wir die m eingliedrigen Gruppen:

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} y_\lambda &= h_\lambda^m(y^{m-1}|u_m), \\ y_\lambda^{m-1} &= h_\lambda^{m-1}(y^{m-2}|u_{m-1}), \\ y_\lambda^{m-2} &= h_\lambda^{m-2}(y^{m-3}|u_{m-2}), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_\lambda^2 &= h_\lambda^2(y^1|u_2), \\ y_\lambda^1 &= h_\lambda^1(x|u_1). \end{aligned} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots p)$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die Grössen $y^{m-1}, y^{m-2} \ldots y^1$, so ergiebt sich ein Gleichungssystem der Form

$$y_\lambda = \bar{f}_\lambda(x_1 x_2 \ldots x_n | u_1 u_2 \ldots u_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

---

*) Vergl. Art. V.

Aus der Definition der Functionen h^μ ergiebt sich sofort, dass den Parameterwerthen $u_1 = 0,\ u_2 = 0 \ldots u_m = 0$ die Functionswerthe $\bar{f}_\lambda = x_\lambda$ entsprechen. Wir werden nun weiter beweisen, dass die Functionen $\bar{f}_\lambda$ Differentialgleichungen der Form

$$(\mathrm{D}_1) \quad \frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} P_\varkappa^\mu(u)\, X_\nu^\varkappa(x) \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots m \\ \lambda = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

genügen, und dass die aus den Functionen $P_\varkappa^\mu$ gebildete Determinante nicht verschwindet. Ist dies bewiesen, so ergiebt sich aus Art. III, dass die Formeln

$$y_\lambda = f_\lambda(x|u) \quad \text{und} \quad y_\lambda = \bar{f}_\lambda(x|u)$$

verschiedene Darstellungsformen *einer und derselben* m-gliedrigen Gruppe (C) geben. Daraus folgt dann, dass die Gruppe (C) aus den m eingliedrigen Gruppen (S) zusammengesetzt werden kann, was zu beweisen ist.

Um nun die Differentialgleichungen (D) zu beweisen, setzen wir in der Schlussgleichung des Art. VI für σ der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots m$ und ersetzen gleichzeitig der Reihe nach

$$\begin{array}{llllll} u & \text{durch} & u_1 & u_2 & \ldots & u_m \\ x_\lambda & \text{durch} & x_\lambda & y_\lambda^1 & \ldots & y_\lambda^{m-1} \quad \lambda = 1, 2, \ldots n \\ y_\lambda & \text{durch} & y_\lambda^1 & y_\lambda^2 & \ldots & y_\lambda \end{array}$$

Dann folgt:

$$\sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(x) \frac{\partial y_\lambda'}{\partial x_\nu} b_{\tau\varrho}^1(u_1) = X_\lambda^\varrho(y^1),$$

$$\sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(y_1) \frac{\partial y_\lambda^2}{\partial y_\nu'} b_{\tau\varrho}^2(u_2) = X_\lambda^\varrho(y^2),$$

$$\sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(y^2) \frac{\partial y_\lambda^3}{\partial y_\nu^2} b_{\tau\varrho}^3(u_3) = X_\lambda^\varrho(y^3), \qquad \begin{array}{l} \lambda = 1, 2, \ldots, n, \\ \varrho = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(y^{m-2}) \frac{\partial y_\lambda^{m-1}}{\partial y_\nu^{m-2}} b_{\tau\varrho}^{m-1}(u_{m-1}) = X_\lambda^\varrho(y^{m-1}),$$

$$\sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(y^{m-1}) \frac{\partial y_\lambda}{\partial y_\nu^{m-1}} b_{\tau\varrho}^m(u_m) = X_\lambda^\varrho(y),$$

Eliminiren wir aus den μ ersten Gleichungssystemen die Functionen $X_\lambda^\varrho(y^1),\ X_\lambda^\varrho(y^2) \ldots X_\lambda^\varrho(y^{\mu-1})$, so ergiebt sich

$$
(\mathrm{T})\quad
\begin{aligned}
&\sum_{\tau=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(x)\,\frac{\partial y_\lambda^\mu}{\partial x_\nu}\,a_{\tau\varrho}^\mu(u_1 u_2 \dots u_\mu) = X_\lambda^\varrho(y^\mu), && \mu = 1, 2, \dots m-1,\\
& && \varrho = 1, 2, \dots m,\\
&\sum_{\tau=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^\tau(x)\,\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu}\,a_{\tau\varrho}^m(u_1 u_2 \dots u_m) = X_\lambda^\varrho(y), && \lambda = 1, 2, \dots n.
\end{aligned}
$$

Die hier auftretenden Functionen $a_{\tau\varrho}^\mu$ sind durch die Recursionsformeln bestimmt:

$$
(\mathrm{R})\quad
\begin{aligned}
&a_{\tau\varrho}^1 = b_{\tau\varrho}^1, && \tau, \varrho = 1, 2, \dots m,\\
&a_{\tau\varrho}^\mu = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\tau\nu}^{\mu-1}\, b_{\nu\varrho}^\mu, && \mu = 2, 3, \dots m-1.
\end{aligned}
$$

Nun ergiebt sich aus den Gleichungen (S) und (H)

$$
\frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial y_\lambda}{\partial y_\nu^\mu}\,\frac{\partial y_\nu^\mu}{\partial u_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial y_\lambda}{\partial y_\nu^\mu}\, X_\nu^\mu(y^\mu)
$$

und hieraus wegen (T)

$$
\frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\tau=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\tau\mu}^\mu(u_1 u_2 \dots u_\mu)\, X_\nu^\tau(x)\,\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu}.
$$

Diese Gleichungen werden mit den zu beweisenden Gleichungen (D_1) identisch, wenn man

$$
\overline{P}_\varkappa^\mu(u_1 u_2 \dots u_m) = a_{\varkappa\mu}^\mu(u_1 u_2 \dots u_\mu)
$$

setzt.

Für $u_1 = 0,\ u_2 = 0 \dots u_m = 0$ wird $b_{\tau\varrho}^\mu = \binom{\tau}{\varrho}$, folglich auch $a_{\tau\varrho}^\mu = \binom{\tau}{\varrho}$; für die angegebenen Werthe der Parameter wird demnach die Determinante der Functionen $\overline{P}_\varkappa^\mu$ gleich 1, diese Determinante verschwindet also nicht identisch.

Es ist zu bemerken, dass der Beweis der Differentialgleichungen (D_1) sich nur auf die Eigenschaft 1) der Functionen $X_\lambda^\varkappa$ stützt, dagegen von der Eigenschaft 2) dieser Functionen keinen Gebrauch macht.

IX.

Nachdem bewiesen ist, dass sich jede m-gliedrige Gruppe aus m eingliedrigen Gruppen zusammensetzen lässt, überzeugt man sich leicht, dass diese Zusammensetzung auf unendlich mannigfaltige Weise erfolgen kann.

Bezeichnen wir mit $c_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2 \dots m)$ Constante, die nur der einen Bedingung unterliegen, dass ihre Determinante nicht ver-

schwinde, und setzen wir die in Art. II gebrauchte Bezeichnungsweise wieder aufnehmend

$$\overline{X}_\lambda^\mu = \sum_{\nu=1}^{m} c_{\mu\nu} X_\lambda^\nu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n; \ (\mu = 1, 2, \ldots m).$$

Lassen wir nun in den Differentialgleichungen (H) des vorigen Artikels die Functionen $\overline{X}_\lambda^\mu$ an Stelle der Functionen X_λ^μ treten, so treten an Stelle der m eingliedrigen Gruppen (S) gewisse andere m eingliedrige Gruppen $(\overline{S})$. Aus der Bedeutung, welche die Functionen $\overline{X}_\lambda^\mu$ für die Gruppe (C) haben, ergiebt sich sofort, dass wir auch durch Zusammensetzung der Gruppen $(\overline{S})$ zur Gruppe (C) gelangen müssen. Nur werden wir, wenn wir von den Gruppen $(\overline{S})$ ausgehen, zu einer anderen Darstellungsform der Gruppe (C) kommen, als wenn wir von den Gruppen (S) ausgehen. Wenn nämlich an Stelle der Functionen X_λ^μ die Functionen $\overline{X}_\lambda^\mu$ treten, so tritt gleichzeitig an Stelle des Systems der charakteristischen Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ ein äquivalentes System charakteristischer Constanten $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ (Art. II) und dementsprechend treten an Stelle der Functionen $b_{\varkappa\nu}^\mu$ und $\overline{P}_\varkappa^\mu$ Functionen, welche von den Constanten $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ in derselben Weise abhängen, wie die ersteren Functionen von den Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$.

X.

Wir gehen nun auf die Formeln (T) des Art. VIII zurück, um aus denselben weitere Folgerungen abzuleiten. Die letzte dieser Formeln lautete:

$$\text{(T)} \qquad \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\tau\varrho}^{m} X_\nu^\tau(x) \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu} = X_\lambda^\varrho(y),$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots n; \ \varrho = 1, 2, \ldots m).$$

Die hier auftretenden Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ sind bestimmt durch die Recursionsformeln

$$a_{\tau\varrho}^1 = b_{\tau\varrho}^1, \qquad \tau, \varrho = 1, 2, \ldots m,$$
$$a_{\tau\varrho}^\mu = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\tau\nu}^{\mu-1} b_{\nu\varrho}^\mu, \qquad \mu = 2, 3, \ldots m,$$

welche zeigen, dass diese Grössen nur von den charakteristischen Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ und den Parametern u abhängen.

Nun besteht zwischen den Functionen X_λ^μ nach Voraussetzung keine Relation

$$\sum_{\mu=1}^{m} k_\mu X_\lambda^\mu = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

mit constanten Coefficienten k. Daraus folgt, dass die Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ auch durch die Gleichungen (T) vollkommen bestimmt sind. Führen wir an Stelle der Parameter u beliebige andere m unabhängig variable Parameter ein, so ändert sich nur die Ausdrucksform der Grössen y_λ und $\frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu}$, ihre Werthe bleiben offenbar ungeändert. Demnach wird sich bei Einführung neuer Parameter auch nur die Ausdrucksform der Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ ändern, aber das Werthsystem dieser Grössen bleibt ungeändert. Eliminiren wir zwischen den m^2 Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ die m Parameter, so erhalten wir Relationen, welche von der Wahl des Parametersystems vollkommen unabhängig sind. Diese Relationen sind nothwendig algebraisch, wenn die vorgelegte Gruppe (C) algebraisch ist (vergl. Art. III). Daraus folgt: Können wir nachweisen, dass zwischen den m^2 Grössen $a_{\tau\varrho}^m$, welche einem gegebenen System charakteristischer Constanten entsprechen, transcendente Relationen bestehen, so kann die zugehörige Gruppe (C) nicht algebraisch sein.

Die Bestimmung der Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ durch die Recursionsformeln (R) steht ersichtlich im engsten Zusammenhang mit der Zusammensetzung der Gruppe (C) aus den m eingliedrigen Gruppen (S) des Art. VIII. Gehen wir von einer anderen Art der Zusammensetzung der Gruppe (C) aus, so erhalten wir auch ein anderes System von Recursionsformeln zur Bestimmung der Grössen $a_{\tau\varrho}^m$. Aber diese neuen Formeln führen zu demselben Werthsystem der Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ wie die ursprünglichen. Nun entspricht dem Uebergang von einer Zusammensetzungsart der Gruppe (C) zu einer anderen der Uebergang von einem System charakteristischer Constanten zu einem äquivalenten System (Art. IX). Daraus folgt:

Das Werthsystem der Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ bleibt ungeändert, wenn wir in den für diese Grössen geltenden Ausdrücken die charakteristischen Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ durch ein äquivalentes System ersetzen.

XI.

Aus den vorangehenden Erörterungen ergiebt sich die Frage: welchen Bedingungen müssen die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ genügen, damit

zwischen den Grössen $a^m_{\tau\varrho}$ nur algebraische Relationen bestehen? Um diese Frage zu entscheiden, werden wir die Grössen $a^m_{\tau\varrho}$ durch ein System partieller Differentialgleichungen definiren, welches sowohl die Anzahl als den Charakter dieser Relationen erkennen lässt.

Zunächst geben wir den Formeln (R) eine übersichtlichere Gestalt. Zu dem Zweck bilden wir die eingliedrigen Gruppen (vergl. Art. VII).

$$
(\mathrm{R}') \qquad
\begin{aligned}
\xi_\lambda &= \sum_{\mu=1}^{m} b^1_{\lambda\mu}(u_1)\, \eta^1_\mu, \\
\eta^1_\lambda &= \sum_{\mu=1}^{m} b^2_{\lambda\mu}(u_2)\, \eta^2_\mu, \\
\eta^2_\mu &= \sum_{\mu=1}^{m} b^3_{\lambda\mu}(u_3)\, \eta^3_\mu, \\
&\;\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta^{m-2}_\lambda &= \sum_{\mu=1}^{m} b^{m-1}_{\lambda\mu}(u_{m-1})\, \eta^{m-1}_\mu, \\
\eta^{m-1}_\lambda &= \sum_{\mu=1}^{m} b^{m}_{\lambda\mu}(u_m)\, \eta_\mu.
\end{aligned}
\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)
$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die Grössen $\eta^1, \eta^2 \ldots \eta^{m-1}$, so ergiebt sich

$$
(\mathrm{R}'') \qquad \xi_\lambda = \sum_\mu a^m_{\lambda\mu}\, \eta_\mu .
$$

Die Gleichungen (R′) und (R″) vertreten somit die Gleichungen (R) vollständig.

Lösen wir jedes der Gleichungssysteme (R′) und (R″) nach den auf der rechten Seite vorkommenden Grössen auf, so ergiebt sich

$$
(\mathrm{P}) \qquad
\begin{aligned}
\eta_\lambda &= \sum_\mu \beta^m_{\lambda\mu}(u_m)\, \eta^{m-1}_\mu, \\
\eta^{m-1}_\lambda &= \sum_\mu \beta^{m-1}_{\lambda\mu}(u_{m-1})\, \eta^{m-2}_\mu, \\
&\;\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta^2_\lambda &= \sum_\mu \beta^2_{\lambda\mu}(u_2)\, \eta^1_\mu, \\
\eta^1_\lambda &= \sum_\mu \beta^1_{\lambda\mu}(u_1)\, \xi_\mu, \\
\eta_\lambda &= \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}\, \xi_\mu .
\end{aligned}
\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m)
$$

Die hier auftretenden Functionen $\beta^{\varkappa}_{\lambda\mu}(u_\varkappa)$ sind nach Art. VII durch die Gleichung $\beta^{\varkappa}_{\lambda\mu}(u_\varkappa) = b^{\varkappa}_{\lambda\mu}(-u_\varkappa)$ bestimmt. Diese Functionen genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \beta^{\varkappa}_{\lambda\mu}}{\partial u_\varkappa} = -\sum_\nu \beta^{\varkappa}_{\lambda\nu}\, \varepsilon^{\varkappa\mu}_{\nu}$$

und den Anfangsbedingungen $\beta^{\varkappa}_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_\varkappa = 0$.

Folglich genügt die lineare Function

$$g^{\varkappa}_{\lambda}(\xi\,|\,u_\varkappa) = \sum_\mu \beta^{\varkappa}_{\lambda\mu}(u_\varkappa)\, \xi_\mu$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial g^{\varkappa}_{\lambda}}{\partial u_\varkappa} = -\sum_\nu \sum_\mu \varepsilon^{\varkappa\mu}_{\nu}\, \xi_\mu \frac{\partial g^{\varkappa}_{\lambda}}{\partial \xi_\nu} = \sum_\nu \Xi^{\varkappa}_{\nu}(\xi) \frac{\partial g^{\varkappa}_{\lambda}}{\partial \xi_\nu}$$

wo

$$\sum_\mu \varepsilon^{\varkappa\mu}_{\nu}\, \xi_\mu = -\Xi^{\varkappa}_{\nu}(\xi)$$

gesetzt ist, und hierzu kommen die Anfangsbedingungen $g^{\varkappa}_{\lambda} = \xi_\lambda$ für $u_\varkappa = 0$.

Die Coefficienten dieser Differentialgleichungen genügen den Gleichungen

$$\text{(i)} \qquad \sum_{\nu=1}^{m} \left(\Xi^{\varkappa}_{\nu} \frac{\partial \Xi^{\mu}_{\lambda}}{\partial \xi_\nu} - \Xi^{\mu}_{\nu} \frac{\partial \Xi^{\varkappa}_{\lambda}}{\partial \xi_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon^{\varkappa\mu}_{\nu}\, \Xi^{\nu}_{\lambda},$$

$$(\lambda, \varkappa, \mu = 1, 2, \ldots m),$$

deren Beweis sich sofort ergiebt, wenn man die zwischen den Grössen $\varepsilon^{\varkappa\mu}_{\nu}$ bestehenden Relationen (Art. II, E) beachtet.

Die vorstehenden Differentialgleichungen sind den für die Functionen $X^{\varkappa}_{\lambda}$ geltenden Differentialgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(X^{\varkappa}_{\nu} \frac{\partial X^{\mu}_{\lambda}}{\partial x_\nu} - X^{\mu}_{\nu} \frac{\partial X^{\varkappa}_{\lambda}}{\partial x_\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon^{\varkappa\mu}_{\nu}\, X^{\nu}_{\lambda}$$

durchaus analog. Die letzteren gehen in die ersteren über, wenn man erst $n = m$ setzt, und dann an Stelle der Variabeln x und der Functionen X die Variabeln ξ und die Functionen Ξ treten lässt. Führen wir dieselben Substitutionen in den Differentialgleichungen (H) des Art. VIII aus, so treten an Stelle der m eingliedrigen Gruppen (S) die m eingliedrigen Gruppen (P) und an Stelle der Functionen $g_\lambda = \bar{f}_\lambda(x\,|\,u)$ treten die linearen Functionen $\eta_\lambda = \sum\limits_\mu \alpha_{\lambda\mu}\, \xi_\mu$.

Daraus ergiebt sich: die linearen Functionen η_λ genügen den partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(d)}\qquad \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \overline{P}_\varkappa^\mu(u)\, \Xi_\nu^\varkappa(\xi)\, \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \xi_\nu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots m),$$

wo die Functionen $\overline{P}_\varkappa^\mu$ die in Art. VIII angegebene Bedeutung haben.

Für

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \cdots u_m = 0$$

wird

$$\eta_\lambda = \eta_\lambda^{m-1} = \eta_\lambda^{m-2} \cdots = \eta_\lambda' = \xi_\lambda.$$

Hieraus ergeben sich für die Functionen η_λ die Anfangsbedingungen

$$\eta_\lambda = \xi_\lambda \quad \text{für} \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \ldots u_m = 0.$$

XII.

Die Anzahl der Relationen, welche zwischen den Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ bestehen, hängt von der Anzahl der Relationen der Form

$$k_1 \varepsilon_\nu^{1\mu} + k_2 \varepsilon_\nu^{2\mu} + \cdots + k_m \varepsilon_\nu^{m\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots m)$$

ab, welchen die Grössen $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ genügen.

Nehmen wir an, es bestehen genau $m - m_1$ derartige von einander unabhängige Relationen, so dass $m_1 \leq m$ ist. Dann giebt es, wie in Art. II gezeigt wurde, ein zu dem Constantensystem $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ äquivalentes Constantensystem $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$, das den Bedingungen $\delta_\nu^{\varkappa\mu} = 0$ für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots m$ und $\varkappa = 1, 2, \ldots m - m_1$ genügt, während zwischen den übrig bleibenden Grössen $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ keine Relation

$$\sum_{\varkappa=m-m_1 n}^{m} k_\varkappa \delta_\nu^{\varkappa\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu_1 \nu = 1, 2, \cdots m$$

besteht.

Nun ist am Schlusse des Art. X nachgewiesen worden, dass sich nur die Ausdrucksform aber nicht das Werthsystem der Grössen $a_{\tau\varrho}^m$ (oder was dasselbe sagen will, der Grössen $\alpha_{\tau\varrho}$) ändert, wenn wir in den für diese Grössen geltenden Ausdrücken das Constantensystem $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ durch das äquivalente Constantensystem $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ ersetzen. Daraus folgt, dass die Differentialgleichungen (d) des vorigen Artikels ihre Geltung behalten, wenn wir in denselben die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ durch die Constanten $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ ersetzen. Nur müssen wir selbstverständlich diese Substitution nicht nur an den Coefficienten Ξ dieser Differentialgleichungen, sondern auch an den Coefficienten $\overline{P}$ vornehmen: es

müssen an Stelle der Functionen $\overline{P}$ diejenigen Functionen gesetzt werden, welche von den Constanten $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ in derselben Weise abhängen, wie die Functionen $\overline{P}$ von den Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$. Zu demselben Resultat, zu dem wir durch Ausführung der eben genannten Substitutionen gelangen, kommen wir offenbar auch wenn wir voraussetzen, dass die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ selbst den für die Grössen $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ geltenden Bedingungen genügen. Wir setzen also von jetzt an voraus, es sei $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = 0$ für $\mu, \nu = 1, 2, \dots m$ u. $\varkappa = 1, 2, \dots m - m_1$, dagegen bestehe keine Relation der Form

$$\sum_{\varkappa=m-m_1+1}^{m} k_\varkappa \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots m.$$

Nun sind die Functionen $\overline{P}$ durch die Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} \overline{P}_\lambda^\mu &= a_{\lambda\mu}^\mu, \\ a_{\lambda\mu}^1 &= b_{\lambda\mu}^1, & \lambda, \mu = 1, 2, \dots m \\ a_{\lambda\mu}^\varkappa &= \sum_{\nu=1}^m a_{\lambda\nu}^{\varkappa-1} b_{\nu\mu}^\varkappa, & \varkappa = 2, 3, \dots m \end{aligned}$$

und die Grössen $b_{\lambda\mu}^\varkappa$ sind durch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial b_{\lambda\mu}^\varkappa}{\partial u_\varkappa} = \sum_{\nu=1}^m b_{\lambda\nu}^\varkappa \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$$

und die Anfangsbedingungen $b_{\lambda\mu}^\varkappa = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_\varkappa = 0$ definirt.

Unter den eben eingeführten Voraussetzungen ist nun

$$\frac{\partial b_{\lambda\mu}^\varkappa}{\partial u_\varkappa} = 0, \quad b_{\lambda\mu}^\varkappa = \binom{\lambda}{\mu} \quad \text{für} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \dots m \quad \text{und} \quad \varkappa \leqq m - m_1.$$

Daraus folgt: $a_{\lambda\mu}^\varkappa$ ist unabhängig von $u_1, u_2 \dots u_{m-m_1}$ und hängt nur von den letzten m_1 Parametern ab. Für $\varkappa \leqq m - m_1$ wird

$$a_{\lambda\mu}^\varkappa = \binom{\lambda}{\mu}.$$

Da allgemein $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = -\varepsilon_\nu^{\mu\varkappa}$ ist, so ist auch $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = 0$ für $\mu \leqq m - m_1$. Folglich ist

$$\frac{\partial b_{\lambda\mu}^\varkappa}{\partial u_\varkappa} = 0, \quad b_{\lambda\mu}^\varkappa = \binom{\lambda}{\mu} \quad \text{für} \quad \varkappa, \lambda = 1, 2, \dots m \quad \text{und} \quad \mu \leqq m - m_1.$$

Hieraus ergiebt sich

$$a_{\lambda\mu}^\varkappa = a_{\lambda\mu}^{\varkappa-1} = a_{\lambda\mu}^{\varkappa-2} = \dots = \binom{\lambda}{\mu}$$

für $\mu \leqq m - m_1$.

Demnach ist $\overline{P}_\lambda^\mu$ in allen Fällen von $u_1, u_2 \dots u_{m-m_1}$ unabhängig, und insbesondere ist

$$\overline{P}_\lambda^\mu = \binom{\mu}{\lambda},$$

wenn einer der beiden Indices $\leq m - m_1$ ist.

Nunmehr erhalten die Differentialgleichungen (d) des vorigen Artikels die Form

$$(\mathrm{d}_1)\qquad \begin{gathered} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u_\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \leq m - m_1, \\ \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa = m - m_1 + 1}^{m} \sum_{\nu = 1}^{m} \overline{P}_\varkappa^\mu \, \Xi_\nu^\varkappa \, \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \xi_\nu} \quad \text{für } \mu > m - m_1 \end{gathered}$$

und hierzu gehören die Anfangsbedingungen

$$\eta_\lambda = \xi_\lambda \quad \text{für} \quad u_1 = 0, \; u_2 = 0 \cdots u_m = 0.$$

Die ersten $m - m_1$ Differentialgleichungen bringen zum Ausdruck, dass die Grössen η_λ und also auch die Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ von den $m - m_1$ ersten Parametern unabhängig sind. Die m_1 letzten Differentialgleichungen definiren die Grössen η_λ als Functionen der Grössen ξ_λ und der m_1 letzten Parameter.

Die Functionen Ξ genügen nach Voraussetzung keiner Relation der Form

$$\sum_{\varkappa = m - m_1 + 1}^{m} k_\varkappa \, \Xi_\lambda^\varkappa = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots m)$$

mit constanten Coefficienten $k_\varkappa$.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen (d) genügen somit den in Art. I unter 1) und 2) angegebenen Bedingungen. Daraus folgt: die Substitutionen

$$(\mathrm{A})\qquad \eta_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu} \, \xi_\mu$$

bilden eine m_1-gliedrige Gruppe. Es bestehen demnach zwischen den Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ genau $m^2 - m_1$ von einander unabhängige Relationen.

Die Gruppe (A) bezeichnet H. Lie als die der Gruppe (C) adjungirte Gruppe.*)

XIII.

Wir *setzen* nun *voraus*, dass zwischen den Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ nur algebraische Relationen bestehen, und untersuchen, welche Bedingungen für die Grössen $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ sich aus dieser Voraussetzung ergeben.

*) a. a. O. Cap. 16.

Eliminiren wir zwischen den m Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \eta_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}\, \xi_\mu$$

die m_1 Parameter, von welchen die Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ abhängen, so erhalten wir eine Anzahl von Transformationsrelationen zwischen den Grössen ξ und η. Weil die Substitutionen (A) eine Gruppe bilden, so lassen sich diese Transformationsrelationen, wie Hr. Christoffel bewiesen hat*), vollständig durch eine Anzahl von Gleichungen der Form

$$\Pi_\lambda(\eta) = \Pi_\lambda(\xi)$$

ausdrücken, wo Π_λ eine rationale Function der angezeigten Argumente bedeutet.

Die Anzahl der unabhängigen unter diesen Functionen bezeichne ich mit $m - m_2$, so dass $m_2 \leqq m_1 \leqq m$ ist.

Nun genügt jede der m linearen Functionen η den Differentialgleichungen

$$\text{(d}_1\text{)} \qquad \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa = m - m_1 + 1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} \overline{P}_\varkappa^\mu(u)\, \Xi_\nu^\varkappa(\xi)\, \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial \xi_\nu},$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots n;\ \mu = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2, \ldots m).$$

Denselben Differentialgleichungen muss auch eine jede der Functionen Π_λ genügen. Da aber Π_λ von den Parametern unabhängig ist, so genügt diese Function auch den Differentialgleichungen

$$(\pi) \qquad \sum_{\nu=1}^{m} \Xi_\nu^\varkappa(\xi)\, \frac{\partial \Pi_\lambda}{\partial \xi_\nu} = 0,$$

welche, wie die Gleichungen (i) des Art. XI zeigen, ebenfalls ein vollständiges System bilden. Umgekehrt wird jede diesen Differentialgleichungen genügende Function Π zu einer Transformationsrelation $\Pi(\eta) = \Pi(\xi)$ führen.

Daraus folgt: Unter den Differentialgleichungen (Π) sind genau m_2 von einander unabhängige und es genügen denselben $m - m_2$ *rationale* Functionen der Variabeln ξ.

Im Vorausgehenden wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass $m_2 < m$ ist. Da $m_2 \leqq m_1 \leqq m$, so ist diese Voraussetzung für $m_1 < m$ jedenfalls zutreffend. Ist aber $m_1 = m$, so verschwindet die aus den Coefficienten der m Differentialgleichungen (Π) gebildete Determinante, denn es ist alsdann

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} \xi_\varkappa\, \Xi_\nu^\varkappa = - \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}\, \xi_\varkappa\, \xi_\mu$$

und dies ist $= 0$ weil $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = - \varepsilon_\nu^{\mu\varkappa}$ ist.

*) Annalen Bd. 19.

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, dass den m_1 Differentialgleichungen (π), welche m_2 unabhängigen äquivalent sind, $m - m_2$ von einander unabhängige *rationale* Functionen genügen, habe ich in einer der Münchener Academie 1889 vorgelegten Abhandlung angegeben. Sie lassen sich in folgender Weise ausdrücken:

Verstehen wir unter $k_{\lambda\varkappa}$ $(\lambda, \varkappa = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2, \ldots m)$ Constante, deren Determinante nicht verschwindet, und setzen wir

$$e_\nu^{\lambda\mu} = \sum_{\varkappa = m - m_1 + 1}^{m} k_{\lambda\varkappa}\, \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} (\mu, \nu = 1, 2, \ldots m_1;\ \lambda = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2 \ldots m),$$

so müssen sich diese Constanten $k_{\lambda\varkappa}$ der Art bestimmen lassen, dass jedes der m_1 Constantensysteme

$$\begin{matrix} e_1^{\lambda 1} & e_2^{\lambda 1} & \ldots & e_m^{\lambda 1}, \\ e_1^{\lambda 2} & e_2^{\lambda 2} & \ldots & e_m^{\lambda 2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_1^{\lambda m} & e_2^{\lambda m} & \ldots & e_m^{\lambda m} \end{matrix}$$

regulär ist (in dem in Art. VII definirten Sinne). Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so muss zwischen den Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ mindestens eine transcendente Relation stattfinden, und daraus folgt dann, dass die vorgelegte Gruppe (C) nicht algebraisch sein kann (Art. X).

XIV.

Die im vorigen Artikel angegebenen Bedingungen sind nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend, damit zwischen den Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ nur algebraische Relationen bestehen. Um dies zu beweisen, führen wir an Stelle der Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ ein äquivalentes System charakteristischer Constanten $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ ein. Nach Art. II sind die Grössen $\delta_\nu^{\varkappa\mu}$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\delta_\nu^{\varkappa\mu} = \sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{m} \sum_{\varrho=1}^{m} \varepsilon_\varrho^{\sigma\tau}\, c_{\varkappa\sigma}\, c_{\mu\tau} \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial c_{\nu\varrho}} \quad (\varkappa, \mu, \nu = 1, 2, \ldots m),$$

wo die Grössen $c_{\mu\nu}$ nur an die eine Bedingung gebunden sind, dass ihre Determinante nicht verschwinde.

Wir setzen nun $c_{\mu\nu} = k_{\mu\nu}$, wenn die beiden Indices $> m - m_1$ sind, und $c_{\mu\nu} = \binom{\mu}{\nu}$, wenn wenigstens eine der beiden Indices $\leqq m - m_1$ ist.

Dann ist wegen $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = 0$ für $\varkappa \leqq m - m_1$ auch $\delta_\nu^{\varkappa\mu} = 0$ für $\varkappa \leqq m - m_1$

Ferner ist für $\varkappa > m - m_1$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} c_{\varkappa\sigma}\, \varepsilon_{\varrho}^{\sigma\tau} = \sum_{\sigma=m-m_1+1}^{m} k_{\varkappa\sigma}\, \varepsilon_{\varrho}^{\sigma\tau} = e_{\varrho}^{\varkappa\tau},$$

folglich

$$\delta_{\nu}^{\varkappa\mu} = \sum_{\tau}\sum_{\varrho} e_{\varrho}^{\varkappa\tau}\, c_{\mu\tau}\, \frac{1}{C}\, \frac{\partial C}{\partial c_{\nu\varrho}} \quad \text{für } \varkappa > m - m_1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, wie Hr. Weierstrass bewiesen hat*), dass die beiden Determinanten, welche aus den Elementen

$$\delta_{\nu}^{\varkappa\mu} - \binom{\mu}{\nu} r \quad \text{und} \quad e_{\nu}^{\varkappa\mu} - \binom{\mu}{\nu} r \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots m)$$

gebildet sind, dieselben Elementartheiler besitzen. Ist also das System $e_{\nu}^{\varkappa\mu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots m)$ regulär, so gilt dasselbe für das System $\delta_{\nu}^{\varkappa\mu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots m)$.

Sofern also die Bedingungen des vorigen Artikels erfüllt sind, giebt es unter den äquivalenten Systemen charakteristischer Constanten $\delta_{\nu}^{\varkappa\mu}$ wenigstens eines, welches den folgenden Bedingungen genügt:

Für $\varkappa \leq m - m_1$ ist $\delta_{\nu}^{\varkappa\mu} = 0$.

Für $\varkappa > m - m_1$ ist das System der m^2 Constanten $\delta_{\nu}^{\varkappa\mu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots m)$ regulär.

Wir können und wollen nun voraussetzen, dass die für die Grössen $\delta_{\nu}^{\varkappa\mu}$ geltenden Bedingungen schon für die Grössen $\varepsilon_{\nu}^{\varkappa\mu}$ erfüllt sind. Dann lassen sich, wie in Art. VII nachgewiesen wurde, die m^2 Grössen $b_{\lambda\mu}^{\varkappa}(u_\varkappa)$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots m)$ als rationale Functionen einer Variabeln darstellen, und daraus folgt, dass sich die m^2 Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$, welche rationale Functionen der Grössen

$$b_{\lambda\mu}^{\varkappa} \quad (\lambda, \mu = 1, 2 \ldots m;\ \varkappa = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2, \ldots m)$$

sind, als rationale Functionen von m_1 Variabeln darstellen lassen.

Die $m^2 - m_1$ Relationen, welche zwischen den Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ stattfinden, sind also algebraisch, wenn die Bedingungen des vorigen Artikels erfüllt sind.

XV.

Im Art. XIII wurden Bedingungen nachgewiesen, denen die Constanten $\varepsilon_{\nu}^{\varkappa\mu}$ genügen müssen, wenn die vorgelegte Gruppe algebraisch ist. Es bleibt nun noch nachzuweisen, dass auch umgekehrt jedem System charakteristischer Constanten, welches den an-

*) Monatsberichte der Berliner Academie 1868.

gegebenen Bedingungen genügt, eine m-gliedrige algebraische Gruppe entspricht.

Wir halten fest an der Voraussetzung, es sei

$$\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = 0 \text{ für } \mu, \nu = 1, 2, \dots m; \quad \varkappa = 1, 2, \dots m - m_1$$

dagegen bestehe keine Relation der Form

$$\sum_{\varkappa = m - m_1 + 1}^{m} k_\varkappa \varepsilon_\nu^{\varkappa\mu} = 0 \text{ für } \mu, \nu = 1, 2, \dots m.$$

Wir setzen ferner voraus, die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ genügen den in Art. XIII angegebenen Bedingungen. Zu diesen Voraussetzungen fügen wir vorerst noch eine weitere, von der wir uns später freimachen werden: wir nehmen an, es gebe eine m-gliedrige Gruppe

$$\text{(G)} \qquad y_\lambda = f_\lambda(x|u), \quad (\lambda = 1, 2, \dots m)$$

zu welcher die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ als charakteristische Constante gehören. Ob diese Gruppe algebraisch ist oder nicht, kommt nicht in Betracht.

Die Gruppe (G) sei durch die Differentialgleichungen

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} P_\varkappa^\mu(u)\, X_\nu^\varkappa(x) \frac{\partial y_\lambda}{\partial x_\nu} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \dots m \\ \lambda = 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

und die Anfangsbedingungen

$$y_\lambda = x_\lambda \text{ für } u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \dots u_m = 0$$

definirt.

Mit der Gruppe (G) stehen zwei andere Gruppen in engster Beziehung, nämlich erstens die Parametergruppe (Γ), welche der gewählten Darstellungsform der Gruppe (G) entspricht (vergl. Art. I u. IV) und zweitens die adjungirte Gruppe (A). Was nun die Darstellungsform der Gruppe (G) betrifft, so nehmen wir an, das Parametersystem sei so gewählt, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) $P_\varkappa^\mu$ ist unabhängig von $u_1, u_2 \dots u_{m-m_1}$ für alle Werthe der Indices.

$$P_\varkappa^\mu = \binom{\mu}{\varkappa} \text{ wenn wenigstens einer der Indices } \leq m - m_1 \text{ ist.}$$

2) Die Substitutionscoefficienten $\alpha_{\lambda\mu}$ der adjungirten Gruppe (A) sind unabhängig von $u_1, u_2 \dots u_{m-m_1}$ und *rationale* Functionen der übrigen Parameter.

Die Zulässigkeit der ersten Annahme ergiebt sich aus Art. XII, die Zulässigkeit der zweiten aus dem vorigen Artikel.

Die Parametergruppe (Γ) ist bei beliebiger Wahl des Parametersystems durch die Differentialgleichungen

$$(\Delta') \qquad \sum_{\mu=1}^{m} P_x^\mu(w)\, dw_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} P_x^\mu(u)\, du_\mu \quad (x = 1, 2, \ldots m)$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_\mu = v_\mu \quad \text{für} \quad u_1 = 0,\ u_2 = 0 \ldots u_m = 0$$

definirt. Zufolge der besonderen Festsetzungen über die Wahl des Parametersystems, die im Vorausgehenden getroffen worden sind, zerfällt das System der Differentialgleichungen (Δ') in die beiden getrennten Systeme

$$(\delta) \qquad dw_\mu = du_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots m - m_1$$

und

$$(\delta') \qquad \sum_{\mu=m-m_1+1}^{m} P_x^\mu(w)\, dw_\mu = \sum_{\mu=m-m_1+1}^{m} P_x^\mu(u)\, du_\mu \quad \text{für} \quad x > m - m_1.$$

Die Differentialgleichungen (δ) lassen sich ohne Weiteres integriren. Es ergiebt sich

$$w_\mu = u_\mu + v_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots m - m_1.$$

Die adjungirte Gruppe (A) ist bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$(\mathrm{d}_1) \qquad \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial u_\mu} = \sum_{x=m-m_1+1}^{m} \sum_{\nu=1}^{m} P_x^\mu(u)\, \Xi_\nu^x(\xi)\, \frac{\partial u_\lambda}{\partial \xi_\nu},$$

$$(\mu = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2, \ldots m;\ \lambda = 1, 2, \ldots m).$$

Ebenso wie der m-gliedrigen Gruppe (G) die m-gliedrige Parametergruppe (Γ) zugeordnet ist, so ist der m-gliedrigen Gruppe (A) eine m_1-gliedrige Parametergruppe (Γ') zugeordnet, welche durch die Differentialgleichungen

$$\sum_{\mu=m-m_1+1}^{m} P_x^\mu(w)\, dw_\mu = \sum_{\mu=m-m_1+1}^{m} P_x^\mu(u)\, du_\mu,$$

$$(x = m - m_1 + 1,\ m - m_1 + 2, \ldots m)$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_\mu = v_\mu$$

für verschwindende Werthe der Parameter bestimmt ist.

Diese Differentialgleichungen sind identisch mit den Differentialgleichungen (δ') und zu beiden Systemen von Differentialgleichungen gehören dieselben Anfangsbedingungen.

Die Gruppe (Γ') können wir nun noch auf andere Weise bestimmen. Aus der Definition der Parametergruppe folgt nämlich:

Setzt man

$$\zeta_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}(v)\,\eta_\mu$$

und

$$\eta_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}(u)\,\xi_\mu, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots m),$$

so wird

$$\zeta_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}(w)\,\xi_\mu,$$

also

$$\alpha_{\lambda\mu}(w) = \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu}(v)\,\alpha_{\nu\mu}(u).$$

Die Grössen $\alpha_{\lambda\mu}$ sind nach Voraussetzung rationale Functionen der Parameter und unter diesen m^2 Functionen sind m_1 von einander unabhängige. Daraus folgt, dass die Grössen

$$w_\mu (\mu = m - m_1 + 1,\; m - m_1 + 2, \ldots m)$$

algebraische Functionen der Grössen $\alpha_{\lambda\mu}(w)$, also auch algebraische Functionen der Grössen u_μ und v_μ sind.

Die Gleichungen

$$\alpha_{\lambda\mu}(w) = \sum_\nu \alpha_{\lambda\nu}(v)\,\alpha_{\nu\mu}(u)$$

bilden zusammen mit den Gleichungen

$$w_\mu = u_\mu + v_\mu, \quad (\mu = 1, 2, \ldots m - m_1)$$

ein vollständiges System von Integralgleichungen der Differentialgleichungen (δ) und (δ'), welche die Gruppe (Γ) bestimmen.

Die Gruppe (Γ) ist mit der Gruppe (G) gleichzusammengesetzt (Art II). In der Gruppe (Γ) haben wir somit eine m-gliedrige algebraische Gruppe, zu welcher die Grössen $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ als charakteristische Constante gehören.

Wir haben die Gruppe (Γ) zunächst als Parametergruppe der Gruppe (G) definirt, wir wollen sie nunmehr unabhängig von der letzteren Gruppe definiren.

Die Gruppe (Γ) ist zusammengesetzt aus den $m - m_1$ eingliedrigen Gruppen

$$w_\mu = u_\mu + v_\mu$$

und der m_1 gliedrigen Gruppe (Γ').

Die letztere Gruppe ist als Parametergruppe der m_1 gliedrigen Gruppe (A) definirt und die Gruppe (A) ist durch die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ vollkommen bestimmt.

Wir können demnach die m-gliedrige Gruppe (Γ) immer bilden, wenn nur die Constanten $\varepsilon_\nu^{\varkappa\mu}$ gegeben sind.

Strassburg im Juli 1891.

Von den Bewegungen und Umlegungen.

(I. und II. Abhandlung).

Von

E. Study in Marburg.

Die Lehre von den *Bewegungen* im Raume gehört dem Gedankenkreise der elementaren Geometrie an, so weit sie nicht (als kinematische Geometrie) die nach einander eingenommenen Lagen eines bewegten Körpers verfolgt, sondern nur auf dessen Anfangs- und Endstellung achtet, ohne Rücksicht auf die Zwischenlagen. Sie hat zum Gegenstand die geometrischen Eigenschaften zweier oder mehrerer congruenter räumlicher Systeme. Daneben stellt sich die Lehre von den *Umlegungen* (wie wir kurz sagen wollen), von den Transformationen des Raumes, die eine jede Figur nicht in eine congruente, sondern in eine ihr spiegelbildlich gleiche (symmetrische) Figur überführen.*)

Ausgedehntere Untersuchungen über die Umlegungen im dreifach ausgedehnten Raume liegen, soviel ich weiss, bis jetzt nicht vor; nur den entsprechenden Transformationen der ebenen Geometrie, deren Theorie auch aus der Theorie der Bewegungen im Raume abgeleitet werden kann, hat Chasles eine eingehende Darstellung gewidmet. Weit besser sind die Bewegungen bekannt, deren Theorie von einer Reihe der hervorragendsten Mathematiker — wir nennen nur die Namen Joh. Bernoulli, d'Alembert, Euler, Möbius und Chasles — begründet und gefördert worden ist.

*) Der Name „Umlegung" erscheint gerechtfertigt durch den Hinweis auf die ebene Geometrie, in der man mit dem Worte eine anschauliche Vorstellung verbinden kann. Für den Raum freilich versagt diese Vorstellung, da uns die Anschauung einer vierfach-ausgedehnten, den gewöhnlichen Raum einschliessenden Mannigfaltigkeit nicht zu Gebote steht. Wollte man durchaus nur anschauliche Bezeichnungen haben, so könnte man etwa das Wort „*Stülpung*" vorziehen, das dem Verfasser thatsächlich vorgeschlagen worden ist. Indessen ist dieser Ausdruck auf die symmetrischen Transformationen in der geraden Linie und in der Ebene nicht ohne Zwang anwendbar, und jedenfalls ist er in diesen Fällen erst recht nicht anschaulich. Man müsste also ganz entsprechende Dinge mit verschiedenen Namen belegen, was offenbar unzweckmässig ist. Wir haben daher, nach sorgfältiger Erwägung, den zuerst gewählten Ausdruck beibehalten.

Unter diesen hat namentlich Möbius durch seine wichtigen Entdeckungen in der Theorie der unendlich kleinen Bewegungen einen folgenreichen Anstoss gegeben; Chasles aber verdanken wir die erste auch die *endlichen* Bewegungen umfassende allgemeine Theorie.*) Diesen Untersuchungen ist alsbald die gebührende Bewunderung zu Theil geworden; mehrere der wichtigsten Sätze findet man heute in den Lehrbüchern der Mechanik**); eine Weiterentwickelung aber scheint bis zur Gegenwart nur die Theorie der unendlich kleinen Bewegungen erfahren zu haben. Erst in jüngster Zeit haben die schönen Arbeiten von H. Wiener eine neue Wendung in die Lehre von den endlichen Bewegungen gebracht. Aber diese Betrachtungen haben einen anderen Charakter als die von Chasles. Beide Theorien bilden zunächst noch kein einheitliches Ganzes.

Indessen haben sich, seit dem Erscheinen der Chasles'schen Untersuchungen mehrere Disciplinen, die mit der Theorie der Bewegungen nahe zusammenhängen, entwickelt oder doch so wesentlich vervollkommnet, dass es auch aus diesem Grunde an der Zeit sein dürfte, den Gegenstand von Neuem aufzunehmen.

Wir meinen die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen, und von specielleren Theorien die neuere Auffassung der Nicht-Euclidischen Geometrie, die Theorie der orthogonalen Substitutionen und deren Verallgemeinerung, die Lehre von den linearen Transformationen einer quadratischen Form, zu der wiederum die Geometrie der reciproken Radien in naher Beziehung steht, endlich die Lehre von den sogenannten Systemen complexer Zahlen.

Der wechselseitige Zusammenhang der berührten Gegenstände ist nach einigen Richtungen hin gut bekannt; doch bleiben noch grosse Lücken auszufüllen. Namentlich hat man ihn für die einzelnen Theorien noch sehr wenig ausgenützt, wiewohl auch in dieser Beziehung schon Anfänge vorliegen.

Der Verfasser beabsichtigt nun, seine Gedanken hierüber in mehreren Abhandlungen darzulegen, deren beide erste hiermit der Oeffentlichkeit übergeben werden. Der Stoff soll nach den anzuwendenden Methoden gegliedert werden: Nur dadurch, dass man jeden

---

*) *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace.* Compt. Rend. t. 16 (1843) p. 1420.

Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable. Compt. Rend. t. 51 (1860), pp. 855, 905, t. 52 (1861), pp. 77, 189, 487.

Die bei Chasles fehlenden (übrigens einfachen) Beweise sind ergänzt worden von Brisse, Liouville J. 2[me] série t. 15 (1870), 19 (1874); 3[me] série t. 1 (1875). Die Hauptsätze der Chasles'schen Theorie findet man, in freierer Darstellung, auch in dem Werke von Schönflies über die Geometrie der Bewegung (Leipzig, 1886).

**) S. besonders Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd I.

in sich abgeschlossenen Gedankenkreis nach Möglichkeit mit den ihm eigenthümlichen Hülfsmitteln aus sich selbst heraus entwickelt, kann man der bei aller Uebereinstimmung doch nicht zu verkennenden Verschiedenartigkeit der einzelnen Anschauungsweisen gerecht werden. Wir werden uns also im ersten Abschnitt, der von geometrischen Eigenschaften der Bewegungen und Umlegungen im Euclidischen Raume handelt, weder auf die Analysis stützen, noch werden wir den Umweg über den Nicht-Euclidischen Raum oder die Theorie der Flächen zweiten Grades wählen: Diese Dinge müssen vorläufig im Hintergrunde bleiben, wiewohl gerade sie vielfach auf die leitenden Gesichtspunkte gewiesen haben.

Genauere Litteraturangaben wird man in den besonderen Einleitungen der einzelnen Aufsätze und in diesen selbst finden.

I.

Zur elementaren Theorie der Bewegungen und Umlegungen.

Der gegenwärtige erste Abschnitt schliesst sich an den Gedankengang der Chasles'schen Untersuchungen an: Er enthält eine neue Auffassung der Chasles'schen Theorie, sowie Ergänzungen und Erweiterungen nach bestimmter Richtung hin. Wir haben dabei viel mehr ins Einzelne gehen müssen, als es ursprünglich beabsichtigt war.

Chasles stellt beispielsweise den Satz auf, dass die Mitten der Sehnen, die entsprechende Punkte von zwei congruenten Punktfeldern im Raume verbinden, in einer Ebene liegen, die er Mittelebene der beiden Punktfelder nennt; er entwickelt dann eine Reihe von wichtigen Sätzen, in denen diese Mittelebene eine Rolle spielt. Nun kann es aber bei besonderer Lage jener Punktfelder eintreten, dass die Sehnenmitten gar nicht eine Ebene, sondern nur eine gerade Linie erfüllen, oder dass sie sich gar in einem einzigen Punkte vereinigen. In diesen von Chasles nicht hervorgehobenen und auch nicht gut auszuschliessenden Fällen wird die Definition der Mittelebene unbrauchbar; auch ist es nicht möglich, die Chasles'schen Sätze etwa dadurch aufrecht zu erhalten, dass man *jede* Ebene durch die betrachteten Sehnenmitten eine „Mittelebene" nennt.

Um den Gültigkeitsbereich der Chasles'schen Sätze festzustellen, wird man also eine neue Untersuchung ausführen müssen; und das ist um so nothwendiger, als auch die Theorie der allgemeinen Bewegungen theilweise gerade auf jene Ausnahmefälle gegründet wird. Ich sage das natürlich nur, um mein eigenes Beginnen zu rechtfertigen, und nicht etwa um den grossen Geometer zu tadeln, der in jenen wahrhaft

bewundernswürdigen Arbeiten die Theorie der Bewegungen überhaupt erst geschaffen hat, und der bei der Fülle des neuen Stoffes nicht allen Einzelheiten gleiche Aufmerksamkeit zuwenden konnte. Es musste wieder ganz von unten angefangen werden, zumal nur so ein einheitlicher Plan innegehalten werden konnte.

War demnach die Wiederholung mancher bekannter Thatsachen unvermeidlich, so erscheinen sie doch vielfach in neuem Zusammenhang. Auch haben wir uns in anderer Hinsicht beschränkt. Nur solche Dinge sind ausführlicher dargestellt worden, die besonders geeignet schienen, auf gewisse im Mittelpunkte der Theorie stehende Sätze Licht zu werfen. Mehrere Gegenstände, die zur Vollständigkeit des Gesammtbildes nicht fehlen dürfen (metrische Relationen, congruente Ebenenbüschel und Bündel im Raume, die Zerlegung einer Bewegung in zwei Umschraubungen, u. A. m.) sollen später nachgetragen werden.

Abgesehen von der eingehenden Berücksichtigung der Ausnahmefälle mag als neu gegenüber der Chasles'schen Theorie hervorgehoben werden: Die Einführung des Begriffes der *Umschraubung,* als eines mit dem der Drehung gleichwerthigen Begriffs und als eines Hauptbestandtheils der Theorie; überhaupt ein grosser Theil der Eigenschaften der mit $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T u. s. w. bezeichneten Transformationen; die Aufdeckung des eigenthümlichen, nur mittelbar auf das Princip der Dualität zurückzuführenden Parallelismus, der zwischen ganzen Reihen von Sätzen besteht; das bei vielen Sätzen hervortretende, im gegenwärtigen Abschnitt allerdings erst angedeutete Gesetz des Fortschreitens von der Geometrie im Gebiete n^{ter} Stufe zur Geometrie im Gebiete $(n+2)^{\text{ter}}$ Stufe; endlich die ganze Theorie der Umlegungen im dreifach ausgedehnten Raume. —

Im Mittelpunkt unserer Untersuchung steht die Zerspaltung einer Bewegung oder Umlegung in *zwei* solche Transformationen von vorgeschriebenen besonderen Eigenschaften, und das Studium der hierdurch bestimmten geometrischen Verwandtschaften. Dabei kommt es uns weniger auf die Begründung der einzelnen Sätze an, die in mannigfaltiger Weise erfolgen kann und eigentlich nirgends Schwierigkeiten bietet, als auf die Einsicht in den inneren Zusammenhang der verschiedenen speciellen Theorien. Insoweit es sich insbesondere um involutorische Bewegungen und Umlegungen handelt, berührt sich die Arbeit mit den erwähnten Untersuchungen von H. Wiener*). Die Kenntniss der bis jetzt allein ausführlich veröffentlichten Theorie der Bewegungen ist dem Verfasser sehr nützlich gewesen. Wie weit die

*) „*Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen*" und „*Zur Theorie der Umwendungen*", Sächs. Ber. 1890, S. 13 und S. 71.

Uebereinstimmung in der Theorie der Umlegungen geht, darüber bleiben die ferneren Mittheilungen H. Wieners abzuwarten.*)

Besonders hervorheben müssen wir noch, dass die folgenden Ueberlegungen im Grossen und Ganzen einen *elementaren* Charakter haben. Die Hülfsmittel der Alten reichen vollkommen aus, um die wichtigsten Sätze aus der Geometrie der Bewegung zu begründen. Wenn wir gleichwohl häufig Begriffe der Gruppentheorie und der projectiven Geometrie benutzen, so thun wir das nur um der Kürze willen, um nicht bekannte Dinge von Neuem erklären zu müssen. In Wahrheit handelt es sich z. B. auch da, wo von dualistischen Transformationen die Rede ist, meistens nur um Sätze der elementaren Geometrie, deren Beweis den Begriff der Projectivität nicht erfordert. Eine Ausnahme bilden nur wenige Stellen, deren Inhalt für die Auffassung des Ganzen zwar förderlich, aber nicht unbedingt nöthig ist.

Besondere Vorkenntnisse aus der Geometrie der Bewegung werden zum Verständniss des Folgenden für den Geübten nicht erforderlich sein. Doch wird es gut sein, wenn sich der Leser mit der Theorie H. Wieners vertraut gemacht haben wird, insbesondere was deren einfache Begründung anlangt. Bei uns kommen diese Dinge in einem verwickelteren Zusammenhang zur Sprache, und können überhaupt nur ganz kurz behandelt werden.

Die von H. Wiener eingeführte symbolische Bezeichnung $x\{S\}y$ dafür, dass das Gebilde x durch die Operation S in das Gebilde y übergeführt wird, habe ich sehr zweckmässig gefunden; sie wird daher vielfach angewendet werden. Sie hat gegenüber der gewöhnlichen Schreibart $y = Sx$ oder der von Herrn S. Lie angewendeten $(x)S = (y)$ den Vorzug, dass sich mehrere solche Formeln kettenartig aneinanderschliessen lassen, z. B.

$$x\ \{S\}\ y\ \{T\}\ z,$$

woraus folgt:

$$x\ \{S\,T\}\ z. -$$

Es entspricht einem natürlichen Fortschritt des Gedankens, wenn wir einen Unterschied machen zwischen der Geometrie auf der Geraden oder der ebenen Geometrie und den geometrischen Eigenschaften einer Geraden oder Ebene, die im Raume liegt. Im ersten Fall sehen wir die Gerade oder Ebene als ein in sich abgeschlossenes Gebiet an, aus dem herauszutreten wir uns versagen wollen, in demselben Sinne, wie es uns versagt ist, den gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raum zu verlassen. Betrachten wir so der Reihe nach die Geometrie auf der

*) Eine vorläufige Notiz findet man in den Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher vom Jahre 1890. — Der Verfasser hat sich mit demselben Gegenstande seit dem Frühjahr 1890 beschäftigt.

Geraden, in der Ebene, im Raume, oder nach der Ausdrucksweise der Analytiker, die Geometrie im Gebiet zweiter, dritter und vierter Stufe, so haben wir damit den Anfang einer Reihe von Begriffsbildungen, die sich ins Unendliche erstreckt. In jedem der genannten Gebiete, oder allgemein im Gebiet n^{ter} Stufe betrachten wir die Bewegungen und Umlegungen — continuirliche Schaaren von Transformationen, deren jede von $\frac{n(n-1)}{2}$ Parametern abhängt. Die Bewegungen bilden eine Gruppe, und die Bewegungen und Umlegungen zusammen bilden ebenfalls eine Gruppe.

Der Unterscheidung von Bewegungen und Umlegungen entspricht die Unterscheidung von Congruenz und Symmetrie. Es ist aber zu bemerken, dass bei Figuren, die in einem ebenen Gebiet $n-1^{\text{ter}}$ Stufe enthalten sind, ein Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie nicht vorhanden ist: Im dreifach ausgedehnten Raume z. B. kann ein ebenes System mit einem congruenten System ebensowohl durch eine Umlegung wie durch eine Bewegung zur Deckung gebracht werden, und zwar jedesmal auf eine einzige Weise.

Wir betrachten nun der Reihe nach die einfachsten und zugleich für uns wichtigsten Fälle $n = 2, 3, 4$.

§ 1.

Von den Bewegungen und Umlegungen in der geraden Linie.

In der geraden Linie ist jede Bewegung S eine *Schiebung:* Alle Punkte werden in derselben Richtung um eine Strecke von constanter Länge fortgerückt. Die Mitten $\bar{x}$ der Strecken, die von je zwei zugeordneten Punkten x, x' begrenzt werden, erfüllen die ganze Gerade, und bilden eine zu den Punktreihen (x), (x') congruente Punktreihe $(\bar{x})$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_1$ die Transformation, die dem Punkte x den Punkt $\bar{x}$, und mit $\mathfrak{T}_2$ die Transformation, die dem Punkt $\bar{x}$ den Punkt x' zuordnet, so haben wir $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$, $S = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1$; gebrauchen wir für die Transformation $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ noch die dritte Bezeichnung T, so können wir die letzte Gleichung auch so schreiben $S = T^2$.

Die Einführung dieser verschiedenen Bezeichnungen für eine und dieselbe Transformation mag nutzlos scheinen. Sie wird indessen gefordert durch das in den höheren Fällen anzuwendende System von Bezeichnungen; es wird dadurch ein allgemeines Gesetz ausgedrückt, das, hier noch undeutlich und verkümmert, erst später zu vollem Bewusstsein gebracht werden kann.

Die Bewegungen in der geraden Linie bilden eine Gruppe von *vertauschbaren* Transformationen. Das ist eine Besonderheit des Falles $n = 2$, die sich in den höheren Fällen nicht wieder findet.

Die *Umlegungen* in der geraden Linie sind sämmtlich *involutorisch;* auch hierin haben wir eine Eigenthümlichkeit des Falles $n = 2$ zu erblicken.

Bei jeder Umlegung bleibt ein Punkt o in Ruhe; die Umlegung ist durch diesen ihren „Mittelpunkt" völlig bestimmt. Je zwei einander zugeordnete Punkte x, x' sind vom Mittelpunkt o gleichweit entfernt.

Jede Bewegung S kann auf ∞^1 Arten durch die Aufeinanderfolge von zwei Umlegungen $\{o\}$, $\{o'\}$ (Umlegungen mit den Mittelpunkten o, o') ersetzt werden. Der Abstand der Mittelpunkte o, o' ist gleich der halben Schiebungsgrösse, d. h., gleich der Hälfte der Strecke xx', um die irgend ein Punkt x der Geraden von der Bewegung S fortgerückt wird.

Auf Grund dieser Bemerkung gelingt es, zwei oder mehr Bewegungen oder Umlegungen hinter einander auszuführen, d. h., die Bestimmungsstücke (Schiebungsgrösse oder Mittelpunkt) der zusammengesetzten Transformation zu construiren.

§ 2.

Von den Bewegungen in der Ebene.

In der Ebene kann jede Bewegung als eine Drehung um einen im Endlichen oder auch unendlich fern gelegenen Punkt aufgefasst werden.

Die Drehungen um unendlich ferne Punkte, die ∞^2 *Schiebungen* bilden für sich eine Gruppe, eine invariante Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen.

Ausserdem sind von speciellen Bewegungen noch hervorzuheben die involutorischen Bewegungen oder *Umwendungen*, deren ebenfalls ∞^2 vorhanden sind: Drehungen mit einem Drehungswinkel gleich zwei Rechten, oder „Spiegelungen an den Punkten der Ebene".

Die Umwendungen allein bilden keine Gruppe, wohl aber bilden Umwendungen und Schiebungen zusammen wieder eine Gruppe.

Wir betrachten die Sehnen xx', die Verbindungslinien von je zwei durch eine Bewegung S einander zugeordneten Punkten x und x', sowie die Mitte $\bar{x}$ einer solchen Sehne und die in ihr auf der Sehne xx' errichtete Senkrechte $\bar{\bar{u}}$, die „*Normale*" der Sehne.

Die Mitten aller Sehnen xx' erfüllen entweder die ganze Ebene (im allgemeinen Falle) oder sie vereinigen sich alle in einem und demselben Punkt (bei den Umwendungen). Die Normalen bilden die Gesammtheit der Strahlen durch den Drehungsmittelpunkt; jeder solche Strahl ist die gemeinsame Normale von ∞^1 Sehnen xx'.

Zu der Mitte einer Sehne ist in gewissem Sinne analog ihr unendlich ferner Punkt $\bar{\bar{x}}$. Die Punkte $\bar{\bar{x}}$ erfüllen im Allgemeinen die ganze

unendlich ferne Gerade; ausgenommen sind nur die Schiebungen, bei denen die Punkte $\bar{\bar{x}}$ sich natürlich sämmtlich in einem und demselben unendlich fernen Punkte vereinigen.

Wir betrachten ferner die beiden Geraden, die den Winkel von je zwei durch S einander zugeordneten Geraden u, u' halbiren. Sie zeigen ein verschiedenes Verhalten.

Die „*Winkelhalbirende erster Art*" $\bar{u}$ ist dadurch gekennzeichnet, dass die auf u und u' gelegenen einander entsprechenden Punktreihen, auf $\bar{u}$ projicirt, congruente Punktreihen ergeben (im Sinne des § 1). $\bar{u}$ durchläuft das ganze Strahlenfeld der Ebene, wenn man für u, u' alle möglichen Paare entsprechender Strahlen setzt. Ausgenommen sind nur die Umwendungen: Bei ihnen vereinigen sich alle Winkelhalbirenden erster Art in der unendlich fernen Geraden.

Auf der „*Winkelhalbirenden zweiter Art*" $\bar{\bar{u}}$ entstehen umgekehrt symmetrische Projectionen der congruenten Punktreihen u, u'. $\bar{\bar{u}}$ läuft immer durch den Drehungsmittelpunkt hindurch. In ihrer Gesammtheit bilden diese Geraden also im Allgemeinen ein Strahlenbüschel. Ausgenommen sind jedoch die Schiebungen: Bei ihnen vereinigen sich alle Winkelhalbirenden zweiter Art in der unendlich fernen Geraden.

Sehnenmitten und Winkelhalbirende lassen sich in einen einfachen, bis jetzt, wie es scheint, noch nicht beachteten Zusammenhang bringen durch den folgenden Satz:

Mit jeder Bewegung S, die keine Umwendung ist, sind zwei vertauschbare Aehnlichkeitstransformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ verknüpft, die nach einander ausgeführt, die Bewegung erzeugen:

$$\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 = S = \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_1.$$

Sei nämlich x, x' irgend ein Paar zugeordneter Punkte, und u, u' irgend ein Paar zugeordneter Geraden, so dass

$$x\{S\}x', \qquad u\{S\}u',$$

so entspricht den Punkten x und x' die Mitte $\bar{x}$ der Sehne xx' in den Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2^{-1}$; und zugleich entspricht den Geraden u und u' in den Transformationen $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_1^{-1}$ die Winkelhalbirende $\bar{u}$ erster Art des Strahlenpaars u, u'. In Zeichen:

$$x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x', \qquad u\{\mathfrak{T}_2\}\bar{u}\{\mathfrak{T}_1\}u'.$$

Geht die Bewegung S in eine Umwendung über, so artet die Punkttransformation $\mathfrak{T}_1$ aus, und $\mathfrak{T}_2$ wird unbestimmt, als die Entgegengesetzte einer ausgearteten Transformation. Ist S eine Schiebung, so wird $\mathfrak{T}_1$ ebenfalls eine Schiebung und fällt mit $\mathfrak{T}_2$ zusammen.

Jede Bewegung kann auf ∞^2 Arten zerlegt werden in zwei aufeinanderfolgende Drehungen, deren eine eine Umwendung ist. Zerlegt

man S in eine Drehung und eine darauf folgende Umwendung, so entspricht dem Drehungsmittelpunkt der Mittelpunkt der Umwendung in der Transformation $\mathfrak{T}_1$; zerlegt man S in eine Umwendung und eine nachfolgende Drehung, so entspricht dem Drehungsmittelpunkt der Mittelpunkt der Umwendung in der Transformation $\mathfrak{T}_2^{-1}$. Der Winkel der Drehung ist jedesmal derselbe; er ist entgegengesetzt gleich dem Supplement des Drehungswinkels von S. Es kann also insbesondere jede Umwendung auf ∞^2 Arten in die Aufeinanderfolge einer Umwendung und einer Schiebung, und jede Schiebung in die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen zerlegt werden. Umgekehrt ergeben zwei Umwendungen zusammengesetzt keine allgemeine Bewegung, sondern nureine Schiebung; eine Umwendung und eine Schiebung ergeben zusammengesetzt eine neue Umwendung. (Vgl. S. 447 unten).

Jede Bewegung kann auf ∞^1 Arten durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an Geraden g_1, g_2 dargestellt werden. Die Spiegelungsaxen laufen durch den Drehungsmittelpunkt hindurch und schliessen den halben Drehungswinkel ein. Sie kreuzen sich also rechtwinklig, wenn die Bewegung S eine Umwendung ist. Ist S eine Schiebung, so sind g_1 und g_2 parallel und zur Schiebungsrichtung senkrecht; ihr Abstand ist gleich der halben Schiebungsgrösse, gleich der Hälfte der Strecke, um die irgend ein Punkt der Ebene fortrückt.

Auf Grund dieser Sätze ist es leicht, zwei Bewegungen in der Ebene zusammenzusetzen, d. h. Mittelpunkt und Winkel der resultirenden Drehung zu construiren. Eine Sonderstellung nehmen hierbei nur die Schiebungen ein, die man aber ohne Weiteres zusammensetzen kann.

Jede Bewegung gehört einer bestimmten eingliedrigen Gruppe von Bewegungen an, deren Bahncurven die Kreise um den Drehungsmittelpunkt sind. Jede endliche Bewegung wird also, nach der Ausdrucksweise des Herrn S. Lie, von einer bestimmten unendlich kleinen Bewegung „erzeugt".

Ausser dieser eingliedrigen Gruppe von Bewegungen ist durch die Bewegung S noch eine zweigliedrige Gruppe G_2 von vertauschbaren Aehnlichkeitstransformationen bestimmt, zu der ausser S auch die Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gehören: die Gruppe aller der Aehnlichkeitstransformationen (ohne Umlegung der Winkel), bei denen der Drehungsmittelpunkt in Ruhe bleibt. Ordnet man irgend einem Punkt der Ebene einen beliebigen anderen Punkt zu, so ist dadurch eine Transformation von G_2 bestimmt. Entfernt sich der Drehungsmittelpunkt ins Unendliche, so geht unsere Gruppe G_2 in die Gruppe aller Schiebungen über.

§ 3.

Von den Umlegungen in der Ebene.

In der Ebene kann jede Umlegung erzeugt werden durch eine Spiegelung an einer Geraden m und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Schiebung in der Richtung dieser Geraden.

Ausgezeichnet sind unter diesen Transformationen die ∞^2 involutorischen Umlegungen, die reinen *Spiegelungen*, bei denen die anzuwendende Schiebung sich auf die identische Transformation reducirt.

Betrachten wir, wie in § 2, eine Sehne xx', ihre Mitte, die jetzt mit $\bar{\bar{x}}$ bezeichnet werden soll, und ihre Normale $\bar{u}$.*)

Die Sehnenmitten erfüllen immer eine bestimmte Gerade — die Axe m der vorhin genannten Spiegelung, die darum „*Mittelgerade*" der Umlegung genannt werden soll.

Die Normalen der Sehnen bilden entweder die Gesammtheit aller Geraden der Ebene (im allgemeinen Falle), oder sie vereinigen sich alle in einer und derselben Geraden, der Mittelgeraden (dann nämlich, wenn die Umlegung eine Spiegelung ist).

Die unendlich fernen Punkte $\bar{x}$ der Sehnen erfüllen im Allgemeinen die ganze unendlich ferne Gerade; nur wenn die Umlegung eine Spiegelung ist, vereinigen sie sich alle in dem zur Spiegelungsaxe senkrechten unendlich fernen Punkte.

Die Winkelhalbirenden von zwei entsprechenden Geraden u, u' zeigen wieder ein verschiedenes Verhalten. Die „*Winkelhalbirende erster Art*" $\bar{u}$ ist zur Mittelgeraden m parallel; sie fällt mit ihr zusammen, wenn die Umlegung eine Spiegelung ist. Die „*Winkelhalbirende zweiter Art*" $\bar{\bar{u}}$ steht auf der Mittelgeraden senkrecht. Die Geraden $\bar{\bar{u}}$ bilden in ihrer Gesammtheit immer ein Strahlenbüschel.

Wie in § 2 lassen sich die Winkelhalbirenden erster und zweiter Art auch dadurch unterscheiden, dass die Projectionen der auf u und u' gelegenen entsprechenden Punktreihen auf die Winkelhalbirende erster Art u congruent, die Projectionen auf die Winkelhalbirende zweiter Art $\bar{\bar{u}}$ symmetrisch sind im Sinne des § 1.

Mit jeder Umlegung S der Ebene, die keine Spiegelung ist, ist eine dualistische Transformation T verbunden, die zweimal hinter einander ausgeführt, die Umlegung erzeugt:

$$S = T^2.$$

Es entspricht nämlich dem Punkt x die Normale $\bar{u}$ der Sehne xx',

*) Wir bedienen uns also hier eines anderen Systems von Bezeichnungen als in § 2, aus einem Grunde, der später (in § 13) deutlich werden wird.

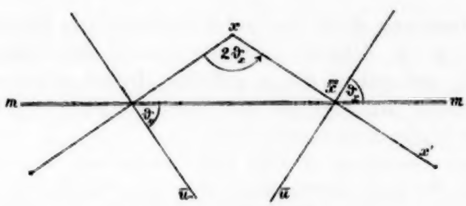
und dieser Geraden wiederum der Punkt x' in einer und derselben dualistischen Transformation T. In Zeichen:

$$x\{T\}\bar{u}\{T\}x', \qquad x\{S\}x'.$$

Die Umlegung kann dargestellt werden durch eine Drehung um den Punkt x und nachherige Spiegelung an der Geraden $\bar{u}$, oder auch durch eine Spiegelung an der Geraden $\bar{u}$ und eine darauffolgende Drehung um den Punkt x'. Die Winkel der anzuwendenden Drehungen sind in beiden Fällen entgegengesetzt gleich. Dabei kann noch entweder der Punkt x, oder die Gerade $\bar{u}$, oder der Punkt x' beliebig angenommen werden. Ist $\bar{u}$ zu der Mittelgeraden m senkrecht, so kommen x und x' auf m zu liegen, und umgekehrt; ist $\bar{u}$ zu der Mittelgeraden parallel, so liegen x und x' unendlich fern, und umgekehrt; fällt $\bar{u}$ mit m zusammen, so fallen x und x' in den senkrecht zu m gelegenen unendlich fernen Punkt, und umgekehrt.

Man kann leicht den Drehungswinkel $2\vartheta_x$ finden, der in der angegebenen Construction einem Punkt x der Ebene zugehört. Sei $\bar{u}_-$ die Gerade, die dem Punkt x in der Transformation T^{-1} entspricht, so kann S durch eine Spiegelung an $\bar{u}_-$ und eine nachfolgende Drehung um x und ebenso durch die Drehung um x und eine nachfolgende Spiegelung an $\bar{u}$ dargestellt werden. Beidemal kommt $\bar{u}_-$ mit $\bar{u}$ zur Deckung. Die Geraden $\bar{u}_-$ und $\bar{u}$ haben also von x gleichen Abstand; sie schliessen den Winkel $2\vartheta_x$ ein.

Der Drehungswinkel $2\vartheta_x$ ist constant für alle Punkte einer Parallelen zur Mittelgeraden m; Punkte die von m auf entgegengesetzten Seiten gleich weit abstehen, haben entgegengesetzt gleiche Drehungswinkel. Man construirt ohne Weiteres die Mittelgerade m und die zugehörige Schiebung, wenn die Umlegung S durch die Aufeinanderfolge einer Drehung und einer Spiegelung oder einer Spiegelung und einer Drehung gegeben ist. (Vgl. die Figur.)

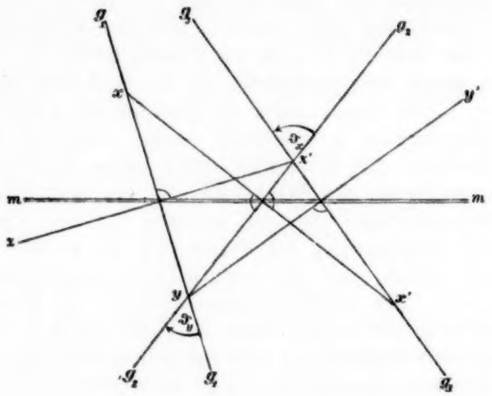


Fällt der Punkt x auf die Mittelgerade m, so wird der Winkel ϑ_x ein Rechter. *Man kann also jede Umlegung auf ∞^1 Arten darstellen durch eine Umwendung und eine darauf folgende Spiegelung, und ebenso durch eine Spiegelung und eine darauf folgende Umwendung.* Der

Abstand des Drehungsmittelpunktes und der Spiegelungsaxe wird, im richtigen Sinne gemessen, beidemal gleich der halben Grösse der Schiebung, die mit der Spiegelung an m zusammen die Umlegung S ergibt. —

Statt eine Umlegung durch eine Drehung und eine Spiegelung zu ersetzen, kann man sie auch, in mehr symmetrischer Weise, darstellen durch *drei aufeinanderfolgende Spiegelungen*, und zwar auf ∞^3 Arten.

Seien g_1, g_2, g_3 drei geeignete Spiegelungsaxen, so entspricht dem Schnittpunkt y von g_1 und g_2 die Gerade g_3, und es entspricht der Geraden g_1 der Schnittpunkt z' von g_2 und g_3 in der dualistischen Transformation T. Ferner geht g_1 durch den Punkt x, der der Geraden g_2 in der Transformation T^{-1} entspricht, und g_3 geht durch den Punkt x', der g_2 in T entspricht. (Vgl. die folgende Figur.)



Ist die Umlegung durch drei aufeinanderfolgende Spiegelungen mit den Axen g_1, g_2, g_3 definirt, so findet man in den Fusspunkten der von y auf g_3 und von z' auf g_1 gefällten Lothe sofort zwei Punkte der Mittelgeraden m; zugleich mit dieser Geraden kennt man dann auch die zugehörige Schiebungsgrösse.

Wenn die Umlegung S eine reine *Spiegelung* ist, treten leichte Abänderungen der angeführten Sätze ein. Der Winkel ϑ_x wird gleich Null, wenn x ausserhalb der Mittelgeraden angenommen wird; er wird unbestimmt, wenn x ein Punkt der Mittelgeraden ist. Stellt man S durch drei Spiegelungen dar, so schneiden sich deren Axen in einem Punkt der Mittelgeraden; die Ersetzung von S durch drei Spiegelungen ist aber nach wie vor auf ∞^3 Arten möglich. —

Auf Grund der angeführten Sätze und Constructionen ist es in allen Fällen leicht, mehrere Umlegungen und Bewegungen *zusammenzusetzen*, d. h. die Bestimmungsstücke der zusammengesetzten Transformation zu construiren. Will man z. B. zwei Umlegungen S_1 und S_2 nach einander ausführen, deren Axen sich in einem im Endlichen gelegenen Punkte x schneiden, so stellt man am einfachsten S_1 durch eine Spiegelung und eine nachfolgende Umwendung um den Punkt x, und S_2 durch dieselbe Umwendung um x und eine nachher auszuführende Spiegelung dar. Das Product $S_1 S_2$ wird dann eine Bewegung, die in einfachster Weise durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen gegeben ist; u. s. w.

Zerlegen wir eine gegebene *Bewegung* S in zwei aufeinanderfolgende Umlegungen, und verlangen wir, dass nur die eine von ihnen insbesondere eine Spiegelung sein soll, so kommen wir zu einer neuen Auffassung der im vorigen Paragraphen betrachteten Aehnlichkeitstransformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$.

Zerlegen wir nämlich S in eine Spiegelung und eine zweite vorhergehende (nachfolgende) Umlegung, so entspricht der Mittelgeraden dieser Umlegung die Spiegelungsaxe in der Transformation $\mathfrak{T}_2^{-1}$ ($\mathfrak{T}_1$).

§ 4.

Congruente Punktreihen und Punktfelder im Raume.

Der Untersuchung der Bewegungen und Umlegungen im Raume schicken wir, nach dem Vorgange von Chasles, Sätze über congruente gerade Punktreihen und congruente ebene Punktfelder voraus, die für beide Theorien gleichmässig von Bedeutung sind.

Seien allgemein x, x' entsprechende Punkte von zwei congruenten oder symmetrisch-gleichen Figuren im Raume, so betrachten wir die *Sehnenmitte* $\bar{x}$, die Mitte der Verbindungslinie xx', und die *„Normalebene“* der Sehne xx', d. i. die Ebene, die senkrecht auf der Sehne xx' in deren Mitte errichtet ist. Wir fragen nach dem Ort der Sehnenmitten und dem Ort der Normalebenen, wenn die entsprechenden Figuren von einander verschiedene congruente, oder was dasselbe ist, symmetrisch-gleiche Punktreihen oder Punktfelder sind.

Stellen wir zunächst zwei *congruente Punktreihen* g, g' zusammen.

Die Mitten $\bar{x}$ der Sehnen xx', die zu zwei congruenten Punktreihen g, g' gehören, erfüllen entweder eine Gerade $\bar{g}$, oder sie vereinigen sich in einem und demselben Punkt.

Man kann die Eigenschaften der Geraden $\bar{g}$ sehr einfach und anschaulich zusammenfassen, wenn man den Begriff der *Umschraubung*

einführt. So nennen wir, (nach dem Muster der Bezeichnung „Umwendung") eine Schraubung, deren Winkel gleich zwei Rechten ist, also die Folge einer Umwendung (Drehung mit dem Winkel $2R$) und einer Schiebung in der Richtung der Umwendungsaxe. Sagen wir nun: „Die Punktreihe g kann mit der congruenten Punktreihe g' durch eine Umschraubung um die Axe $\bar{g}$ zur Deckung gebracht werden", so liegt darin schon, dass $\bar{g}$ den Winkel von g und g' halbirt, dass die Punktreihe $(\bar{x})$ zu den Punktreihen (x) und (x') ähnlich ist, dass die Sehnen xx' auf $\bar{g}$ projicirt, Strecken von gleicher Länge ergeben, und dass endlich alle diese Sehnen auf $\bar{g}$ senkrecht stehen, sobald es *eine* von ihnen thut*). Der letzte Fall tritt nämlich dann ein, wenn sich die Umschraubung auf eine Umwendung reducirt. Wenn zweitens alle Sehnenmitten zusammenfallen, so gibt es ein ganzes Bündel von Geraden durch die Sehnenmitten. Unter diesen ist aber nur ein Büschel von Axen solcher Umschraubungen, die g mit g' zur Deckung bringen; es wird gebildet von *den* Geraden des Bündels, die g und g' rechtwinklig kreuzen. Unter den zugehörigen Umschraubungen ist im Allgemeinen nur *eine* Umwendung, und nur, wenn die Träger der Punktreihen g und g' zusammenfallen, sind alle jene Umschraubungen insbesondere Umwendungen.

Die Normalebenen der Sehnen xx', die zu zwei congruenten Punktreihen g, g' gehören, bilden entweder ein Ebenenbüschel $\bar{\bar{h}}$, oder sie vereinigen sich in einer und derselben Ebene. **)

Im ersten Falle kann g mit g' durch eine bestimmte Drehung um die im Endlichen oder Unendlichen gelegene Axe $\bar{\bar{h}}$ zur Deckung gebracht werden; jede Ebene des Büschels $\bar{\bar{h}}$ ist Normalebene *einer* Sehne xx'. (Das Büschel $\bar{\bar{h}}$ ist zu den Punktreihen g, g' projectiv.) Schneidet eine der Sehnen xx' die Axe $\bar{\bar{h}}$, so thun es alle: die Drehung ist dann eine Umwendung. Wenn zweitens alle Normalebenen zusammenfallen, so gibt es ein ganzes Strahlenfeld von Geraden, deren jede auf allen Normalebenen liegt. Unter diesen Geraden ist aber nur ein Büschel von Axen solcher Drehungen, die g mit g' zur Deckung bringen; sie laufen durch den Schnittpunkt von g und g' hindurch. Unter diesen Drehungen ist im Allgemeinen nur eine Umwendung; nur wenn die Träger von g und g' zusammenfallen, so dass die con-

*) Einen einfachen Beweis findet man bei Schönflies, Geometrie der Bewegung (Leipzig 1886) S. 81.

**) Einen einfachen Beweis hat Möbius gegeben (Ges. Werke, Bd. I, S. 548 u. 549).

Zu den beiden letzten Sätzen vergleiche man noch die in § 5 (S. 469 unten) gemachten Bemerkungen.

gruenten Punktreihen auf einer und derselben Geraden involutorisch liegen, dann ist jede solche Drehung eine Umwendung. —

Betrachten wir ferner zwei congruente Punktfelder ω, ω', die irgendwie im Raume liegen, so haben wir entsprechende Sätze:

Die Mitten $\bar{x}$ der Sehnen xx', die zu zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehören, erfüllen entweder eine Ebene m, oder eine Gerade n, oder sie vereinigen sich in einem und demselben Punkt o.

Betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall. Dann sind die Projectionen von ω und ω' auf m congruent. ω kann mit ω' zur Deckung gebracht werden: Erstens durch eine Spiegelung an der Ebene m und eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um eine zu m senkrechte Axe s; zweitens durch eine Drehung um die Schnittlinie (ω, m) und eine darauffolgende Drehung um s; drittens durch dieselbe Drehung um s und eine darauf folgende Drehung um die Schnittlinie (m, ω').

Darin liegt schon, dass das Punktfeld $(\bar{x})$ auf die Punktfelder (x) und (x') affin bezogen ist, dass seine Ebene m mit den Ebenen ω und ω' gleiche Winkel bildet, dass die Geraden (ω, m) und (m, ω') entsprechende Gerade von ω und ω' sind und dass endlich auch die Schnittpunkte (ω, s) und (ω', s) einander entsprechen. Die Gerade s ist im Allgemeinen eine völlig bestimmte, im Endlichen oder auch unendlich fern gelegene Gerade; nur wenn ω schon durch die Spiegelung an m in ω' übergeht, kann jede zu m senkrechte Gerade als eine Drehungsaxe s angesehen werden. Schliessen wir diesen Fall aus, so ist das Punktepaar (ω, s), (ω', s) das einzige Paar entsprechender Punkte von ω, ω', dessen Sehne auf der Ebene senkrecht steht. Die Strahlen des Büschels (m, s) in der Ebene m sind dadurch ausgezeichnet, dass jeder von ihnen auf den zugehörigen Sehnen senkrecht steht.

Wenden wir uns nun zu dem zweiten Fall.

Wenn die zu ω, ω' gehörigen Sehnenmitten $\bar{x}$ eine Gerade n erfüllen, so ist diese Gerade die Axe einer Umschraubung, von der ω mit ω' zur Deckung gebracht wird.

In einer beliebigen durch n gelegten Ebene ist n die einzige Axe einer Umschraubung, die eine (und folglich jede) Punktreihe von ω mit der entsprechenden Punktreihe von ω' zur Deckung bringt; die Projectionen entsprechender Figuren von ω und ω' auf eine solche Ebene sind symmetrisch gleich. Unter den Ebenen durch die Axe n befindet sich aber eine ausgezeichnete Ebene m, die Ebene nämlich, die auf ω und ω' senkrecht steht. In *dieser* Ebene ist jede nicht zu n parallele Gerade die Axe einer halben Umschraubung, die eine gewisse Punktreihe g von ω mit der entsprechenden Punktreihe g' von

ω' zur Deckung bringt; entsprechende Figuren von ω und ω' haben in dieser Ebene Projectionen, die nicht nur symmetrische, sondern zugleich auch congruente sind. Ferner bestimmt m mit ω und ω' zusammen zwei symmetrisch-gleiche räumliche Systeme. Die Ebene m erfreut sich überhaupt ganz ähnlicher Eigenschaften, wie die im allgemeinen Falle ebenso bezeichnete Ebene; man hat nur zu beachten, dass die Axe s jetzt zu ω und ω' parallel ist und dass die zu den Geraden (ω, m) und (m, ω') gehörigen Drehungen Umwendungen werden.

Im dritten Fall endlich, wo ω und ω' durch eine *„Spiegelung an dem Punkt o"* in einander übergehen, mögen wir irgend eine durch o gelegte Ebene mit m bezeichnen: Jetzt sind die Projectionen zweier entsprechender Figuren von ω und ω' auf jede solche Ebene o congruent; jede von ihnen bestimmt mit ω und ω' zusammen zwei symmetrisch-gleiche räumliche Systeme. Jede Gerade durch o ist die Axe einer Umschraubung, die eine Punktreihe von ω mit der entsprechenden Punktreihe von ω' zur Deckung bringt. ω kann mit ω' durch eine Spiegelung an der Ebene m und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Umwendung um die zu m senkrechte Axe s des Punktes o zur Deckung gebracht werden. Unter den Geraden des Punktes o ist eine ausgezeichnete, die zu ω und ω' senkrechte Gerade n. Sie ist die Axe einer Umschraubung, die ω in ω' überführt. In einer durch sie hindurchgelegten Ebene sind die Projectionen entsprechender Figuren von ω und ω' nicht allein congruent, sondern zugleich auch symmetrisch. —

Die Normalebenen der Sehnen, die zu zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehören, bilden entweder ein Ebenenbündel o, oder ein Ebenenbüschel n, oder sie vereinigen sich in einer und derselben Ebene m.

Im allgemeinen Falle zunächst ist der Punkt o kein anderer als der schon besprochene Schnittpunkt (m, s). Er hat gegen ω und ω' eine solche Lage, dass er einmal mit ω und das andere Mal mit ω' zusammengenommen zwei symmetrisch-gleiche räumliche Systeme bestimmt. Jede Ebene des Punktes o ist Normalebene einer Sehne xx'; jede Gerade $\overline{\overline{h}}$ des Punktes o ist Axe einer Drehung, die eine bestimmte Punktreihe g von ω mit der entsprechenden Punktreihe g' von ω' zur Deckung bringt. Die Punktfelder ω, ω' und m sind so auf das Ebenenbündel o dualistisch bezogen. —

Wenn die zu den Punktepaaren von ω, ω' gehörigen Normalebenen ein Ebenenbüschel n bilden, so kann ω durch eine Drehung um die Axe n mit ω' zur Deckung gebracht werden.

Nimmt man auf n einen beliebigen Punkt an, so wird n die einzige durch diesen Punkt gehende Axe einer Drehung, die eine (und folglich jede) Punktreihe g von ω mit der entsprechenden Punktreihe g' von ω' zur Deckung bringt; der angenommene Punkt bestimmt, einmal mit ω und einmal mit ω' zusammengenommen, zwei congruente räumliche Systeme. Unter den Punkten der Axe n befindet sich aber ein ausgezeichneter Punkt o, der nämlich, in dem n von den Ebenen ω, ω' getroffen wird. Dieser Punkt bildet mit entsprechenden Punkten von ω und ω' zusammen Figuren, die nicht nur congruent, sondern zugleich auch symmetrisch sind. Jede Gerade durch diesen Punkt ist die Axe einer Drehung, die eine gewisse Punktreihe g von ω mit der entsprechenden Punktreihe g' von ω' zur Deckung bringt.

Wenn endlich drittens die Normalebenen der Sehnen von ω und ω' sich in einer einzigen Ebene m vereinigen, wenn also ω und ω' durch eine Spiegelung an der Ebene m in einander übergehen, so mag irgend ein auf m angenommener Punkt mit o bezeichnet werden. Jeder solche Punkt bestimmt mit ω und ω' zusammen zwei symmetrisch-gleiche räumliche Systeme; jede Gerade der Ebene m ist die Axe einer Drehung, die eine Punktreihe von ω mit der entsprechenden Punktreihe von ω' zur Deckung bringt. Unter den Geraden der Ebene m ist eine ausgezeichnete, die Schnittlinie n von ω und ω'. Sie ist die Axe einer Drehung, die ω in ω' überführt. Jeder ihrer Punkte bildet mit entsprechenden Punkten von ω und ω' zusammen Figuren, die nicht allein symmetrisch, sondern zugleich auch congruent sind. —

Die aufgestellten Sätze ermöglichen uns nun die folgenden Begriffsbildungen:

Wir nennen Mittelstrahl der congruenten Punktreihen g, g' die Axe jeder Umschraubung, die g mit g' zur Deckung bringt.

Wir nennen Normalenaxe der congruenten Punktreihen g, g' die Axe jeder Drehung, die g mit g' zur Deckung bringt.

Von diesen Gebilden gelten die Sätze:

Zwei congruente Punktreihen g, g' haben im Allgemeinen nur einen Mittelstrahl; wenn aber g und g' durch eine Spiegelung an einem Punkt in einander übergehen, so gibt es ein diesem Punkte angehöriges Büschel von Mittelstrahlen.

Zwei congruente Punktreihen haben im Allgemeinen nur eine Normalenaxe; wenn aber g und g' durch eine Spiegelung an einer Ebene in einander übergehen, so gibt es ein dieser Ebene angehöriges Büschel von Normalenaxen.

Besonders hervorzuheben ist der Fall, dass ein Mittelstrahl zugleich Normalenaxe ist. g kommt dann mit g' durch eine *Umwendung*

um diese Axe zur Deckung. Wenn die Träger von g und g' zusammenfallen, die Punktreihen selbst aber entgegengesetzte Richtungen haben, so treten die beiden genannten Ausnahmefälle gleichzeitig ein; g kann dann durch ∞^1 Umwendungen in g' übergeführt werden, deren Axen ein zu g, g' normales Strahlenbüschel bilden.

Betrachten wir entsprechende Punktreihen von zwei congruenten Punktfeldern, so ergibt sich:

Zu den entsprechenden Punktreihen von zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehören immer ∞^2 Mittelstrahlen.

Diese liegen im Allgemeinen in einer Ebene; wenn aber ω und ω' durch eine Spiegelung an einem Punkt in einander übergehen, so bilden sie das durch diesen Punkt bestimmte Strahlenbündel.

Zu den entsprechenden Punktreihen von zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehören immer ∞^2 Normalenaxen.

Diese erfüllen im Allgemeinen ein Strahlenbündel; wenn aber ω und ω' durch eine Spiegelung an einer Ebene in einander übergehen, so bilden sie das zu dieser Ebene gehörige Strahlenfeld.

Wir wollen ferner auch für die oben mit m bezeichneten Ebenen und für die mit o bezeichneten Punkte besondere Benennungen einführen:

Wir nennen Mittelebene der congruenten Punktfelder ω, ω' die Ebene eines jeden Strahlenbüschels, das von zugehörigen Mittelstrahlen gebildet wird.

Wir nennen Centralpunkt der congruenten Punktfelder ω, ω' den Punkt eines jeden Strahlenbüschels, das von zugehörigen Normalenaxen gebildet wird.

Nun können wir weiter aussagen:

Zu zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehört im Allgemeinen nur eine einzige Mittelebene. Nur wenn ω und ω' durch eine Spiegelung an einem Punkt in einander übergehen, gibt es ihrer unendlich viele: Dann nämlich ist jede Ebene dieses Punktes eine Mittelebene von ω und ω'.

Zu zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehört im Allgemeinen nur ein einziger Centralpunkt. Nur wenn ω und ω' durch eine Spiegelung an einer Ebene in einander übergehen, gibt es ihrer unendlich viele: Dann nämlich ist jeder Punkt dieser Ebene ein Centralpunkt von ω und ω'.

Da die beiden genannten Ausnahmen nicht gleichzeitig auftreten können, so hat man *drei* Möglichkeiten: Entweder es gibt eine Mittelebene und einen Centralpunkt; oder es gibt eine Mittelebene und ∞^2 Centralpunkte; oder endlich es gibt ∞^2 Mittelebenen und einen Centralpunkt. Für alle drei Fälle gilt der Satz:

Jede Mittelebene der congruenten Punktfelder ω, ω' *liegt mit jedem Centralpunkt vereinigt.*

Wegen späterer Anwendungen heben wir aus dem über Mittelebene m und Centralpunkt o Gesagten noch das Folgende heraus:

„Das Punktfeld ω kann mit dem congruenten Punktfeld ω' *immer* durch eine Spiegelung an der Ebene m und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um eine Axe s zur Deckung gebracht werden, die auf der Ebene m im Punkte o senkrecht steht.“

„Wenn der Centralpunkt o im Endlichen liegt, so kann das Punktfeld ω mit dem congruenten Punktfeld ω' durch eine Spiegelung an dem Punkt o und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um eine durch o gehende Axe zur Deckung gebracht werden.“

In der Mehrzahl der hier angegebenen Sätze tritt ein eigenthümlicher *Parallelismus* hervor, dem wir auch fernerhin mehrfach begegnen werden; Mittelpunkt und Normale einer Sehne, Umschraubung und Drehung, Spiegelung an einem Punkt und Spiegelung an einer Ebene erscheinen als stellvertretende Begriffe. Dieser Parallelismus ist aber nicht vollständig, wie die beiden letzten einander gegenübergestellten Sätze zeigen.

Dem Grund der genannten merkwürdigen Erscheinung können wir hier nicht nachgehen. Er liegt in dem dualistischen Charakter der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie, und in der Natur des Grenzübergangs, durch den man von dieser verallgemeinerten Geometrie aus zur gewöhnlichen Geometrie herabsteigt. —

Neben die hier durchgeführte Untersuchung der Mitten der Sehnen xx', die zu zwei congruenten Punktreihen g, g' oder Punktfeldern ω, ω' gehören, stellt sich eine entsprechende Untersuchung der unendlich fernen Punkte der Sehnen. Dieser Gegenstand soll kürzer behandelt werden, da wir fernerhin nicht nöthig haben werden, auf ihn zurückzugreifen.

Die unendlich fernen Punkte der zu zwei congruenten Punktreihen g, g' *gehörigen Sehnen* xx' *erfüllen entweder eine unendlich ferne Gerade* $\bar{\bar{g}}$, *oder sie vereinigen sich in einem und demselben Punkt.*

Die Gerade $\bar{\bar{g}}$ ist die zu der oben genannten Normalenaxe $\bar{\bar{h}}$ senkrechte unendlich ferne Gerade. In dem Ausnahmefall, in dem die Sehnen xx' alle zu einander parallel sind, haben wir zwei, oder, wenn man so will, drei Möglichkeiten. Entweder kann g mit g' durch eine Schiebung zur Deckung gebracht werden, oder durch eine Spiegelung an einer Ebene, oder endlich, es sind beide Arten der Ueberführung neben einander möglich.

Die unendlich fernen Punkte der zu zwei congruenten Punktfeldern ω, ω' gehörigen Sehnen xx' erfüllen entweder die ganze unendlich ferne Ebene, oder eine unendlich ferne Gerade, oder endlich, sie vereinigen sich in einem und demselben Punkt.

Der zweite Fall, in dem die Sehnen xx' alle zu einer Ebene ε parallel sind, kann auf zwei wesentlich verschiedene und als gleich allgemein anzusehende Arten zu Stande kommen.*)

a) Die Projectionen von ω und ω' auf die Ebene ε sind congruent (congruente Punktfelder).

ω kann mit ω' zur Deckung gebracht werden durch eine Drehung um eine zu ε senkrechte Axe, die ω und ω' in einem beiden Punktfeldern entsprechend gemeinsamen Punkt o trifft.

ω kann ferner mit ω' zur Deckung gebracht werden durch eine Spiegelung an einer gewissen Ebene des Punktes o, und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um die auf dieser Ebene im Punkte o errichtete Senkrechte.

b) Die Projectionen von ω und ω' auf die Ebene ε sind symmetrisch (spiegelbildlich-gleiche Punktfelder).

ω kann mit ω' zur Deckung gebracht werden durch eine Schraubung, deren Axe zur Schnittlinie von ω und ω' parallel ist, und folglich ω und ω' in einem beiden Punktfeldern entsprechend gemeinsamen unendlich fernen Punkt trifft.

ω kann mit ω' ferner zur Deckung gebracht werden durch eine Spiegelung an einer zu ε senkrechten Ebene m und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Schiebung in der Richtung der Schnittlinie von m und ε.

Aus den Eigenschaften der beiden Fälle a) und b) nimmt Theil der Fall

c) Die Ebenen ω und ω' stehen auf der Ebene ε senkrecht. —

Wenn endlich die Sehnen xx' alle zu einander parallel sind, so hat man wiederum zwei, bez. drei Möglichkeiten. Entweder, ω geht in ω' durch eine Schiebung über, oder durch eine Spiegelung an einer Ebene durch die Schnittlinie (ω, ω'), oder endlich, man kann ω auf jede der beiden genannten Arten mit ω' zur Deckung bringen. —

Man zählt leicht die Constanten ab, von denen zwei congruente Punktreihen oder Punktfelder abhängen, die sich in einer der im gegenwärtigen Paragraphen untersuchten besonderen Lagen befinden.

*) S. Möbius, Ges. Werke, Bd. I, S. 550 u. ff., wo indessen die Untersuchung nicht so weit durchgeführt wird, wie hier.

§ 5.

Die Bewegungen im Raume.

Im Raume ist jede Bewegung eine Schraubung: Sie kann zusammengesetzt werden aus einer Drehung um eine gewisse Axe n und aus einer vorhergehenden oder nachfolgenden Schiebung in der Richtung dieser Axe. Der Winkel der Drehung ist bereits gelegentlich *Schraubungswinkel* genannt worden. Er werde mit 2ϑ bezeichnet. Die Länge der Strecke, um die irgend ein Punkt der Schraubenaxe fortrückt, nennen wir *Schraubungshöhe;* wir bezeichnen sie mit 2η. Beide Grössen betrachten wir nicht als absolute Zahlen, sondern als positiver und negativer Werthe fähig, wobei über das Vorzeichen durch Richtung und Drehungssinn der Axe n entschieden wird. Die Richtung einer Geraden n kann beliebig gewählt werden; dann aber soll der positive Drehungssinn etwa der sein, den die Bewegung des Uhrzeigers für einen Beobachter angibt, der nach dem in positiver Richtung unendlich entfernten Punkt der Geraden hinblickt.

Unter den ∞^6 Bewegungen des Raumes haben wir die folgenden auszuzeichnen:

Die ∞^5 *Umschraubungen*, Schraubungen mit dem Schraubungswinkel $2\vartheta = 2R$. Es sind das die Bewegungen, von denen die unendlich fernen Punkte involutorisch unter einander vertauscht werden. Eine Umschraubung ergibt, zweimal hinter einander ausgeführt, eine Schiebung in der Richtung der Schraubenaxe, um eine Strecke gleich der doppelten Schraubungshöhe.

Die ∞^5 *Drehungen*, Bewegungen, deren Schraubungshöhe gleich Null ist.

Drehungen und Umschraubungen haben das gemeinsam, dass bei beiden ∞^1 Punkte und ∞^1 Ebenen in Ruhe bleiben: Bei den Drehungen die sämmtlichen Punkte der Schraubenaxe und alle zu dieser Geraden senkrechten Ebenen; bei den Umschraubungen alle Ebenen der Schraubenaxe, und die zu ihnen senkrechten unendlich fernen Punkte.

Die ∞^4 *Umwendungen*, Bewegungen, die zugleich Drehungen und Umschraubungen sind. Sie bilden die Gesammtheit aller involutorischen Bewegungen; sie können passend auch „Spiegelungen an den Geraden des Raumes“ genannt werden.

Endlich *die* ∞^3 *Schiebungen:* Bewegungen, bei denen sämmtliche unendlich fernen Punkte (alle Richtungen) einzeln in Ruhe bleiben. Wir betrachten eine Schiebung in der Regel als einen Grenzfall einer Drehung, und sprechen in diesem Sinne von einer bestimmten *Axe* der Schiebung; wir meinen damit die zur Schiebungsrichtung senkrechte unendlich ferne Gerade. Eine Schiebung kann aber auch als Grenzfall einer Schraubung angesehen werden, deren Schraubungs-

winkel verschwindet; bei dieser Auffassung wird als Axe der Schiebung irgend eine zur Schiebungsrichtung parallele Gerade zu bezeichnen sein. Die Schiebungen bilden für sich eine dreigliedrige Gruppe von vertauschbaren Transformationen, eine invariante Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen. Die einzelne Schiebung ist bestimmt, wenn man einem gegebenen Punkt des Raumes einen beliebigen anderen zuordnet. —

Der an die Spitze gestellte fundamentale Satz, dass jede Bewegung eine Schraubung ist, ergibt sich in der einfachsten Weise auf dem von H. Wiener gewiesenen Wege, indem man die Bewegungen durch zwei auf einander folgende Umwendungen ausdrückt. Andrerseits aber ist eben diese Darstellung einer Bewegung durch Umwendungen ein besonderer Fall von mehreren (im Ganzen vier verschiedenen) bemerkenswerthen allgemeineren Darstellungsarten einer Bewegung durch besondere Bewegungen. Wir führen hier, im Anschluss an die Entwickelungen des vorigen Paragraphen einen Theil der hierauf bezüglichen Sätze, der für sich ein abgeschlossenes Ganzes bildet, der Uebersichtlichkeit halber zunächst ohne Beweis an. Die Beweise (soweit solche nach den Darlegungen des § 4 überhaupt noch erforderlich sind) sollen dann zusammen mit mehreren Einzelheiten, deren sofortige Angabe hier nur störend wirken würde, ihren Platz im nächsten Paragraphen finden. —

Wir betrachten zuerst wieder Mitte $\bar{x}$ und Normalebene $\bar{\bar{u}}$ einer Sehne xx', zugleich auch Mittelstrahl und Normalenaxe von zwei entsprechenden Punktreihen g, g', Mittelebene und Centralpunkt von zwei entsprechenden Punktfeldern ω, ω'. Dabei achten wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, immer nur auf solche Gebilde, die mit den ihnen durch die Bewegung S zugeordneten Gebilden nicht zusammenfallen.

Die Sehnenmitten erfüllen im Allgemeinen den ganzen Punktraum. Nur dann, wenn die Bewegung eine Umschraubung ist, liegen sie alle auf einer Geraden, der Umschraubungsaxe.

Die Normalebenen der Sehnen erfüllen im Allgemeinen den ganzen Ebenenraum. Nur dann, wenn die Bewegung eine Drehung ist, gehen sie alle durch eine Gerade, die Drehungsaxe.

Genau entsprechend lauten die folgenden Sätze:

Die Mittelstrahlen erfüllen im Allgemeinen den ganzen Linienraum. Nur dann, wenn die Bewegung eine Umschraubung ist, treffen sie alle eine Gerade, die Umschraubungsaxe.

Die Normalenaxen erfüllen im Allgemeinen den ganzen Linienraum. Nur dann, wenn die Bewegung eine Drehung ist, treffen sie alle eine Gerade, die Drehungsaxe.

Ein drittes Paar von Sätzen aber, das sich auf Mittelebene und Centralpunkt von zwei congruenten Punktfeldern bezieht, lautet nicht ganz analog, und kann nicht eben so einfach ausgedrückt werden. Wir überlassen es dem Leser, sich aus dem Folgenden eine geeignete Formulirung zu entnehmen. —

Neben den Sehnenmitten betrachten wir kurz die unendlich fernen Punkte der Sehnen, dann die beiden Ebenen, die den Winkel von zwei entsprechenden Ebenen u, u' halbiren.

Die unendlich fernen Punkte $\bar{\bar{x}}$ der Sehnen xx' erfüllen im Allgemeinen die ganze unendlich ferne Ebene. Ausgenommen sind nur die Drehungen, und unter diesen wieder die Schiebungen. Bei einer allgemeinen Drehung liegen die Punkte $\bar{\bar{x}}$ in der zur Drehungsaxe senkrechten unendlich fernen Geraden, bei einer Schiebung aber vereinigen sie sich alle in dem unendlich fernen Punkt der Schiebungsrichtung.

Die beiden Winkelhalbirenden eines Ebenenpaars u, u' zeigen ein verschiedenes Verhalten.

Die Projectionen der in den Ebenen u und u' gelegenen auf einander bezogenen ebenen Systeme in der „*Winkelhalbirenden erster Art*“ $\bar{u}$ bilden flächengleiche gleichstimmig-affine, die in der „*Winkelhalbirenden zweiter Art*“ $\bar{\bar{u}}$ ebenfalls flächengleiche, aber ungleichstimmig-affine ebene Systeme. D. h., projicirt man etwa zwei entsprechende Kreise von u und u' auf die Ebene $\bar{u}$, so erhält man flächengleiche, affin auf einander bezogene Ellipsen von demselben Drehungssinn, projicirt man sie dagegen auf die Ebene $\bar{\bar{u}}$, so entstehen ebensolche Ellipsen mit entgegengesetztem Drehungssinn.

Die Winkelhalbirende erster Art durchläuft im Allgemeinen den ganzen Ebenenraum, wenn man das Ebenenpaar u, u' alle möglichen Lagen einnehmen lässt. Ausgenommen sind nur die Umschraubungen: Bei ihnen stehen die Ebenen $\bar{u}$ alle auf der Schraubenaxe senkrecht; sie bilden also nur ein Büschel von (parallelen) Ebenen.

Die Winkelhalbirende zweiter Art ist zur Schraubenaxe parallel. Die Gesammtheit dieser Ebenen bildet also im Allgemeinen ein Ebenenbündel. Ist aber die Bewegung eine Drehung, so bilden die Ebenen $\bar{\bar{u}}$ nur ein Büschel: sie gehen alle durch die Drehungsaxe. Geht die Bewegung insbesondere in eine Schiebung über, so fallen sämmtliche Ebenen $\bar{\bar{u}}$ mit der unendlich fernen Ebene zusammen.

Zwischen den Sehnenmitten und den Winkelhalbirenden erster Art wird nun, ähnlich wie in der Geometrie der Ebene (§ 2) ein einfacher Zusammenhang hergestellt durch den folgenden Satz:

Mit jeder Bewegung S, die keine Umschraubung ist, sind zwei vertauschbare affine Transformationen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ verknüpft, die hinter einander ausgeführt, die Bewegung S erzeugen:

$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = S = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1.$$

Sei nämlich x, x' irgend ein Paar zugeordneter Punkte, und u, u' irgend ein Paar zugeordneter Ebenen, so dass

$$x\{S\}\,x', \quad u\{S\}\,u',$$

so entspricht den Punkten x und x' die Mitte $\bar{x}$ der Sehne xx' in den Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2^{-1}$; und zugleich entspricht den Ebenen u und u' in den Transformationen $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_1^{-1}$ die Winkelhalbirende erster Art $\bar{u}$ von u und u'. In Zeichen:

$$x\{\mathfrak{T}_1\}\,\bar{x}\,\{\mathfrak{T}_2\}\,x', \quad u\{\mathfrak{T}_2\}\,\bar{u}\,\{\mathfrak{T}_1\}\,u'.\text{*)}$$

Wenn aber S in eine Umschraubung übergeht, so arten die mit $\mathfrak{T}_1$ und mit $\mathfrak{T}_2^{-1}$ bezeichneten Punkttransformationen aus; die Transformation $\mathfrak{T}_2$ also wird unbestimmt, als die Entgegengesetzte einer ausgearteten Transformation; ebenso arten $\mathfrak{T}_2$ und $\mathfrak{T}_1^{-1}$, als Ebenentransformationen aufgefasst, aus, und die Ebenentransformation $\mathfrak{T}_1$ wird unbestimmt. Die Bewegung S kann jetzt nicht mehr in der genannten Weise erzeugt werden.

Ein dem letzten Satze ganz ähnliches Theorem schliesst sich an die obigen Sätze (S. 462) rechter Hand an:

Mit jeder Bewegung S, die keine Drehung ist, ist eine dualistische Transformation T verknüpft, die zweimal hinter einander angewendet, die Bewegung S erzeugt:

$$S = T^2.$$

Sei nämlich wieder x, x' irgend ein Paar entsprechender Punkte, so ist dem Punkt x die Normalebene $\bar{\bar{u}}$ der Sehne xx', und dieser Ebene wiederum der Punkt x' in einer und derselben dualistischen Transformation T zugeordnet. In Zeichen:

$$x\{T\}\,\bar{\bar{u}}\,\{T\}\,x'.\text{*)}$$

Zugleich entspricht natürlich den Geraden g und g' irgend eines Strahlenpaars die zugehörige Normalenaxe, und den Ebenen ω, ω' irgend eines Paars zugeordneter Ebenen der zugehörige Centralpunkt in den Transformationen T und T^{-1}.

Wenn die Bewegung S in eine Drehung übergeht, so arten die Transformationen T und T^{-1} aus, und die im Satze genannte Darstellung der Bewegung S wird unbrauchbar.

Ausser den Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T, T^{-1} haben wir noch eine weitere bemerkenswerthe dualistische Transformation zu verzeichnen, eine involutorische Transformation:

---

*) Die Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ kommen wohl zuerst bei Chasles vor (Bull. de Férussac, Sect. I, t. 14, 1831), dann bei Rodrigues (1840). Beide Autoren kennen aber nur die in der Formel links dargestellte Eigenschaft. Die Transformation T hat Chasles zuerst betrachtet (1843), ohne doch die — allerdings naheliegende — in der Gleichung $S = T^2$ ausgesprochene Eigenschaft hervorzuheben. Wir legen auf diese Sätze besonderes Gewicht, weil sie gerade den Zusammenhang mit der Theorie der quadratischen Formen vermitteln.

Mit jeder Bewegung S, die weder eine Umschraubung, noch eine Drehung ist, ist die dualistische Transformation $\mathfrak{W}$ eines Nullsystems verknüpft, dessen Hauptaxe die Axe der Schraubung S ist.

In dieser Transformation entsprechen einander wechselweise: Mittelpunkt und Normalebene einer Sehne xx', Mittelstrahl und Normalenaxe zweier zugeordneter Punktreihen g, g', Mittelebene und Centralpunkt zweier zugeordneter Punktfelder ω, ω'.

Eine besonders wichtige Rolle spielt der mit unserem Nullsystem verknüpfte lineare Complex, der Ort aller Geraden also, die durch eine Sehnenmitte $\bar{x}$ hindurchgehen und in der zugehörigen Normalebene $\bar{\bar{u}}$ liegen. Er soll deshalb auch einen besonderen Namen erhalten: Wir wollen ihn den „Mittelcomplex“ der Bewegung S nennen. Wir mögen seine charakteristische Eigenschaft auf dreierlei Arten aussprechen:

Der Mittelcomplex ist der Ort aller Mittelstrahlen, die auf den zugehörigen Sehnen senkrecht stehen.

Der Mittelcomplex ist der Ort aller Normalenaxen, die von den zugehörigen Sehnen geschnitten werden.

Der Mittelcomplex ist der Ort aller Geraden, die gleichzeitig Mittelstrahl und Normalenaxe für dasselbe Paar zugeordneter Punktreihen g, g' sind.

Diese Definition hängt nicht davon ab, ob das Nullsystem $\mathfrak{W}$ eine umkehrbare dualistische Transformation ist oder nicht. Artet $\mathfrak{W}$ aus, so gilt dasselbe von dem Mittelcomplex: Er reducirt sich in jedem der beiden angegebenen Fälle auf die Gesammtheit aller Geraden, die die Schraubenaxe der Bewegung S treffen. Bei einer Schiebung insbesondere besteht der Mittelcomplex aus allen Geraden senkrecht zur Schiebungsrichtung. Es mag gestattet sein, da, wo kein Missverständniss möglich ist, den Mittelcomplex durch dasselbe Zeichen $\mathfrak{W}$ darzustellen, wie das mit ihm verknüpfte Nullsystem.

Die angeführten Sätze stehen im engsten Zusammenhang mit der Darstellung der Bewegung S durch gewisse besondere Bewegungen; wir gelangen durch deren Betrachtung nicht allein zu einer vertieften Auffassung, sondern zugleich auch zu einer wesentlichen Erweiterung der bis jetzt gewonnenen Erkenntnisse.

Jede Bewegung S kann auf ∞^4 Arten erzeugt werden durch eine Drehung und eine nachfolgende Umschraubung. Der Drehungsaxe ist die Umschraubungsaxe in der affinen Transformation $\mathfrak{T}_1$ zugeordnet.

Jede Bewegung S kann auf ∞^4 Arten erzeugt werden durch eine Umschraubung und eine nachfolgende Drehung. Der Drehungsaxe ist die Umschraubungsaxe in der affinen Transformation $\mathfrak{T}_2^{-1}$ zugeordnet.

Es genügt, dem Satze links eine ausführliche Erläuterung hinzuzufügen.

Wenn die Bewegung S nicht selbst eine Umschraubung ist, so kann man nach Belieben entweder die Drehungsaxe g oder die Umschraubungsaxe $\bar{g}$ (den Mittelstrahl von g, g') willkürlich annehmen; dadurch sind dann Drehung und Umschraubung bestimmt. Nur die unendlich fernen Geraden können weder als Axen von Drehungen, noch auch natürlich als Umschraubungsaxen vorkommen.

Wenn aber S eine Umschraubung ist, so treten folgende Besonderheiten ein.

Nimmt man als Drehungsaxe g eine im Endlichen gelegene Gerade, die die Schraubenaxe n von S nicht rechtwinklig kreuzt, so reducirt sich die zugehörige Drehung auf die identische Transformation, $\bar{g}$ fällt mit n, und die zugehörige Umschraubung mit S zusammen. Ist aber g senkrecht zu n, so wird die zugehörige Drehung völlig unbestimmt; die Axen $\bar{g}$ der den Drehungen um g entsprechenden Umschraubungen bilden ein Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt auf n liegt und dessen Ebene zu g senkrecht ist. Ferner kann als Drehungsaxe g jetzt auch jede unendlich ferne Gerade auftreten. Die zugehörige Schiebung wird unbestimmt; die den einzelnen Schiebungen zugehörigen Umschraubungsaxen $\bar{g}$ bilden ein Büschel von Parallelstrahlen, zu denen die Axe n gehört, und deren Ebene zu den g enthaltenden Ebenen senkrecht ist. Wenn aber insbesondere g selbst zu n rechtwinklig ist, so fallen die Axen $\bar{g}$ alle mit n zusammen.

Umgekehrt kann man die Axe $\bar{g}$ der Umschraubung nur noch unter *den* Geraden willkürlich wählen, die die Axe n treffen. Die zugehörige Umschraubung wird in allen Fällen unbestimmt. Schliessen n und $\bar{g}$ einen endlichen Winkel ein, so bilden alle zugehörigen Drehungsaxen g ein Büschel von Parallelstrahlen, die auf n und $\bar{g}$ senkrecht stehen. Sind n und $\bar{g}$ parallel, aber nicht identisch, so werden die zugehörigen Drehungen Schiebungen, deren Richtung der Ebene $(\bar{g}, n)$ angehört; fällt endlich $\bar{g}$ mit n zusammen, so ist g entweder die zu n senkrechte unendlich ferne Gerade, und die zugehörige Drehung ist eine Schiebung in der Richtung von n; oder g ist eine beliebige Gerade des Raumes, und gehört zur identischen Transformation. —

Dem letzten Doppelsatze stellt sich das folgende Theorem an die Seite:

Jede Bewegung S kann auf ∞^4 Arten erzeugt werden durch zwei aufeinanderfolgende Drehungen. Der Axe der ersten Drehung entspricht die Axe der zweiten Drehung in der dualistischen Transformation T.

Im Allgemeinen kann man irgend eine der beiden Drehungsaxen im Endlichen oder auch unendlich fern beliebig annehmen; dadurch sind dann beide Drehungen bestimmt. Eine Ausnahme hiervon bildet nur der Fall, in dem S selbst eine Drehung ist. Nimmt man hier für die eine der in Rede stehenden Drehungsaxen eine Gerade, die die Axe n von S nicht trifft (wenn S eine Schiebung ist, eine Gerade, die zur Schiebungsrichtung nicht senkrecht ist), so reducirt sich die zugehörige Drehung auf die identische Transformation, und die andere Drehung fällt mit S selbst zusammen. Wenn aber die eine Drehungsaxe die Gerade n trifft, so wird die zugehörige Drehung unbestimmt; die Axe der anderen Drehung gehört dann einem bestimmten Strahlenbüschel an, das auch die Gerade n selbst enthält. Wenn endlich die angenommene Drehungsaxe mit S zusammenfällt, so hat man als zugehörige Drehung entweder eine von S verschiedene Drehung anzunehmen — dann fällt die zweite Drehungsaxe ebenfalls mit n zusammen — oder die zu der gegebenen Axe gehörige Drehung ist S selbst — dann wird die Axe der anderen Drehung völlig unbestimmt. —

Von den hier besprochenen Darstellungen einer Bewegung durch specielle Bewegungen gelangen wir nun zu nicht minder bemerkenswerthen Darstellungen von noch speciellerem Charakter, wenn wir verlangen dass zunächst eine unserer besonderen Bewegungen sich auf eine Umwendung reducirt."

Vorausschicken mögen wir eine Bemerkung, die sich auf ganz beliebige Gruppen von solchen Operationen bezieht, die sich paarweise als entgegengesetzte zusammenordnen lassen. „Sind S_1 und S_2 irgend zwei Operationen einer derartigen Gruppe, so sind die Producte $S_1 S_2$ und $S_2 S_1$ innerhalb der Gruppe gleichberechtigt" oder anders ausgedrückt:

„Ist $S = S_a \cdot S_b$, so kann man auch setzen $S = S_b' \cdot S_a$ und $S = S_b \cdot S_a'$, wobei S_a und S_a', S_b und S_b' innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind.

Wir zeichnen nur besondere Fälle dieses unmittelbar einleuchtenden allgemeinen Satzes aus, wenn wir die folgenden Thatsachen hervorheben:

„Wenn eine Umschraubung zusammen mit einer vorhergehenden (nachfolgenden) Drehung die Bewegung S erzeugt, so erzeugt dieselbe Umschraubung die Bewegung S auch zusammen mit einer nachfolgenden (vorhergehenden) Drehung.

Der Drehungswinkel ist beidemal derselbe."

„Wenn eine Drehung zusammen mit einer vorhergehenden (nachfolgenden) Umschraubung die Bewegung S erzeugt, so erzeugt dieselbe Drehung die Bewegung S auch zusammen mit einer nachfolgenden (vorhergehenden) Umschraubung.

Die Schraubungshöhe ist beidemal dieselbe."

„Wenn eine Drehung zusammen mit einer anderen vorhergehenden (nachfolgenden) Drehung die Bewegung S erzeugt, so erzeugt dieselbe Drehung die Bewegung auch zusammen mit einer nachfolgenden (vorhergehenden) Drehung, die denselben Drehungswinkel hat, wie jene.“

Diese im Grunde selbstverständlichen Bemerkungen enthalten die Erklärung dafür, dass in den folgenden Sätzen das mit $\mathfrak{W}_1$ zu bezeichnende Gebilde auf mehrere verschiedene Arten hervorgebracht wird.

Jede Bewegung S kann noch auf ∞^3 Arten erzeugt werden durch eine Drehung und eine darauffolgende Umwendung.

Jede Bewegung S kann noch auf ∞^3 Arten erzeugt werden durch eine Umwendung und eine darauf folgende Drehung.

Der Ort der Umwendungsaxen ist der Mittelcomplex $\mathfrak{W}$. Der Ort der Drehungsaxen ist im Allgemeinen ebenfalls ein linearer Complex $\mathfrak{W}_1$, dessen Hauptaxe wiederum die Schraubenaxe von S ist.

Zu diesem Satze kommen wir auf zwei verschiedenen Wegen: Einmal, indem wir von der Darstellung einer Bewegung durch eine Drehung und eine Umschraubung ausgehen, durch die Forderung, dass die Umschraubung sich auf eine Umwendung reduciren soll; zweitens von der Darstellung der Bewegung durch zwei Drehungen her, indem wir verlangen, dass die eine Drehung eine Umwendung wird. Wir haben demnach die folgenden besonderen Fälle zu unterscheiden:

1) Wenn die Bewegung S eine Umschraubung, nicht aber zugleich eine Drehung ist, so reducirt sich der Mittelcomplex $\mathfrak{W}$, wie gesagt, auf die Schraubungsaxe n; die Strahlen des Complexes $\mathfrak{W}_1$ aber sind die zu n senkrechten Geraden des Raumes, die Geraden also, die die zu n rechtwinklige unendlich ferne Gerade treffen.

2) Wenn die Bewegung S eine Drehung, nicht aber zugleich eine Umschraubung ist, so bestehen beide Complexe $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}_1$ aus den Geraden, die die Drehungsaxe n treffen. Ist S speciell eine Schiebung, so hat man noch die Besonderheit, dass jede Drehung, die zusammen mit einer Umwendung die Bewegung S ergibt, selbst eine Umwendung wird.

3) Wenn die Bewegung S eine Umwendung ist, also Umschraubung und Drehung zugleich, so erleidet der letzte Theil unseres Satzes eine *Ausnahme.* Die etwa linker Hand links genannte Drehung reducirt sich nämlich entweder auf die identische Transformation — dann ist ihre Axe eine ganz unbestimmte Gerade des Raumes — oder sie ist eine eigentliche Drehung — dann trifft ihre Axe die Umwendungsaxe n rechtwinklig. Die Drehungsaxen, zu denen ein endlicher Drehungswinkel gehört,

bilden also jetzt keinen Complex mehr, sondern nur noch ein Strahlensystem 1. O. 1. Cl. —

Indem wir die Frage nach dem Ausdruck einer Bewegung durch eine Umwendung und eine Umschraubung übergehen, steigen wir sogleich noch eine Stufe in der Allgemeinheit unserer Darstellungsweise herab, indem wir verlangen, dass die im letzten Satze vorkommenden Drehungen sich ebenfalls auf Umwendungen reduciren sollen. Da ergibt sich denn:

Jede Bewegung S, die keine Schiebung ist, kann auf ∞^2 Arten erzeugt werden durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen.

Ort der Umwendungsaxen ist ein Strahlensystem 1. O., 1. Cl., *der Durchschnitt der Complexe $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}_1$, nämlich das Normalensystem der Axe der Schraubung S.*

Je zwei zusammengehörige Umwendungsaxen schliessen den halben Schraubungswinkel ϑ ein und schneiden auf der Schraubenaxe $\mathfrak{n}$ von S die halbe Schraubungshöhe η ab.

Wenn aber die Bewegung S eine Schiebung ist, so werden, wie bemerkt, die Drehungen des letzten Satzes von selbst Umwendungen; wir erhalten daher hinsichtlich der Schiebungen einen anderen Satz:

Jede Schiebung kann auf ∞^3 Arten durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen dargestellt werden.

Ort der Umwendungsaxen ist der durch die unendlich ferne Drehungsaxe bestimmte lineare Complex.

Je zwei zusammengehörige Umwendungsaxen laufen parallel neben einander her. Ihr Abstand ist, nach Richtung und absolutem Werth, die halbe Schiebungsgrösse.

Auf die letzten Sätze gründet sich die wichtige, von Halphen und Burnside aufgefundene Construction für die Zusammensetzung mehrerer Bewegungen.

Der Weg auf dem wir zu dieser Theorie kommen, ist weder so kurz, noch so bequem wie der, auf dem H. Wiener zu ihr gelangt ist; unsere Betrachtungsweise würde sich also nicht empfehlen, wenn es sich nur um die Zusammensetzung der Bewegungen handelte. Indessen sind die allgemeineren Eigenschaften einer Bewegung, von denen wir ausgegangen sind, von nicht geringerem Interesse, als die Darstellung durch Umwendungen.

Uebrigens lässt sich, wie beiläufig bemerkt werden mag, ein Zusammenhang zwischen beiden Theorien noch in anderer Weise herstellen. Man kann nämlich die in § 4 an die Spitze gestellten Sätze, die Grundlage unserer weiteren Entwickelungen, sehr leicht mit Hülfe von Umwendungen beweisen. Man könnte also, wenn die Chrono-

logie nicht im Wege stände, die Chasles'sche Theorie auch als eine Weiterbildung der Theorie der Umwendungen auffassen. —

In den hier zusammengestellten Sätzen waren es vor Allem die Umschraubungen und die Drehungen, dann in zweiter Reihe die Umwendungen und Schiebungen, die die Ausnahmefälle bezeichneten. Es verdient angemerkt zu werden, dass diese speciellen Transformationen noch in anderer Beziehung eine Sonderstellung einnehmen, die vorzüglich bei einer umfassenden analytischen Behandlung des Gegenstandes hervortritt. Ohne auf die leicht zu erörternden geometrischen Einzelheiten näher einzugehen, wollen wir noch das Folgende hervorheben:

Die durch die Formel

$$x\{S\}x'\{S\}x''\{S\}x''' \cdots$$

definirte Reihe von Punkten $x, x', x'', x''', \ldots$ *liegt bei einer allgemeinen Bewegung S nicht in einer Ebene, und ebenso wenig geht die Reihe der Ebenen* $u, u', u'', u''', \ldots,$ *die durch die Formel*

$$u\{S\}u'\{S\}u''\{S\}u''' \ldots$$

definirt wird, durch einen und denselben Punkt.

Nur wenn S eine Drehung oder eine Umschraubung ist, liegen die Punkte x, x', x'', x''', *in einer Ebene, und nur in diesen Fällen gehen die Ebenen* $u, u', u'', u''', \ldots$ *alle durch einen Punkt.*

Und nur dann, wenn S eine Umwendung oder eine Schiebung ist, liegen die genannten Punkte alle in einer Geraden, und nur dann gehören die genannten Ebenen alle demselben Büschel an.

Vorausgesetzt ist natürlich eine hinreichend allgemeine Wahl des ersten Punktes x und der ersten Ebene u.

§ 6.

Fortsetzung: Der allgemeine Fall einer Bewegung im Raume.

Wir haben im vorigen Paragraphen eine Reihe der wichtigsten Sätze über die Bewegungen im Raume zusammengestellt, mit vollständiger Berücksichtigung der Ausnahmefälle. Nunmehr wollen wir den inneren Zusammenhang dieser Sätze und verschiedene daran sich anschliessende Betrachtungen darlegen; dabei wollen wir uns aber auf den allgemeinen Fall beschränken, um nicht zu sehr in Weitläufigkeiten zu gerathen. *Wir setzen also hier ausdrücklich voraus, dass die Bewegung S weder eine Drehung, noch eine Umschraubung ist.*

Man überzeugt sich sofort davon, dass bei dieser Annahme die Sehnenmitten thatsächlich den ganzen Punktraum, und die Normalebenen der Sehnen ebenso den ganzen Ebenenraum erfüllen, und dass eben die Umschraubungen und Drehungen die Ausnahmefälle bilden.

Betrachten wir nun drei Punkte x, x', x'', die in der Beziehung

(1) $$x\{S\}x'\{S\}x''$$

stehen, ferner die Mitten $\bar{x}$ und $\bar{x}'$ der Sehnen xx' und $x'x''$, und die Normalebenen $\bar{\bar{u}}$ und $\bar{\bar{u}}'$ dieser Sehnen, so haben wir zugleich

(2) $$\bar{x}\{S\}\bar{x}' \quad \text{und} \quad \bar{\bar{u}}\{S\}\bar{\bar{u}}'.$$

Nunmehr können wir zwei affine Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ durch die Formel $x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x'$, und eine dualistische Transformation T durch die Formel $x\{T\}\bar{\bar{u}}$ definiren. Wir finden dann sofort

(3) $$x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x'\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}'\{\mathfrak{T}_2\}x'',$$

(4) $$x\{T\}\bar{\bar{u}}\{T\}x'\{T\}\bar{\bar{u}}'\{T\}x'',$$

woraus sich die Formeln $S = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1 = T^2$ ergeben. Da $\bar{x}$ und $\bar{\bar{u}}$ immer vereinigt liegen, so wird durch die Zuordnung $\bar{x}\{\mathfrak{W}\}\bar{\bar{u}}$ ein Nullsystem $\mathfrak{W}$ definirt; man hat also

(5) $$\bar{x}\{\mathfrak{W}\}\bar{\bar{u}}\{\mathfrak{W}\}\bar{x};$$

zugleich ergibt sich der bemerkenswerthe Satz:

Die beiden affinen Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ lassen sich aus den dualistischen Transformationen T und $\mathfrak{W}$ zusammensetzen:

(6) $$\mathfrak{T}_1 = T\mathfrak{W}, \quad \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{W}T.$$

Die dualistischen Transformationen T und $\mathfrak{W}$ erzeugen, in unbegrenzter Wiederholung hinter einander angewendet, eine Gruppe von unendlich vielen discreten collinearen (insbesondere affinen) und dualistischen Transformationen, deren Zusammensetzung durch die beiden symbolischen Gleichungen ausgedrückt wird

(7) $$\mathfrak{W}^2 = 1, \quad T^2\mathfrak{W} = \mathfrak{W}T^2.$$

Wir erweitern nun unsere Figur dadurch, dass wir ein Paar entsprechender Punktreihen g, g' hinzufügen, die bez. die Punkte x und x' enthalten sollen. Dann geht der Mittelstrahl $\bar{g}$ von g und g' durch die Sehnenmitte $\bar{x}$, und die Normalenaxe $\bar{\bar{h}}$ liegt in der Normalebene $\bar{\bar{u}}$. Es gelten die weiteren Formeln:

(8) $$g\{\mathfrak{T}_1\}\bar{g}\{\mathfrak{T}_2\}g', \quad g\{T\}\bar{\bar{h}}\{T\}g',$$
$$\bar{g}\{\mathfrak{W}\}\bar{\bar{h}}\{\mathfrak{W}\}\bar{g}.$$

Die Punktreihe g kann, nach den Sätzen des § 4, mit g' sowohl durch eine Umschraubung um die Axe $\bar{g}$, als auch durch eine Drehung um die Axe $\bar{\bar{h}}$ zur Deckung gebracht werden. Die Bewegung S kann also erzeugt werden: Erstens durch eine gewisse Drehung um die Axe g, und eine darauf folgende Umschraubung um die Axe $\bar{g}$;

zweitens durch die nämliche Umschraubung um $\bar{g}$ und eine darauf folgende Drehung um g'; drittens durch eine Drehung um die Axe g, und eine darauf folgende Drehung um $\bar{\bar{h}}$; endlich durch die Drehung um $\bar{\bar{h}}$ und eine darauf folgende Drehung um g'.

Da irgend eine der vier Geraden $g, g', \bar{g}, \bar{\bar{h}}$ als eine ganz beliebige Gerade des Raumes angesehen werden kann, und da durch deren Wahl jede einzelne der besprochenen Zerlegungen von S völlig bestimmt ist, so können alle diese Zerlegungen auf ∞^4 Arten ausgeführt werden.

Wir erhalten nun eine Zerlegung von S in Bewegungen specielleren Charakters, wenn wir zunächst verlangen, dass entweder die Umschraubung um die Axe $\bar{g}$ oder die Drehung um die Axe $\bar{\bar{h}}$ sich auf eine Umwendung reducirt. Beidemal folgt, dass $\bar{g}$ mit $\bar{\bar{h}}$ zusammenfallen muss, dass diese Gerade durch den Punkt $\bar{x}$ geht und in der Ebene $\bar{\bar{u}}$ liegt, oder dass sie ein Leitstrahl des Nullsystems $\mathfrak{W}$, ein Strahl des Mittelcomplexes ist. Der Ort der zugehörigen Drehungsaxen g und g' ist dann natürlich ebenfalls ein linearer Complex $\mathfrak{W}_1$. Wir können daher einen im vorigen Paragraphen (S. 468) ausgesprochenen Satz wie folgt vervollständigen:

Durch die vier Transformationen $\mathfrak{T}_1^{-1}$, $\mathfrak{T}_2$, T^{-1}, T geht aus dem Nullsystem $\mathfrak{W}$ ein und dasselbe neue Nullsystem $\mathfrak{W}_1$ hervor.

Die Leitstrahlen von $\mathfrak{W}_1$ sind die Axen aller der Drehungen, die mit einer vorhergehenden oder nachfolgenden Umwendung zusammen die Bewegung S erzeugen.

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{T}_1 \mathfrak{W} \mathfrak{T}_1^{-1} = T \mathfrak{W} T^{-1}, \\ \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{T}_2^{-1} \mathfrak{W} \mathfrak{T}_2 = T^{-1} \mathfrak{W} T, \end{cases} \qquad (\mathfrak{W}_1^2 = 1).$$

Bezeichnen wir mit v und v' die beiden Ebenen der Punkte x und x', die aus der Normale $\bar{\bar{u}}$ der Sehne xx' durch die Transformationen $\mathfrak{T}_1^{-1}$ und $\mathfrak{T}_2$ hervorgehen*), so gehen diese selben Ebenen aus der Sehnenmitte $\bar{x}$ durch die Transformationen T^{-1} und T hervor. Wir können also zu den Formeln (3) und (4) jetzt die folgenden fügen:

$$(10)\qquad v\{\mathfrak{T}_1\}\bar{\bar{u}}\{\mathfrak{T}_2\}v'\{\mathfrak{T}_1\}\bar{\bar{u}}'\{\mathfrak{T}_2\}v'',$$

$$(11)\qquad v\{T\}\bar{x}\{T\}v'\{T\}\bar{x}'\{T\}v''.$$

Die Ebene v' ist also die Normale der Sehne $\bar{x}\bar{x}'$, während $\bar{\bar{u}}$ und $\bar{\bar{u}}'$ auf den beiden anderen Seiten $\bar{x}x'$ und $x'\bar{x}'$ des gleichschenkligen Dreiecks $\bar{x}x'\bar{x}'$ in den Endpunkten $\bar{x}$ und $\bar{x}'$ senkrecht stehen. Hieraus

*) Wir haben in § 5 für die Normale der Sehne xx' die Bezeichnung $\bar{\bar{u}}$ und nicht die im gegenwärtigen Zusammenhang näherliegende Bezeichnung $\bar{\bar{v}}$ gebraucht, aus einem Grunde, der später von selbst einleuchten wird.

aber folgt ein im vorigen Paragraphen hervorgehobener wichtiger Satz: Die Ebene v' ist eine der beiden Ebenen, die den Winkel von $\bar{\bar{u}}$ und $\bar{\bar{u}}'$ halbiren. [Vgl. den Nachtrag auf S. 565].

Die Punkte x, x', x'' sind die Nullpunkte der Ebenen v, v', v'' in dem Nullsystem $\mathfrak{W}_1$. Wir erweitern nun unsere Figur wiederum, indem wir die Nullpunkte p, p', p'' derselben Ebenen in Bezug auf das Nullsystem $\mathfrak{W}$ hinzufügen. Dann ist z. B. p' der Fusspunkt des von $\bar{x}$ oder $\bar{x}'$ auf v' gefällten Lothes, und zugleich die Mitte der Sehne $\bar{x}\,\bar{x}'$. Wir haben also die Formeln

$$(12)\qquad \begin{cases} x\,\{\mathfrak{W}_1\}\,v \quad \text{u. s. f.}, \qquad p\,\{\mathfrak{W}\}\,v \quad \text{u. s. f.}, \\ p\,\{\mathfrak{T}_2\}\,\bar{x}\,\{\mathfrak{T}_1\}\,p'\,\{\mathfrak{T}_2\}\,\bar{x}'\,\{\mathfrak{T}_1\}\,p'', \\ p\,\{\mathfrak{T}_1\}\,\bar{p}\,\{\mathfrak{T}_2\}\,p'\,\{\mathfrak{T}_1\}\,\bar{p}'\,\{\mathfrak{T}_2\}\,p''. \end{cases}$$

Man entnimmt daraus die erste Hälfte des Satzes:

Das Nullsystem $\mathfrak{W}$ wird durch die beiden Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2^{-1}$ in ein und dasselbe neue Nullsystem $\mathfrak{W}_2$ übergeführt, dessen Hauptaxe wiederum die Axe der Schraubung S ist.

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{T}_1^{-1}\mathfrak{W}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{W}T\mathfrak{W}T^{-1}\mathfrak{W} \\ \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{W}\mathfrak{T}_2^{-1} = \mathfrak{W}T^{-1}\mathfrak{W}T\mathfrak{W} \end{cases} \quad (\mathfrak{W}_2^{\,2} = 1).$$

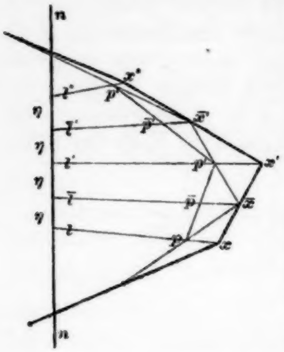
In dem Nullsystem $\mathfrak{W}_2$ entsprechen sich nämlich die Ebene $\bar{\bar{u}}$ und der Punkt $\bar{p}$. Indem wir die zweite Hälfte des Satzes, deren Richtigkeit alsbald von selbst einleuchten wird, übergehen, bemerken wir noch:

Die Nullsysteme $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ werden durch die dualistische Transformation des Nullsystems $\mathfrak{W}$ unter einander vertauscht. In Zeichen:

$$(14)\qquad \mathfrak{W}\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_2\mathfrak{W}, \qquad \mathfrak{W}_1\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\mathfrak{W}_2.$$

Betrachten wir nun unter allen Strahlen des Büschels (x, v), also unter allen durch x gehenden oder in v liegenden Leitstrahlen des Complexes $\mathfrak{W}_1$ insbesondere *die* Gerade l, die zugleich ein Leitstrahl des Complexes $\mathfrak{W}$ ist, d. h., die Verbindungslinie der Punkte x und p — und nennen wir entsprechend $\bar{l}$ und l' die Verbindungslinien $\bar{x}\bar{p}$ und $x'p'$, so kommen wir zur Darstellung von S durch zwei auf einander folgende Umwendungen: Einmal kann S erzeugt werden durch die Umwendung um l und eine darauf folgende Umwendung um $\bar{l}$, das andere Mal durch die Umwendung um $\bar{l}$ und eine nachfolgende Umwendung um l'. Hieraus folgt, dass l, $\bar{l}$, l' von einer und derselben Geraden n, der Schraubenaxe von S, in gleichen Ab-

ständen η senkrecht getroffen werden, dass l' und $\bar{l}$ ebenso wie $\bar{l}$ und l' den halben Schraubungswinkel ϑ einschliessen, u. s. w. Zugleich erhält man den Satz, dass die linearen Strahlencomplexe $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ sich in einem und demselben Strahlensystem 1. Ord. 1. Cl. durchdringen, nämlich in dem Normalensystem der Schraubenaxe n, die demnach die gemeinsame Hauptaxe der drei Nullsysteme $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ ist. — Auf die sich hier natürlich anschliessenden metrischen Eigenschaften der Transformationen T, $\mathfrak{W}$ u. s. f., sowie der zugehörigen Drehungen und Umschraubungen gehen wir für jetzt nicht ein. Wir werden im nächsten Paragraphen nur von *einem* bekannten einfachen Satz dieser Art Gebrauch zu machen haben, den man etwa in Herrn Reye's Geometrie der Lage (2. Abtheilung, 10. Vortrag) nachlesen mag.



§ 7.

Gruppen von collinearen und dualistischen Transformationen, die mit einer Bewegung im Raume verknüpft sind.

Wir gelangen zu einem tiefer dringenden Verständniss der in § 5 und § 6 entwickelten Theorie, wenn wir, statt wie bisher eine einzelne Bewegung S ins Auge zu fassen, die Gesammtheit aller der Bewegungen untersuchen, denen dieselbe Schraubenaxe zukommt. Dabei bietet sich von selbst die Betrachtung gewisser allgemeinerer Transformationen dar, die ebenfalls durch die gegebene Schraubenaxe bestimmt sind.

Wir beschränken uns zunächst auf den allgemeinen Fall, nehmen also an, dass die Schraubenaxe im Endlichen liegt.

Alle Schraubungen um eine im Endlichen gelegene Axe n bilden eine zweigliedrige continuirliche Gruppe G_2 von vertauschbaren Transformationen.

Ebenso einleuchtend ist der Satz:

Durch die Axe n ist eine eingliedrige continuirliche Gruppe G_1 von affinen Transformationen bestimmt, nämlich die Gruppe aller der affinen Transformationen, die das Normalensystem der Axe n in Ruhe lassen.

Man erhält die allgemeine Transformation von G_1, wenn man irgend einem Punkt x des Raumes einen anderen x^* derart zuordnet,

dass die Verbindungslinie xx^* die Schraubenaxe n in einem Punkte o senkrecht trifft, und dass das Verhältniss $ox : ox^*$ einen von der Lage von x unabhängigen positiven oder negativen Werth λ hat.

Die Gruppen G_1 und G_2 durchdringen sich, ausser in der identischen Transformation, nur in der Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Axe n.

Die Transformationen von G_1 und G_2 erzeugen zusammengesetzt eine dreigliedrige einfach-transitive Gruppe G_3 von vertauschbaren affinen Transformationen, die das Normalensystem der Axe n ebenso transformiren, wie die Schraubungen der Gruppe G_2.

Man kann irgend einem im Endlichen und nicht auf der Axe n gelegenen Punkt des Raumes einen anderen Punkt von gleicher Eigenschaft beliebig zuordnen; dadurch ist die allgemeinste Transformation $\mathfrak{t}$ von G_3 bestimmt, und zwar eindeutig. Sie lässt sich offenbar in die Form setzen

$$\mathfrak{t} = B\mathfrak{r} = \mathfrak{r}B, \tag{1}$$

sofern B eine Transformation von G_2 und $\mathfrak{r}$ eine Transformation von G_1 bedeutet, und zwar ist dies noch auf zwei verschiedene Arten möglich; ist die eine durch (1) dargestellt, so ist $\mathfrak{t} = (B\mathfrak{U})(\mathfrak{U}\mathfrak{r})$ die andere Zerlegung von $\mathfrak{t}$ in eine Transformation von G_2 und eine Transformation von G_1.

Durch die Gerade n ist eine Schaar H_1 von ∞^1 Nullsystemen $\mathfrak{w}$ bestimmt: Die Gesammtheit aller der Nullsysteme, die die Axe n zur Hauptaxe haben.

Diese ∞^1 dualistischen Transformationen $\mathfrak{w}$ bilden mit den Transformationen von G_1 zusammen eine Gruppe.

Der erste Theil der Behauptung folgt aus den im vorigen Paragraphen erwähnten metrischen Eigenschaften des durch eine Bewegung S von G_2 bestimmten Nullsystems $\mathfrak{W}$. Um die zweite Hälfte des Satzes zu beweisen, nennen wir wieder $\mathfrak{r}$ irgend eine Transformation von G_1. Dann ist $\mathfrak{W}\mathfrak{r}$ eine dualistische Transformation, die jedem Punkt eine durch ihn hindurchgehende Ebene zuordnet, also wieder ein Nullsystem; wie man sofort sieht, ein Nullsystem der Schaar H_1:

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{W}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{W}. \tag{2}$$

Zugleich ergibt sich eine bemerkenswerthe Eigenschaft unserer Gruppe G_1, H_1: Jede Transformation von G_1 wird durch alle Transformationen von H_1 mit ihrer entgegengesetzten vertauscht; in Zeichen

$$\mathfrak{r}\mathfrak{w} = \mathfrak{w}\mathfrak{r}^{-1}, \qquad \mathfrak{w}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{w}. \tag{3}$$

Besondere Beachtung verdient der Fall $\mathfrak{r} = \mathfrak{U}$: Durch die Umwendung $\mathfrak{U}$ werden die Nullsysteme $\mathfrak{w}$ der Schaar H_1 zu Paaren geordnet, so dass immer zwei zusammengehörige sogenannte conjugirte Nullsysteme (Nullsysteme in involutorischer Lage) sind; zwei solche Nullsysteme bestimmen mit $\mathfrak{U}$ zusammen eine Gruppe von drei vertausch-

baren involutorischen Transformationen, indem immer zwei dieser Transformationen, hinter einander ausgeführt, die dritte ergeben.

Da das Nullsystem $\mathfrak{W}$ und die Transformationen $\mathfrak{r}$ von allen Schraubungen mit der Axe n in sich selbst übergeführt werden, so folgt:

Setzt man irgend eine Transformation $\mathfrak{w}$ *der Schaar* H_1 *mit sämmtlichen Transformationen der Gruppe* G_2 *zusammen, so entsteht eine Schaar* H_2 *von* ∞^2 *dualistischen Transformationen. Die Schaaren* G_2 *und* H_2 *bilden wiederum eine Gruppe, und zwar eine Gruppe von vertauschbaren Transformationen.*

In der That nennen wir S und B irgend zwei Schraubungen um die Axe n, so folgt sofort

$$S \cdot B\mathfrak{W}\mathfrak{r} = SB \cdot \mathfrak{W}\mathfrak{r} = B\mathfrak{W}\mathfrak{r} \cdot S,$$
$$S\mathfrak{W}\mathfrak{r} \cdot B\mathfrak{W}\mathfrak{r} = SB = B\mathfrak{W}\mathfrak{r} \cdot S\mathfrak{W}\mathfrak{r}.$$

Schaaren H_2 giebt es ∞^1, entsprechend den ∞^1 Nullsystemen $\mathfrak{w} = \mathfrak{W}\mathfrak{r}$. Fassen wir alle diese Schaaren zusammen, so finden wir:

Setzt man alle Transformationen der Schaar H_1 *mit sämmtlichen Transformationen der Gruppe* G_2, *oder irgend eine Transformation* $\mathfrak{w}$ *von* H_1 *mit sämmtlichen Transformationen der Gruppe* G_3 *zusammen, so entsteht eine Schaar* H_3 *von* ∞^3 *dualistischen Transformationen* t. *Diese bilden mit den Transformationen von* G_3 *zusammen eine Gruppe.*

Die allgemeine Transformation der Schaar H_3 lautet

$$t = B\mathfrak{w} = \mathfrak{w}B. \tag{4}$$

Wir sehen nun zu, wie sich die Transformationen der Gruppe G_3, H_3 gegenüber den Transformationen dieser Gruppe selbst verhalten. Zunächst mögen wir, unter Anwendung der von Herrn S. Lie gebrauchten Bezeichnungen, einen theilweise schon hervorgehobenen Satz wie folgt vervollständigen:

Die Gruppe G_2 *der Schraubungen um die Axe* n *ist eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe* G_3, H_3. *Ausserdem sind die Gruppe* G_1, *die Gruppe* G_1, H_1, *und natürlich auch die Gruppe* G_3 *selbst invariante Untergruppen.*

Unterwerfen wir also die Transformationen der Schaar H_3 den Transformationen von G_2, so bleiben sie in Ruhe. Unterwerfen wir sie den Transformationen von G_1, so werden sie durch eine eingliedrige Gruppe unter einander vertauscht; und ganz in derselben Weise werden sie unter einander vertauscht, wenn wir sie den Transformationen von G_3 unterwerfen. Die Transformationen von H_3 werden ferner durch eine eingliedrige (nicht continuirliche) Gruppe unter einander vertauscht, wenn wir sie den Transformationen der erweiterten Gruppe

G_1, H_1 unterwerfen; und genau ebenso werden sie durch die Transformationen von G_3, H_3 selbst unter einander vertauscht.

Die Transformationen der Schaar H_3 sind im Allgemeinen nicht vertauschbar; nur die Transformationen einer jeden Schaar H_2 sind unter sich vertauschbar. Diese Schaaren H_2 werden durch die Transformationen von G_1 und ebenso durch die Transformationen von G_3 unter einander vertauscht; sie werden ferner durch die Transformationen von G_1, H_1 und ebenso durch die Transformationen von G_3, H_3 unter einander vertauscht.

Die ∞^1 Gruppen G_2, H_2 sind also gleichberechtigte Untergruppen der Gruppe G_3, H_3.

Von besonderer Wichtigkeit ist nun in unserem Zusammenhang der folgende Satz:

Die Transformationen der Gruppe G_3 lassen sich in bestimmter Weise zu Paaren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ ordnen.

Je zwei zusammengehörige werden durch sämmtliche Transformationen der Schaar H_3 unter einander vertauscht:

$$\mathfrak{t}_1 t = t\mathfrak{t}_2, \qquad t\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 t. \tag{5}$$

Ferner sind $\mathfrak{t}_1^{-1}\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2^{-1}$ (entgegengesetzte) Transformationen der Gruppe G_1; endlich ergeben $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ hinter einander ausgeführt eine Transformation von G_2, eine Bewegung.

Umgekehrt kann jede Schraubung um die Axe n auf ∞^1 Arten in zwei zusammengehörige Transformationen von G_3 zerlegt werden.

In der That, setzt man für t irgend eine bestimmte Transformation von H_3, und nimmt man etwa die erste der Formeln (5) als Definitionsgleichung zusammengehöriger Transformationen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, so findet man sofort

$$\mathfrak{t}_1 = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{t}_2 = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{r}^{-1}, \tag{6}$$

sofern $S^{\frac{1}{2}}$ und $\mathfrak{r}$ Transformationen von G_2 und G_1 bedeuten; daraus folgert man dann leicht die übrigen im Satze angegebenen Beziehungen:

$$\mathfrak{t}_1^{-1}\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{r}^{-2}, \quad \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2^{-1} = \mathfrak{r}^2, \quad \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_1 = S.$$

Ist S gegeben, so ist $S^{\frac{1}{2}}$ natürlich nur zweideutig bestimmt; ist $S^{\frac{1}{2}}$ der eine Werth, so ist $S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{U}$ der andere. Man erkennt leicht die geometrische Bedeutung der Transformationen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$. Sei xx' irgend eine Sehne, $\bar{x}$ deren Mitte, und $\bar{l}$ die von $\bar{x}$ auf die Axe n gefällte Senkrechte, sei ferner $r = r'$ der Abstand der Punkte x und x' von der Axe n und ϱ der Abstand eines Punktes x^* der Geraden $\bar{l}$ von der Axe n; so hat man $x\{\mathfrak{t}_1\}x^*\{\mathfrak{t}_2\}x'$, $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = S$; dabei hat das Ver-

hältniss $r:\varrho$ einen von der Lage der Sehne xx' unabhängigen Werth λ. Nimmt man je nach der Wahl der mit $S^{\frac{1}{2}}$ zu bezeichnenden Bewegung, $\lambda = \frac{1}{\cos\vartheta}$ oder $\lambda = -\frac{1}{\cos\vartheta}$, so folgt der erste Theil des Satzes:

Die in § 5 und § 6 behandelten Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ sind ein Paar zusammengehöriger Transformationen der Gruppe G_3.

Ferner gehören, wie gesagt, je zwei entgegengesetzte Transformationen von G_1 zusammen; jede Transformation von G_2 aber, d. h. jede Schraubung um die Axe n ist sich selbst zugeordnet.

Endlich entnehmen wir der Formel (4) den Satz:

Jede Transformation der Schaar H_3 ergibt, zweimal hinter einander ausgeführt, eine Transformation von G_2, eine Bewegung.

Umgekehrt kann jede Schraubung um die Axe n auf ∞^1 Arten durch Wiederholung einer dualistischen Transformation dargestellt werden, die der durch n bestimmten Schaar H_3 angehört.

Man findet alle Transformationen t von H_3, die der Gleichung $t^2 = S$ genügen, wenn man zunächst irgend einer Normale l der Axe n die Normale $\bar{l}$ zuordnet, die l in den beiden Transformationen $S^{\frac{1}{2}}$ entspricht, und nun einem Punkt von l eine Ebene von $\bar{l}$ zuweist: dadurch ist t vollständig bestimmt.

Unter den Transformationen der Schaar H_3, die eine gegebene Schraubung S erzeugen, befindet sich insbesondere die in § 5 und § 6 betrachtete Transformation T.

In der That, nennen wir, wie bisher, $\mathfrak{W}$ das zu dem Mittelcomplex von S gehörige Nullsystem, und nennen wir $\mathfrak{R}$ die Transformation von G_1, die den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{T}_1 = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{T}_2 = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}^{-1} \tag{7}$$

genügt, so finden wir sofort

$$T = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}\mathfrak{W} = \mathfrak{W}S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}^{-1}; \tag{8}$$

zugleich ergibt sich von Neuem der in anderem Zusammenhang schon bewiesene Satz:

Zu der durch eine Schraubung S der Gruppe G_2 bestimmten Schaar H_1 gehört nicht nur das Nullsystem $\mathfrak{W}$, sondern es gehören dazu auch die in § 5 und § 6 besprochenen Nullsysteme $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$.

Man findet auf Grund der Formeln (9) und (13) des § 6:

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{R}^2\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\mathfrak{R}^{-2}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{W}\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}^{-2}\mathfrak{W}. - \tag{10}$$

Denken wir uns nicht, wie bisher, die Axe n gegeben, sondern eine Bewegung S der Gruppe G_2, so kommen wir im Allgemeinen zu denselben Ergebnissen; denn durch S ist die Axe n und damit das ganze System der Gruppen G_1, G_2, G_3, $G_1 H_1$, $G_2 H_2$, $G_3 H_3$ bestimmt. Besondere Verhältnisse treten aber ein, wenn S in eine *Schiebung* übergeht, da dann die Axe n unbestimmt wird. Unsere Construction liefert in diesem Falle ∞^3 verschiedene Zerlegungen von S in zwei zusammengehörige affine Transformationen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, und ebenso ∞^3 dualistische Transformationen t, die zweimal hinter einander ausgeführt, S erzeugen. Unter den ∞^2 Gruppen G_2, die eine gegebene Schiebung enthalten, befinden sich insbesondere ∞^1 Gruppen, die aus lauter Schiebungen bestehen. Die Gruppe G_3 ist in jedem dieser Fälle die Gruppe aller Schiebungen, die Transformationen der Schaar H_3 aber sind ausgeartet.

Wir mögen die angestellten Betrachtungen noch nach einer anderen Richtung hin ergänzen, indem wir fragen, wann die Gruppe G_2 aus *allen* Bewegungen besteht, die mit einer bestimmten Transformation S von G_2 vertauschbar sind.

Es ist leicht, zu entscheiden, unter welchen Bedingungen zwei Bewegungen S und B vertauschbar sind. Sei S zunächst keine Schiebung, so muss die Axe der Schraubung B durch S in sich selbst übergeführt werden; d. h. die Axe von B ist entweder identisch mit der Schraubenaxe von S, oder sie ist die zu ihr senkrechte unendlich ferne Gerade, oder S ist eine Umschraubung, und die Axe von S wird von der Axe von B getroffen. Geschieht dies in einem unendlich fernen Punkte, so ist B eine Schiebung, und S und B sind nicht vertauschbar; geschieht es im Endlichen, so sind S und B Umwendungen, deren Axen sich rechtwinklig schneiden. Ist S eine Schiebung, so ist B entweder ebenfalls eine Schiebung, oder man kommt bei Vertauschung von S und B auf den schon behandelten Fall zurück. Es gilt also der Satz:

Sind zwei Bewegungen S und B vertauschbar, so sind sie entweder beide Schiebungen — oder sie sind beide Schraubungen um dieselbe Axe n — oder endlich, S und B sind Umwendungen um zwei Axen die sich rechtwinklig schneiden.

Im letzten Fall ist die zusammengesetzte Transformation eine neue Umwendung um eine dritte, zu jenen beiden rechtwinklige Axe.

Dem letzten Satze entnehmen wir nun die Antwort auf die vorhin aufgeworfene Frage.

Ist S weder eine Umwendung noch eine Schiebung, so gibt es eine Schaar von ∞^2 Bewegungen B, die mit S vertauschbar sind; sie bilden die continuirliche Gruppe G_2. Ist aber S eine Umwendung, so kommt eine zweite Schaar von ∞^2 Bewegungen B (Umwendungen) hinzu, die mit G_2

zusammen wieder eine Gruppe bilden; ist S endlich eine Schiebung, so gibt es ∞^4 mit S vertauschbare Bewegungen B, eine continuirliche Gruppe: die Gruppe aller Schraubungen mit derselben Axenrichtung. (Vgl. § 9, S. 486, Nr. 2). —

§ 8.

Der Sehnencomplex. — Unendlich kleine Bewegungen.

Wir kehren nun zurück zu den Betrachtungen des § 6, um die dort untersuchte Zerlegung einer Bewegung S in eine Umschraubung und eine Drehung oder in zwei Drehungen noch nach einer anderen Richtung hin zu specialisiren.

Wir setzen hier, wie in § 6, zunächst voraus, dass S weder eine Drehung noch eine Umschraubung ist.

Man überzeugt sich sofort davon, dass die Gesammtheit der Sehnen xx' eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden, einen (speciellen tetraedralen) quadratischen Strahlencomplex bildet, der ebensowohl auch definirt werden kann als der Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen, oder als der Ort der Geraden, die von den ihnen durch S^{-1} oder S zugeordneten Geraden geschnitten werden. Wir wollen diesen Complex den *Sehnencomplex* der Bewegung S nennen. Ohne auf die sonstigen merkwürdigen Eigenschaften dieses Complexes näher einzugehen*), wollen wir uns die Frage vorlegen, welche Besonderheit die in § 6 behandelten Drehungen und Umschraubungen annehmen, wenn eine der mit g, g', $\bar{g}$, $\bar{\bar{h}}$ bezeichneten Geraden ein Strahl des Sehnencomplexes wird.

Lassen wir etwa die durch den Punkt $\bar{x}$ hindurchgelegte Gerade $\bar{g}$ mit der Sehne xx' zusammenfallen, so werden gleichzeitig auch die Geraden g, g' und $\bar{\bar{h}}$ Strahlen des Sehnencomplexes. Für g und g' ist dies evident; $\bar{\bar{h}}$ aber gehört dem Sehnencomplex an als Mittelstrahl der sich schneidenden entsprechenden Punktreihen $(v, \bar{\bar{u}})$ und $(\bar{\bar{u}}, v')$. S kann erzeugt werden: Erstens durch eine Umschraubung um $\bar{g}$ und durch eine vorhergehende Drehung um g oder eine nachfolgende Drehung um g'; zweitens durch eine Umschraubung um $\bar{\bar{h}}$ und durch eine vorhergehende Drehung um $(v, \bar{\bar{u}})$ oder eine nachfolgende Drehung um $(\bar{\bar{u}}, v')$; drittens durch eine Drehung um $\bar{\bar{h}}$ und durch eine vorhergehende Drehung um g oder eine nachfolgende Drehung um g'; endlich durch eine Drehung um $\bar{g}$ und eine vorhergehende Drehung um (v, u) oder eine nachfolgende Drehung um $(\bar{u}, v')$. (Vgl. auch § 4,

*) Vgl. Schönflies, *Geometrie der Bewegung*. 3. Capitel, § 7. (S. 109).

S. 455). Dabei ist $\bar{g}$ senkrecht zu $(v, \bar{\bar{u}})$, $\bar{\bar{h}}$, $(\bar{\bar{u}}, v')$ und ebenso $\bar{\bar{h}}$ senkrecht zu g, $\bar{g}$, g'. Wir kommen so zu dem folgenden Satz, der eine Ergänzung der in § 5 und § 6 angestellten Betrachtungen enthält:

Die Bewegung S kann auf ∞^3 Arten durch eine Umschraubung und eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung in der Weise dargestellt werden, dass die Umschraubungsaxe und die Drehungsaxe sich schneiden.

Die Bewegung S kann ferner auf ∞^3 Arten in zwei auf einander folgende Drehungen zerlegt werden, deren Axen sich rechtwinklig kreuzen.

Der Ort der Drehungs- wie der Umschraubungsaxen ist in jedem dieser Fälle der Sehnencomplex.

Dieser Strahlencomplex wird also von jeder der affinen Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ derart in sich selbst übergeführt, dass je zwei einander zugeordnete Strahlen sich schneiden; und er wird von jeder der dualistischen Transformationen T, $\mathfrak{W}$ derart in sich selbst übergeführt, dass je zwei zugeordnete Strahlen sich rechtwinklig kreuzen.

Die in der Ebene $\bar{u}$ gelegenen Strahlen unseres Complexes, die Verbindungssehnen entsprechender Punkte der Geraden $(v, \bar{\bar{u}})$, $(\bar{\bar{u}}, v')$ umhüllen eine Parabel, deren Scheiteltangente der Mittelstrahl $\bar{\bar{h}}$ der Punktreihen $(v, \bar{\bar{u}})$ und $(\bar{\bar{u}}, v')$, und deren Brennpunkt der Punkt x ist. Die Hauptaxe der Parabel ist die in § 6 betrachtete Gerade $\bar{l}$, eine Winkelhalbirende der Geraden $(v, \bar{\bar{u}})$ und $(\bar{\bar{u}}, v')$.

Wir gehen auf die besonderen Vorkommnisse diesmal nicht weiter ein. Es mag genügen, hervorzuheben, dass der Sehnencomplex beim Uebergang zu einer Umschraubung oder Drehung in zwei specielle lineare Complexe zerfällt — nämlich in das Secantensystem der Schraubenaxe und das Secantensystem der zu ihr senkrechten unendlich fernen Geraden — und dass man als Sehnen im engeren Sinne im ersten Fall nur die Secanten der Umschraubungsaxe, im zweiten die zur Drehungsaxe senkrechten Geraden anzusehen hat. Eine Sonderstellung nehmen dabei wieder die Umwendungen und die Schiebungen ein. —

Wir betrachten nun den Sehnencomplex in seinen Beziehungen zu dem Mittelcomplex $\mathfrak{W}$ der Bewegung.

Gegeben sei eine im Endlichen gelegene Axe n und irgend ein nicht ausgeartetes Nullsystem $\mathfrak{W}$, das die Gerade n zur Hauptaxe hat. $\bar{x}$ sei irgend ein nicht auf n gelegener Punkt, und $\bar{u}$ dessen Nullebene in Bezug auf $\mathfrak{W}$; endlich sei s die im Punkte $\bar{x}$ auf der Ebene $\bar{u}$ errichtete Senkrechte. Nehmen wir nun auf s irgend ein Punktepaar x, x' an, dessen Mitte $\bar{x}$ ist, so können wir durch die

Formel $x\{S\}x'$ eine Schraubung mit der Axe n definiren, deren Mittelcomplex der gegebene Complex $\mathfrak{W}$ ist, und deren Sehnencomplex den Strahl s enthält. Nehmen wir ferner auf s einen weiteren Punkt x^* an, so definirt die Formel $x\{\mathfrak{t}\}x^*$ eine Transformation $\mathfrak{t}$ der im vorigen Paragraphen besprochenen Gruppe G_3. Unterwerfen wir nun das Punktepaar x, x' sämmtlichen Transformationen von G_3, so erhalten wir sämmtliche Punktepaare y, y', die einander durch die Bewegung S zugeordnet sind $(y\{S\}y')$; aus s gehen also durch die Transformationen von G_3 alle Strahlen des Sehnencomplexes hervor. Unterwerfen wir ferner das Punktepaar x, x^* allen Transformationen von G_3, so erhalten wir ebenso alle Punktepaare y, y^*, die der Bedingung $y\{\mathfrak{t}\}y^*$ genügen.

Den bei dieser Construction benutzten Strahl s können wir als eine willkürliche Gerade des Raumes betrachten. Ist nämlich s gegeben, so findet man sofort den Punkt $\bar{x}$ als den Fusspunkt der kürzesten Verbindungslinie $\bar{l}$ von s und n; $\bar{\bar{u}}$ ist dann die Ebene der Axe $\bar{l}$, die auf s senkrecht steht; damit ist aber auch das Nullsystem bekannt.

Wir können also die folgenden Sätze formuliren:

n und s seien irgend zwei im Endlichen gelegene Gerade des Raumes, die einander weder schneiden noch rechtwinklig kreuzen. Unterwirft man dann die Gerade s allen Transformationen der durch die Axe n bestimmten Gruppe G_3, so entstehen aus s alle Strahlen eines gewissen quadratischen Complexes. Dieser ist Sehnencomplex für eine continuirliche Schaar von ∞^1 Bewegungen, die alle die Axe n zur Schraubenaxe haben, und denen ein und derselbe Mittelcomplex zukommt.

Der quadratische Strahlencomplex ist ferner Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte und der Schnittlinien entsprechender Ebenen für eine continuirliche Schaar von ∞^2 Transformationen der Gruppe G_3 (zu denen jene ∞^1 Bewegungen gehören).

Ueberdies finden wir, indem wir unsern Satz theilweise umkehren und vervollständigen:

Ein gegebener linearer Complex ist Mittelcomplex von ∞^1 Bewegungen, die alle auch denselben Sehnencomplex haben.

Diese Bewegungen bilden im Allgemeinen eine continuirliche Schaar (aber keine Gruppe). Nur dann, wenn der gegebene Complex aus allen Geraden besteht, die eine im Endlichen gelegene Axe n schneiden, zerfällt die Schaar der zugehörigen Bewegungen, nämlich in die Drehungen und die Umschraubungen um die Axe n.

Wenn die Axe n ins Unendliche rückt, so kommen die Um-

schraubungen in Wegfall; man erhält wieder eine continuirliche Schaar von Bewegungen, die nun auch eine Gruppe bilden.

Von der grössten Bedeutung ist bekanntlich ein besonderer, zuerst von Möbius aufgefundener Fall dieses Satzes, den wir so formuliren mögen:

Mit jedem linearen Complex ist eine unendliche kleine Bewegung verknüpft, deren Mittelcomplex er ist, und umgekehrt.

Es ist nicht unsere Absicht, der hinreichend bekannten Theorie der unendlich kleinen Bewegungen eine eingehendere Darstellung zu widmen; wir verweisen auf die genannte Abhandlung von Chasles und auf die sich daran anschliessenden interessanten Arbeiten von Mannheim, Ball, Schönflies und Anderen. Um die Anknüpfung zu erleichtern und zugleich um unsere eigenen ferneren Betrachtungen vorzubereiten, mag indessen das Folgende erwähnt werden.

Gehen wir von einer endlichen Bewegung S zu einer unendlich kleinen über (etwa unter Festhaltung des Mittelcomplexes) so nähert sich die dualistische Transformation T dem Nullsystem $\mathfrak{W}$. In der Grenze fallen dann die von uns mit $x, \bar{x}, x'$ bezeichneten Punkte zusammen, ebenso die Geraden $g, \bar{g}, g'$, die Geraden $(v, \bar{\bar{u}})$, $(\bar{\bar{u}}, v')$ und ihr Mittelstrahl, endlich die Ebenen $v, \bar{\bar{u}}, v'$. Stellt man also die unendlich kleine Bewegung durch zwei auf einander folgende Drehungen dar, so entsprechen sich deren Axen in dem Nullsystem $\mathfrak{W}$ wechselweise; die zugehörigen Drehungen sind selbst unendlich klein, und daher (wenn man nur auf Grössen erster Ordnung achtet) vertauschbar.

Mit jeder unendlich kleinen Drehung kann man sich eine *Kraft*, oder einen *Linientheil* im Sinne Grassmann's verbunden denken, indem man auf der Axe der Drehung eine Strecke proportional dem Drehungswinkel, in der durch den Sinn der Drehung bestimmten positiven Richtung abträgt. Stellt man jede kleine Drehung als Folge von zwei Umwendungen dar, so sieht man, dass Drehungen, deren Axen sich schneiden, zusammengesetzt werden, indem man die zugehörigen Kräfte oder Linientheile geometrisch addirt. Hieraus ergibt sich die Darstellung jeder unendlich kleinen Bewegung durch die geometrische Summe von zwei Kräften oder Linientheilen, und der wichtige von Möbius entdeckte Satz:

Unendlich kleine Bewegungen werden nach derselben Regel wie Kräftesysteme zusammengesetzt. —

Jede unendlich kleine Bewegung erzeugt „durch unendlichmalige Wiederholung“ eine *eingliedrige Gruppe* von Bewegungen, deren Bahncurven Schraubenlinien, Kreise oder gerade Linien sind. Das Verhältniss der Schraubungshöhe 2η zu dem Schraubungswinkel 2ϑ ist für alle Transformationen einer solchen Gruppe constant.

Man kann leicht alle unendlich kleinen Bewegungen finden, die eine gegebene endliche Bewegung S erzeugen, oder alle eingliedrigen Gruppen, denen S angehört.

Ist S keine Drehung, so erhält man unendlich viele discrete Gruppen, die alle zu der Schraubenaxe von S gehören; ist S eine Drehung, aber keine Schiebung, so gibt es nur eine unendlich kleine Bewegung, die S erzeugt; ist endlich S eine Schiebung, so erhält man unendlich viele discrete Schaaren von je ∞^2 eingliedrigen Gruppen, deren jede S enthält; alle diese Schaaren durchdringen sich in der eingliedrigen Gruppe von Schiebungen, der S angehört.

§ 9.

Continuirliche Gruppen von Bewegungen.

Es ist eine leichte Sache, nicht nur nach den Methoden des Herrn S. Lie, sondern auch mit den Hülfsmitteln der elementaren Geometrie, alle von infinitesimalen Transformationen erzeugten Gruppen von Bewegungen zu finden. Da wir im nächsten Abschnitt gelegentlich von diesen Gruppen zu reden haben werden, führen wir die Lösung der genannten Aufgabe hier in der Kürze durch.

Es handelt sich darum, die im vorigen Paragraphen besprochenen eingliedrigen Gruppen von Bewegungen auf alle möglichen Arten zu continuirlichen Schaaren zusammenzufassen, so dass jede Schaar wieder eine Gruppe bildet.

Zunächst bestimmen wir die Untergruppen der Gruppe der *Bewegungen in der Ebene*, indem wir bemerken, dass das Vorhandensein von zwei unendlich kleinen Bewegungen, wenn der Mittelpunkt auch nur einer von ihnen im Endlichen liegt, das Vorhandensein aller Bewegungen in einer Bewegungsgruppe nach sich zieht. Es gibt demnach nur drei Arten (Typen) von Untergruppen:

1) Die Gruppe aller Drehungen um einen im Endlichen gelegenen Punkt (∞^2 gleichberechtigte Gruppen).

2) Die Gruppe aller Schiebungen in einer gegebenen Richtung (Grenzfall der vorigen, ∞^1 Gruppen).

2) Die Gruppe aller Schiebungen (eine zweigliedrige invariante Untergruppe von vertauschbaren Transformationen).

Betrachten wir zweitens die Gruppe aller *Drehungen um einen festen Punkt im Raume*, so findet sich ebenso, dass es nur einen Typus von (reellen) Untergruppen gibt, nämlich die Gruppe aller Drehungen um eine feste Axe durch jenen Punkt. Solcher Gruppen gibt es wieder ∞^2 gleichberechtigte.

Um nun die Untergruppen der *Bewegungen im Raume* zu finden, beachten wir, dass aus jeder solchen Gruppe G eine isomorphe Gruppe G'

hervorgeht, wenn man statt jeder Transformation S der Gruppe eine Drehung S' um einen im Endlichen gelegenen festen Punkt setzt, deren Axe parallel ist der Axe von S, und deren Winkel gleich ist dem Drehungswinkel von S. Wir können somit, nach dem soeben von den Drehungen um einen festen Punkt Gesagten, drei Hauptfälle unterscheiden:

A) Die Richtungen (die unendlich fernen Punkte) werden nullgliedrig (gar nicht) transformirt.

B) Sie werden eingliedrig transformirt.

C) Sie werden dreigliedrig transformirt.

A) Führt auf die sofort angebbaren Gruppen von Schiebungen.

B) Die fragliche Gruppe G besteht aus Schraubungen, deren Axen sämmtlich zu einander parallel sind. Wir berücksichtigen, dass eine zu den Schraubenaxen senkrechte Ebene ε bei den Vertauschungen ihrer Normalen durch die Transformationen von G durch eine isomorphe Bewegungsgruppe G'' transformirt wird, die mindestens eine eigentliche Drehung enthält. Die genannte isomorphe Gruppe G'' ist also entweder eingliedrig oder dreigliedrig, nach dem vorhin über die Bewegungen in der Ebene Gesagten. Ist sie eingliedrig, so ist G selbst eingliedrig oder zweigliedrig, da jede Transformation von G aus einer Transformation von G'' und aus einer Schiebung senkrecht zur Ebene ε zusammengesetzt werden kann. Wir erhalten also zwei Gruppen: Eine eingliedrige Gruppe von Schraubungen um eine Axe n, und die zweigliedrige Gruppe aller Schraubungen um die Axe n.

Ist G'' dreigliedrig, so ist G dreigliedrig oder viergliedrig. Nehmen wir zunächst an, G sei dreigliedrig, und nennen wir G_1 irgend eine eingliedrige Untergruppe von G, die einer Gruppe G_1'' eigentlicher Drehungen in G'' entspricht. Dann erhalten wir bereits ∞^3 Transformationen von G, wenn wir G_1 allen den ∞^2 Transformationen von G selbst unterwerfen, denen in G'' Schiebungen entsprechen. Weil aber jede Schraubung durch die Schiebungen in der Richtung ihrer Axe in sich selbst übergeht, so kommt man zu denselben ∞^3 Transformationen, wenn man die Gruppe G_1 allen Schiebungen parallel zur Ebene ε unterwirft. Daraus folgt, dass G aus allen Schraubungen besteht, deren Axen zur Ebene ε senkrecht sind, und deren Schraubungshöhe 2η zu dem Schraubungswinkel 2ϑ in einem gegebenen Verhältniss steht. — Nehmen wir zweitens an, G sei viergliedrig, so besteht G überhaupt aus allen Schraubungen, deren Axen zur Ebene ε senkrecht sind.

C) Zu jeder vorgeschriebenen Richtung gehört mindestens eine eingliedrige Untergruppe von G, deren Axe jene Richtung hat. Wir behaupten zunächst, dass G keine unendlich kleine Schiebung enthalten kann. Das Auftreten einer solchen würde nämlich das Vor-

handensein aller übrigen Schiebungen nach sich ziehen, da die ∞^2 Richtungen (die unendlich fernen Punkte) durch die Transformationen von G in allgemeinster Weise unter einander vertauscht werden. Dann aber erhielte man zu jeder vorgeschriebenen Axenrichtung sofort eine Drehung, und weiterhin entstünden mit Hülfe der Schiebungen überhaupt alle Bewegungen des Raumes.

Wir betrachten nun zwei eingliedrige Gruppen G_1 und G_1' von G, deren Axen n und n' sich rechtwinklig kreuzen oder schneiden. Unterwerfen wir G_1' einer in G_1 enthaltenen Umschraubung, so entsteht eine neue Gruppe G_1'', deren Axe n'' zu n' parallel ist. Wäre die Gerade n'' von n' verschieden, so könnte man aus G_1' und G_1'' eine unendlich kleine Schiebung ableiten; n'' fällt also mit n' zusammen. Das aber ist nur möglich, wenn n und n' sich schneiden, und wenn G_1 die Gruppe aller Drehungen um die Axe n ist. Dann ist natürlich auch G_1' eine Gruppe von Drehungen, und G selbst ist die Gruppe aller Drehungen um den Schnittpunkt von n und n'. —

Hiermit haben wir alle von (reellen) infinitesimalen Transformationen erzeugten Bewegungsgruppen gefunden. Wir stellen sie kurz zusammen. [Vgl. S. 565].

Sechsgliedrige Gruppen.

1) Die Gruppe aller Bewegungen.

Viergliedrige Gruppen.

2) Die Gruppe aller Schraubungen mit parallelen Axen. ∞^2 gleichberechtigte Gruppen.

Dreigliedrige Gruppen.

3) Die Gruppe aller Drehungen um einen im Endlichen gelegenen Punkt. ∞^3 gleichberechtigte Gruppen.

4) Die Gruppe aller Schraubungen mit parallelen Axen, bei denen das Verhältniss $\eta : \vartheta$ von Schraubungshöhe und Schraubungswinkel einen constanten Werth k hat. ∞^3 Gruppen von denen je ∞^2 gleichberechtigt sind, entsprechend den verschiedenen Werthen von k. Jede ist invariant in einer Gruppe des Typus 2). Für $k = 0$ ergibt sich:

4b) Die Gruppe aller Drehungen mit parallelen Axen, oder die Gruppe aller Drehungen um einen unendlich fernen Punkt, eine Ausartung des Typus 3).

5) Die Gruppe aller Schiebungen, also eine Gruppe von vertauschbaren Transformationen. Sie ist invariant in 1) und 2); sie ist ebenfalls ein Grenzfall der Gruppen vom Typus 4), entsprechend dem Werthe $k = \infty$.

Zweigliedrige Gruppen.

6) Die Gruppe aller Schraubungen um eine im Endlichen gelegene Axe *n*. ∞^4 gleichberechtigte Gruppen von vertauschbaren Transformationen.

7) Die Gruppe aller Schiebungen senkrecht zu einer gegebenen Richtung, eine Ausartung des Typus 6). ∞^2 gleichberechtigte Gruppen. Jede ist invariant in einer Gruppe des Typus 2) und in deren sämmtlichen dreigliedrigen Untergruppen.

Eingliedrige Gruppen.

8) Die Gruppe aller der Schraubungen um eine im Endlichen gelegene Axe *n*, für die das Verhältniss $\eta : \vartheta$ einen constanten Werth k hat. ∞^5 Gruppen, unter denen je ∞^4 gleichberechtigte. Für $k = 0$ entsteht:

8b) Die Gruppe aller Drehungen um eine Axe *n*.

9) Die Gruppe aller Schiebungen in einer gegebenen Richtung, eine Ausartung von 8) oder 8b). ∞^2 gleichberechtigte Gruppen. Jede ist ausgezeichnet in einer Gruppe des Typus 2).

Es mag dem Leser überlassen bleiben, die Untergruppen dieser einzelnen Gruppen aufzusuchen, sich deutlich zu machen, wie sie unter einander vertauscht werden, wie sich die Punkte des Raumes ihnen gegenüber verhalten, u. dgl. mehr.

§ 10.

Die Umlegungen im Raume.

Eine jede Umlegung kann dargestellt werden durch eine Spiegelung an einer Ebene und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um eine zu dieser Ebene senkrechte Axe; und zwar im Allgemeinen nur in einer Weise, im besonderen Falle aber auf ∞^2 *Arten.* [Vgl. S. 565].

Die Ebene der Spiegelung nennen wir eine „*Mittelebene*“, die Axe der Drehung eine „*Drehungsaxe*“, ihren Schnittpunkt mit der Mittelebene einen „*Mittelpunkt*“ der Umlegung. Alle diese Gebilde sind, wie im Satze ausgesprochen, im Allgemeinen nur je einmal vorhanden. Für die Punkte der Mittelebene reducirt sich die Umlegung auf eine Bewegung (Drehung). Führt man eine Umlegung zweimal hinter einander aus, so erhält man in Folge dessen keine allgemeine Schraubung, sondern nur eine Drehung.

Entsprechend den Fällen, in denen die Umlegung für die Punkte einer ihrer Mittelebenen in eine Schiebung — in die identische Transformation — in eine Umwendung übergeht, haben wir nun die folgenden besonderen Arten von Umlegungen des Raumes hervorzuheben:

Die ∞^5 Umlegungen mit unendlich fernem Mittelpunkt. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass sie die Punkte der unendlich fernen Ebene involutorisch transformiren. Eine solche besondere Umlegung ergibt also zweimal hinter einander ausgeführt, keine allgemeine Drehung, sondern nur eine Schiebung. Bei einer Umlegung mit unendlich fernem Mittelpunkt bleibt im Allgemeinen kein im Endlichen gelegener Punkt in Ruhe; unter diesen Transformationen sind aber enthalten:

Die ∞^3 Spiegelungen an den Ebenen des Raumes. Bei einer solchen Spiegelung bleiben alle Punkte der Mittelebene einzeln in Ruhe; jeder von ihnen ist ein Mittelpunkt. Die in obigem Satze genannte Drehung reducirt sich auf die identische Transformation, die Drehungsaxe wird unbestimmt. —

Die ∞^3 Spiegelungen an den Punkten des Raumes sind solche Umlegungen, bei welchen alle Punkte der unendlich fernen Ebene in Ruhe bleiben. Jede Ebene durch den Mittelpunkt ist eine Mittelebene, und jede Gerade des Mittelpunktes eine Drehungsaxe; die zugehörige Drehung ist eine Umwendung.

Die Spiegelungen an den Punkten bilden zusammen mit den Schiebungen eine *Gruppe*, eine invariante Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen des Raumes.

Die Spiegelungen an den Ebenen und die Spiegelungen an den Punkten machen zusammen den Inbegriff aller involutorischen Umlegungen des Raumes aus; beide haben, wie schon bemerkt, viele ähnliche Eigenschaften. So stellt sich neben den Eingangs formulirten Satz noch ein zweiter, ähnlich lautender, der allerdings nicht denselben Gültigkeitsbereich hat, wie jener:

Eine Umlegung kann im Allgemeinen dargestellt werden durch eine Spiegelung an einem Punkt und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Axe; und zwar entweder nur auf eine, oder auf ∞^2 Arten.

Ausgenommen sind nur die Umlegungen, die keinen Mittelpunkt im Endlichen haben; sie können nicht auf solche Art dargestellt werden.

Bei einer allgemeinen Umlegung S ist nämlich der Spiegelungspunkt der Mittelpunkt der Umlegung, die Axe der anzuwendenden Drehung aber ist wieder die schon genannte Drehungsaxe der Umlegung. Sei 2ϑ der Drehungswinkel, $2\vartheta'$ aber der Winkel jener Drehung, die man anwenden muss, wenn man statt der Spiegelung an dem Mittelpunkt die Spiegelung an der Mittelebene benutzt, so besteht zwischen beiden Winkeln die Beziehung $\vartheta - \vartheta' \equiv R$. Rückt der Mittelpunkt der Umlegung ins Unendliche, so wird die gegenwärtige Darstellung unmöglich, ausser wenn S insbesondere in eine Spiegelung an einer Ebene übergeht; in diesem Falle hat man ∞^2 Zer-

legungen von S, bei deren jeder die anzuwendende Drehung eine Umwendung wird ($\vartheta = R$). Ist endlich S selbst eine Spiegelung an einem Punkt, so wird die Drehungsaxe zwar unbestimmt, die Drehung selbst aber reducirt sich auf die identische Transformation. —

Wir betrachten nun wieder, wie früher in ähnlichen Fällen, die Sehnenmitten und die unendlich fernen Punkte der Sehnen xx', sowie die Winkelhalbirenden der Paare u, u' zusammengehöriger Ebenen.

Bei einer Umlegung S ist der Ort der Sehnenmitten, der Mittelstrahlen von je zwei entsprechenden Punktreihen, endlich der Mittelebenen von je zwei entsprechenden Punktfeldern im Allgemeinen eine Ebene, die Mittelebene der Umlegung.

Nur dann, wenn S eine Spiegelung an einem Punkt ist, ist der Ort aller dieser Gebilde ein Punkt, nämlich der Spiegelungspunkt.

Bei einer Umlegung S ist der Ort der Normalebenen der Sehnen, der Normalenaxen von je zwei entsprechenden Punktreihen, endlich der Centralpunkte von je zwei entsprechenden Punktfeldern im Allgemeinen ein Punkt, der Mittelpunkt der Umlegung.

Nur dann, wenn S eine Spiegelung an einer Ebene ist, ist der Ort aller dieser Gebilde eine Ebene, nämlich die Spiegelungsebene.

Die unendlich fernen Punkte der Sehnen erfüllen im Allgemeinen die ganze unendlich ferne Ebene. Sie erfüllen aber eine Gerade, wenn die Umlegung die Folge einer Spiegelung an einer Ebene und einer Schiebung ist; sie fallen endlich in einen einzigen Punkt zusammen, wenn die Umlegung in eine Spiegelung an einer Ebene übergeht.

Die beiden Winkelhalbirenden eines Ebenenpaars u, u' unterscheiden sich wieder durch die Eigenschaften der Projectionen der in u und u' gelegenen congruenten Punktfelder: In der „*Winkelhalbirenden erster Art*“ sind diese Projectionen gleichstimmig, in der „*Winkelhalbirenden zweiter Art*“ ungleichstimmig affin; in beiden Fällen sind sie natürlich flächengleich. (Vgl. § 5, S. 463.)

Die Winkelhalbirenden erster Art erfüllen im Allgemeinen das zum Mittelpunkt der Umlegung gehörige Ebenenbündel.

Nur dann, wenn dieser Punkt unbestimmt wird, d. h., wenn die Umlegung in eine Spiegelung an einer Ebene übergeht, tritt eine Ausnahme ein: Alle die genannten Ebenen fallen mit der Spiegelungsebene zusammen.

Die Winkelhalbirenden zweiter Art erfüllen im Allgemeinen das zum unendlich fernen Punkt der Drehungsaxe gehörige Ebenenbündel.

Nur dann, wenn dieser Punkt unbestimmt wird, wenn also die Umlegung eine Spiegelung an einem Punkt ist, tritt eine Ausnahme ein: Alle die genannten Ebenen fallen mit der unendlich fernen Ebene zusammen.

An die Betrachtung der Sehnenmitten und der Normalebenen der Sehnen, sowie der Winkelhalbirenden zusammengehöriger Ebenen knüpft sich auch hier die Theorie gewisser collinearer und dualistischer Transformationen, die freilich nicht für den ganzen Raum definirt sind, sondern nur noch für die Strahlen und Ebenen des Mittelpunktes der Umlegung, bez. des unendlich fernen Punktes der Drehungsaxe — oder, was im Allgemeinen auf dasselbe hinauskommt, für die Punkte und Geraden der unendlich fernen Ebene, bez. der Mittelebene der Umlegung. Wir werden von den verschiedenen Einkleidungen, die man dieser Theorie geben kann, eine auswählen, die uns für unsere weiteren Darlegungen die zweckmässigste scheint.

Mit jeder Umlegung S, die keine Spiegelung an einem Punkt ist, sind (nach § 2) zwei affine Transformationen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_2'$ der Punkte und Strahlen ihrer Mittelebene m verknüpft.

Wählen wir die Punkte x, $\bar{x}$, x' und die Geraden h, $\bar{h}$, h' der Ebene m entsprechend den Bedingungen

$$x\{\mathfrak{T}_1'\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2'\}x', \qquad h\{\mathfrak{T}_2'\}\bar{h}\{\mathfrak{T}_1'\}h',$$

und nennen wir g, g' die in x, x' auf der Ebene m senkrechten Geraden, $\bar{u}$ die in $\bar{h}$ auf m senkrechte Ebene: So sind die Geraden g und g' der Ort der Endpunkte aller Sehnen die ihre Mitte in $\bar{x}$ haben, und die Geraden h, h' sind der Ort aller Paare zusammengehöriger Ebenen u, u', deren Winkelhalbirende erster Art die Ebene $\bar{u}$ ist.

Von grösserer Bedeutung ist das folgende Seitenstück zu diesen Sätzen:

Mit jeder Umlegung S, die keine Spiegelung an einer Ebene ist, ist eine dualistische Transformation T der Strahlen und Ebenen des Mittelpunktes o von S verknüpft. Diese Transformation ordnet einer Geraden g von o die gemeinsame Normalebene aller zu g, g' gehörigen Sehnen, und dieser Ebene selbst wieder den Strahl g' zu, der g in der Umlegung S entspricht.

Von der Transformation T^2, die durch zweimalige Ausführung von T entsteht, werden also die Strahlen und Ebenen des Punktes o ebenso unter einander vertauscht, wie von der Umlegung S.

Wenn S in eine Spiegelung an dem Mittelpunkt o übergeht, so fallen g und g' zusammen, und der Strahl $g = g'$ steht auf der ihm zugeordneten Ebene senkrecht. T ist demnach eine involutorische Transformation, die Zuordnung zwischen Pol und Polare in Bezug auf den sogenannten absoluten Kegel des Punktes o. — Geht S in eine Spiegelung an einer Ebene über, so artet T aus.

Auf einem Gedankengange, ganz ähnlich dem früher in der Theorie der Bewegungen verfolgten kommen wir nun von den Transformationen $\mathfrak{T}_1'$, $\mathfrak{T}_2'$ der Ebene m und der Transformation T des Bündels o

ausgehend dahin, die Umlegung S in specielle Bewegungen und Umlegungen zu zerspalten, auf eine allgemeinere Weise, als es in den Eingangs formulirten Sätzen geschehen ist.

Jede Umlegung, die keine Spiegelung an einer Ebene ist, kann auf ∞^2 *Arten (jede Spiegelung an einer Ebene aber auf* ∞^3 *Arten) erzeugt werden durch eine Drehung und eine darauf folgende Spiegelung an einer Ebene.*

Die Drehungsaxe und die Spiegelungsebene gehen durch den Mittelpunkt o *der Umlegung. Der ersten entspricht die zweite in der dualistischen Transformation* T *des Bündels* o.

Jede Umlegung, die keine Spiegelung an einer Ebene ist, kann auf ∞^2 *Arten (jede Spiegelung an einer Ebene aber auf* ∞^3 *Arten) erzeugt werden durch eine Spiegelung an einer Ebene und eine darauf folgende Drehung.*

Die Spiegelungsebene und die Drehungsaxe gehen durch den Mittelpunkt o *der Umlegung. Der zweiten entspricht die erste in der dualistischen Transformation* T^{-1} *des Bündels* o.

Ist die Spiegelungsebene bei beiden Zerlegungen dieselbe, so entsprechen sich die Drehungsaxe g des Satzes links und die Drehungsaxe g' des Satzes rechts in der Umlegung S; die zugehörigen Drehungswinkel sind entgegengesetzt gleich. Ist S selbst eine Spiegelung an einer Ebene, so reduciren sich die Drehungen um g, g' entweder auf die identische Transformation — g wird dann völlig unbestimmt — oder g und g' vereinigen sich in einer Geraden der Spiegelungsebene; sie entsprechen dann einem unbestimmten Drehungswinkel. Ist S eine Spiegelung an einem Punkt, so fallen g und g' ebenfalls zusammen; die zugehörigen Drehungen sind beide Umwendungen.

Jede Umlegung, die keine Spiegelung an einem Punkt ist, kann auf ∞^2 *Arten (jede Spiegelung an einem Punkt aber auf* ∞^3 *Arten) erzeugt werden durch eine Drehung und eine darauf folgende Spiegelung an einem Punkt.*

Jede Umlegung, die keine Spiegelung an einem Punkt ist, kann auf ∞^2 *Arten (jede Spiegelung an einem Punkt aber auf* ∞^3 *Arten) erzeugt werden durch eine Spiegelung an einem Punkt und eine darauf folgende Drehung.*

Der Spiegelungspunkt liegt in der Mittelebene, und die Drehungsaxe ist zu dieser Ebene senkrecht.

Dem Schnittpunkt der Mittelebene und der Drehungsaxe entspricht der Spiegelungspunkt in jener affinen Transformation $\mathfrak{T}_1'$ *der Mittelebene, die durch die gegebene Umlegung bestimmt wird.*

Dem Schnittpunkt der Mittelebene und der Drehungsaxe entspricht der Spiegelungspunkt in jener affinen Transformation $\mathfrak{T}_2'^{-1}$ *der Mittelebene, die durch die gegebene Umlegung bestimmt ist.*

Die Winkel der Drehung, die dem Satze links und der Drehung, die dem Satze rechts entspricht, sind beide gleich dem oben definirten Winkel 2ϑ; sie sind also unabhängig von der besonderen Art der vorzunehmenden Zerlegung.

Ist die Umlegung S eine Spiegelung an einer Ebene, so geht die Drehungsaxe immer durch den Spiegelungspunkt; die zugehörige Drehung wird eine Umwendung. Ist S selbst eine Spiegelung an einem Punkt, so wird jede der anzuwendenden Drehungen eine Schiebung; der zugehörige Spiegelungspunkt ist ein beliebig vorzuschreibender Punkt des Raumes.

Jede Umlegung, die keine Spiegelung an einem Punkt ist, kann auf ∞^2 Arten (jede Spiegelung an einem Punkt aber auf ∞^3 Arten) erzeugt werden durch eine Umschraubung und eine darauf folgende Spiegelung an einer Ebene.

Jede Umlegung, die keine Spiegelung an einem Punkt ist, kann auf ∞^2 Arten (jede Spiegelung an einem Punkt aber auf ∞^3 Arten) erzeugt werden durch eine Spiegelung an einer Ebene und eine darauf folgende Umschraubung.

Die Umschraubungsaxe liegt in der Mittelebene, und die Spiegelungsebene ist zu dieser Ebene senkrecht.

Der Schnittlinie der Mittelebene und der Spiegelungsebene entspricht die Umschraubungsaxe in jener affinen Transformation $\mathfrak{T}_2'^{-1}$ der Mittelebene, die durch die gegebene Umlegung bestimmt wird.

Der Schnittlinie der Mittelebene und der Spiegelungsebene entspricht die Umschraubungsaxe in jener affinen Transformation $\mathfrak{T}_1'$ der Mittelebene, die durch die gegebene Umlegung bestimmt wird.

Die Umschraubungsaxe und die Spiegelungsebene schliessen also einen constanten Winkel ein, den Winkel ϑ' $(-\vartheta')$. Ist die Spiegelungsebene bei beiden Arten der Zerlegung dieselbe, so gehen die zugehörigen Umschraubungsaxen, die einander in der Umlegung S entsprechen, durch die Spiegelung in einander über. (Man vergleiche den Schluss des § 3).

Ist die Umlegung S selbst eine Spiegelung an einer Ebene, so reducirt sich die anzuwendende Umschraubung in beiden Fällen auf eine Umwendung; die Spiegelungsebene geht durch die Umwendungsaxe; es entsteht also eine Darstellung der Spiegelung S, die auch in dem Ausdruck von S durch eine Drehung und eine Spiegelung an einer Ebene enthalten ist.

Ist S eine Spiegelung an einem Punkt, so geht die Umschraubungsaxe durch diesen Punkt hindurch. Die Spiegelungsebene ist irgend eine zur Umschraubungsaxe senkrechte Ebene. —

Neben die drei angeführten Doppelsätze stellt sich endlich noch ein vierter, der von der Zerlegung einer Umlegung S in eine Spiegelung

an einem Punkt und eine vorhergehende oder nachfolgende Umschraubung handelt. Dieser Satz hat aber einen specielleren Charakter. Eine solche Zerlegung ist nämlich offenbar nur dann möglich, wenn S einen unendlich fernen Mittelpunkt hat, wenn die Punkte der unendlich fernen Ebene durch die Umlegung S involutorisch transformirt werden — dann aber kann die Zerlegung in *allen* Fällen noch auf ∞^3 Arten bewerkstelligt werden. Der Spiegelungspunkt ist ein beliebiger Punkt des Raumes. Die Umschraubungsaxe steht auf der Mittelebene senkrecht; ihr Abstand vom Spiegelungspunkt ist entgegengesetzt gleich (bez. gleich) der halben Grösse der Schiebung, die für die Punkte der Mittelebene mit der Umlegung S übereinstimmt. Die Höhe der Umschraubung ist gleich dem doppelten Abstand der Mittelebene vom Spiegelungspunkt.

Wir betrachten nun noch einige besondere Fälle, deren Interesse nicht geringer ist als das der allgemeinen Sätze.

Stellen wir die Umlegung S einmal durch eine Drehung und eine Spiegelung an einer Ebene, das andere Mal durch eine Umschraubung und eine Spiegelung an einer Ebene dar, und verlangen wir, dass die Drehung oder Umschraubung insbesondere eine Umwendung wird, so kommen wir in beiden Fällen übereinstimmend zu dem Satz:

Eine jede nicht-involutorische Umlegung kann auf ∞^1 Arten dargestellt werden durch eine Umwendung und eine nachfolgende Spiegelung an einer Ebene.

Eine jede nicht-involutorische Umlegung kann auf ∞^1 Arten dargestellt werden durch eine Spiegelung an einer Ebene und eine nachfolgende Umwendung.

Die Umwendungsaxe und die Spiegelungsebene gehen durch den Mittelpunkt der Umlegung; die Umwendungsaxe liegt in der Mittelebene und die Spiegelungsebene steht auf ihr senkrecht.

Die Umwendungsaxe und die Spiegelungsebene schliessen einen constanten Winkel ϑ' ein, den halben Winkel der Drehung, die zusammen mit der Spiegelung an der Mittelebene die Umlegung erzeugt.

Die Spiegelungsebene und die Umwendungsaxe schliessen einen constanten Winkel ϑ' ein, den halben Winkel der Drehung, die zusammen mit der Spiegelung an der Mittelebene die Umlegung erzeugt.

Für die involutorischen Umlegungen lautet der Satz etwas anders (vgl. oben S. 487):

Eine jede Spiegelung an einer Ebene kann auf ∞^2 Arten dargestellt werden durch eine Umwendung und eine vorhergehende

Eine jede Spiegelung an einem Punkt kann auf ∞^2 Arten dargestellt werden durch eine Umwendung und eine vorhergehende

oder nachfolgende Spiegelung an einer Ebene.

Die Spiegelungsebene steht senkrecht auf der Ebene der gegebenen Spiegelung; beide Ebenen durchdringen sich in der Umwendungsaxe.

oder nachfolgende Spiegelung an einer Ebene.

Die Umwendungsaxe und die Spiegelungsebene stehen auf einander senkrecht; sie treffen sich in dem Mittelpunkt der gegebenen Spiegelung.

Die Zerlegung einer Umlegung S in eine Umwendung und eine nachfolgende Spiegelung an einem Punkt, oder in eine Spiegelung an einem Punkt und eine nachfolgende Umwendung ist wieder nur dann möglich, wenn S einen unendlich fernen Mittelpunkt hat, dann aber immer auf ∞^2 Arten. (Vgl. S. 493 oben.) Ist S ausserdem involutorisch (eine Spiegelung an einer Ebene), so wird jede der ∞^2 Umwendungen mit der zugehörigen Spiegelung vertauschbar. —

Endlich kann man unsere allgemeinen Sätze noch nach einer anderen Richtung hin specialisiren, indem man verlangt, dass jedesmal der Satz links zusammenfallen soll mit dem Satz rechts, d. h., dass die beiden Transformationen, in die wir S zerlegt haben, *vertauschbar* werden sollen.

Gehen wir aus von der Darstellung von S durch eine Drehung und eine Spiegelung an einer Ebene, so kommen wir zu dem ersten, gehen wir aus von der Darstellung durch eine Drehung und eine Spiegelung an einem Punkt, so kommen wir zu dem zweiten der Eingangs dieses Paragraphen bereits ausgesprochenen Sätze. Ein specielleres Ergebniss erhalten wir wieder, wenn wir an die Darstellung von S durch eine Umschraubung und eine Spiegelung an einer Ebene anknüpfen:

„Eine jede nicht-involutorische Umlegung mit unendlich fernem Mittelpunkt kann auf ∞^1 Arten dargestellt werden durch eine Spiegelung an einer Ebene und eine mit dieser Spiegelung vertauschbare Umschraubung. Die Spiegelungsebene steht senkrecht sowohl auf der Mittelebene der gegebenen Umlegung, als auch auf der Richtung des unendlich fernen Mittelpunktes; sie durchdringt die Mittelebene in der Umschraubungsaxe. Die Höhe der Umschraubung ist identisch mit der Grösse der Schiebung, auf die sich die Umlegung für die Punkte ihrer Mittelebene reducirt.“

Wird dagegen die Umlegung involutorisch, d. h., geht sie in eine Spiegelung an einer Ebene über, so gibt es, wie wir bereits gesehen haben, ∞^2 Darstellungen der im Satze genannten Art. Die zugehörigen Umschraubungen reduciren sich auf Umwendungen.

Durch eine Spiegelung an einem Punkt und eine mit ihr vertauschbare Umschraubung endlich ist eine Umlegung nur dann darstellbar, wenn sie selbst eine Spiegelung an einer Ebene ist:

„Eine jede Spiegelung an einer Ebene kann auf ∞^2 Arten dargestellt werden durch eine Spiegelung an einem Punkt und eine mit ihr vertauschbare Umwendung; die Umwendungsaxe steht auf der Ebene der gegebenen Spiegelung senkrecht, und durchdringt sie in dem zugehörigen Spiegelungsmittelpunkt.“

Auch dieses Ergebniss hat sich uns schon früher in einem anderen Zusammenhange eingestellt.

Die in gegenwärtigem Paragraphen entwickelten Sätze ermöglichen es, zwei oder mehr Bewegungen und Umlegungen zusammenzusetzen. Wir überlassen es dem Leser, sich diese noch in mannigfacher Weise ausführbaren Constructionen deutlich zu machen.

§ 11.

Fortsetzung. — Zusätze zur Theorie der Bewegungen.

Ein Theil des Inhaltes der in § 10 entwickelten Sätze lässt sich noch in eine andere Form bringen, die für manche Zwecke dienlicher ist; man gelangt dahin, wenn man die Drehungen und Umschraubungen ihrerseits wieder in je zwei Spiegelungen zerfällt. Wir kommen so zur Lösung der Aufgabe:

„*Eine gegebene Umlegung auf alle möglichen Arten in drei auf einander folgende Spiegelungen zu zerlegen.*“

Zunächst geht aus dem ersten der hervorgehobenen Doppelsätze (S. 491) das folgende Theorem hervor:

Eine jede Umlegung kann auf ∞^3 Arten, oder, wenn sie eine Spiegelung an einer Ebene ist, auf ∞^4 Arten zerlegt werden in drei auf einander folgende Spiegelungen an Ebenen des Raumes.

Ist die Umlegung S umgekehrt durch die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen an Ebenen gegeben, so ist der Schnittpunkt dieser Ebenen der Mittelpunkt der Umlegung. Auch die Mittelebene, die Winkel ϑ, ϑ' u. s. w. können sofort gefunden werden, durch eine Construction, die der in § 3 angegebenen Construction der Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen in der Ebene genau entspricht.

Schneiden sich die drei Spiegelungsebenen rechtwinklig, so wird S eine Spiegelung an einem Punkt; gehören sie demselben Büschel an, so wird S eine Spiegelung an einer Ebene.

Eine jede Umlegung kann auf ∞^3 Arten, oder, wenn sie eine Spiegelung an einem Punkt ist, auf ∞^4 Arten in drei Spiegelungen zerlegt werden, von denen entweder die erste oder die zweite oder die dritte eine Spiegelung an einem Punkt ist, während die beiden anderen Spiegelungen an Ebenen sind.

Nennen wir S_x, S_y, S_z die Spiegelungen an den Punkten x, y, z

und bezeichnen wir ebenso mit S_u, S_v, S_w die Spiegelungen an den Ebenen u, v, w, so haben wir drei Darstellungen der Umlegung S von folgender Form:

$$S = S_x S_{v_1} S_w, \qquad S = S_u S_y S_w, \qquad S = S_u S_{v_2} S_z.$$

Diese Formeln geben uns den Zusammenhang der Doppelsätze auf S. 491 unten und S. 492 an; vereinigen wir nämlich zwei aufeinanderfolgende Spiegelungen in dieser Weise:

$$S = S_x (S_{v_1} S_w), \qquad S = (S_u S_{v_2}) S_z,$$

so kommen wir auf die Darstellung einer Umlegung durch eine Spiegelung an einem Punkt und eine Drehung; fassen wir aber zwei Spiegelungen einmal nach Angabe der Formeln

$$S = (S_x S_{v_1}) S_w, \qquad S = (S_u S^y) S_w,$$

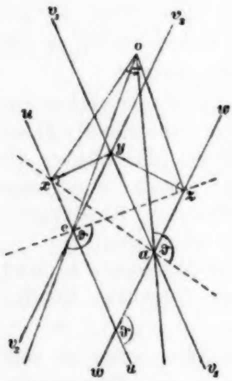
dann nach Angabe der Formeln

$$S = S_u (S_y S_w), \qquad S = S_u (S_{v_2} S_z)$$

zusammen, so kommen wir zur Darstellung von S durch eine Spiegelung an einer Ebene und eine Umschraubung.

Umgekehrt finden wir leicht den Mittelpunkt, die Mittelebene u. s. w. der Umlegung S, wenn S in der angegebenen Weise durch die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen definirt ist.

Seien z. B. u, y und w gegeben, so dass $S = S_u S_y S_w$; so nennen wir x und z insbesondere die Fusspunkte der von y auf u und w gefällten Lothe, v_1 und v_2 die zu u und w parallelen Ebenen des Punktes y. Man hat dann zugleich



$$S = S_x S_{v_1} S_w, \; S = S_u S_{v_2} S_z.$$

Die Ebene $x\,y\,z$ ist die Mittelebene der Umlegung, der Mittelpunkt o aber wird so gefunden: Man verbinde in der Mittelebene den Punkt x mit der Spur a der Geraden (v_1, w) und den Punkt z mit der Spur c der Geraden (u, v_2). Man errichte dann auf diesen beiden Verbindungslinien in x und z Senkrechte, und lege ausserdem in a und c an die Geraden ax und cz den Winkel ϑ, bez. $-\vartheta$ der Ebenen u und w an, wie in der nebenstehenden Figur angegeben ist. Die vier so construirten Geraden gehen durch den Mittelpunkt o der Umlegung; zugleich ist $\sphericalangle xoa = \sphericalangle coz$ der halbe Winkel ϑ' der Drehung, die mit der Spiegelung an der Ebene xyz zusammen die Umlegung S erzeugt.

Sind bei irgend einer der drei Zerlegungen die beiden Spiegelungsebenen parallel, so ist S eine Spiegelung an einem Punkt; gehen beide Ebenen durch den Spiegelungspunkt, und stehen sie ausserdem auf einander senkrecht, so ist S eine Spiegelung an einer Ebene.

Sätze specielleren Charakters erhält man wieder, wenn man eine Umlegung in drei auf einander folgende Spiegelungen zu zerfällen verlangt, von denen mindestens zwei Spiegelungen an Punkten sind:

„Jede Umlegung mit unendlich fernem Mittelpunkt kann auf ∞^4 Arten zerlegt werden in drei auf einander folgende Spiegelungen, von denen entweder die erste oder die zweite oder die dritte eine Spiegelung an einer Ebene ist, während die beiden anderen Spiegelungen an Punkten sind.“

Die Spiegelungsebene ist in allen Fällen parallel zur Mittelebene der Umlegung S; die Verbindungslinie der Spiegelungspunkte ist auf der Mittelebene senkrecht, wenn S eine Spiegelung an dieser Ebene ist; statt der beiden Punktspiegelungen kann man auch eine Schiebung setzen, u. s. w., u. s. w.

Einen noch specielleren Charakter endlich hat der Satz:

„Jede Spiegelung an einem Punkt kann auf ∞^6 Arten zerlegt werden in drei auf einander folgende Spiegelungen an Punkten des Raumes.“ —

Die im vorigen Paragraphen behandelte Zerlegung einer Umlegung in Bewegungen und Umlegungen von besonderer Art ist ein Seitenstück zu der in § 5 entwickelten Theorie der Zerspaltung einer Bewegung in zwei besondere Bewegungen. Man kann aber noch eine andere Analogie zwischen der Theorie der Bewegungen und der Theorie der Umlegungen finden, indem man eine gegebene Bewegung auf alle möglichen Arten in zwei Umlegungen zerfällt, und nun diese Umlegungen in geeigneter Weise specialisirt.

Besonders hervorgehoben zu werden verdienen einige Sätze, die uns die aus § 5 bekannten Eigenschaften der Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und T in einem neuen Lichte zeigen.

Jede Bewegung S kann auf ∞^3 Arten in zwei Umlegungen zerspalten werden, von denen die zweite eine Spiegelung an einer Ebene ist.	*Jede Bewegung S kann auf ∞^3 Arten in zwei Umlegungen zerspalten werden, von denen die erste eine Spiegelung an einer Ebene ist.*
Der Spiegelungsebene entspricht dabei der Mittelpunkt und die Mittelebene der ersten Umlegung in den Transformationen T^{-1} und $\mathfrak{T}_2^{-1}$.	*Der Spiegelungsebene entspricht dabei der Mittelpunkt und die Mittelebene der zweiten Umlegung in den Transformationen T und $\mathfrak{T}_1$.*

Mittelpunkt und Mittelebene der ersten (zweiten) Umlegung sind einander also wechselsweise in dem Nullsystem $\mathfrak{W}$ zugeordnet, das zu dem Mittelcomplex der Bewegung S gehört; die Drehungsaxe aber ist ein Strahl des Sehnencomplexes von S.

Die Ebene der Spiegelung kann man unter allen Umständen willkürlich annehmen; dadurch ist dann die Zerlegung der Bewegung S völlig bestimmt.

Ist S eine *Umschraubung*, aber nicht zugleich eine Drehung, so hat die etwa im Satze links genannte Umlegung einen völlig bestimmten Mittelpunkt. Sie hat ferner auch eine völlig bestimmte Mittelebene, wenn die Ebene der Spiegelung auf der Umschraubungsaxe nicht senkrecht steht. Die Mittelebene ist nämlich die zur Spiegelungsebene rechtwinklige Ebene der Umschraubungsaxe n. Wenn aber die Ebene der Spiegelung die Axe n unter einem rechten Winkel trifft, so wird die Umlegung eine Spiegelung an einem Punkte der Axe n; sie hat dann also eine unbestimmte Mittelebene.

Ist S eine *Drehung*, aber nicht zugleich eine Umschraubung, so hat die in Rede stehende Umlegung eine bestimmte Mittelebene. Wenn die Ebene der Spiegelung die Drehungsaxe n nicht enthält, so hat die Umlegung auch einen bestimmten Mittelpunkt: den Schnittpunkt der Spiegelungsebene und der Axe n. Wenn aber die Spiegelungsebene durch die Axe n hindurchgeht, so wird die Umlegung selbst eine Spiegelung an einer Ebene; sie hat also unendlich viele Mittelpunkte.

Dies Alles gilt insbesondere auch dann, wenn die Axe n unendlich fern liegt, wenn also S in eine Schiebung übergeht.

Ist S endlich eine *Umwendung*, also Umschraubung und Drehung zugleich, so sind drei Fälle zu unterscheiden: Wenn die Ebene der Spiegelung weder durch die Umwendungsaxe noch durch die zu ihr senkrechte unendlich ferne Gerade geht, so hat die besprochene Umlegung einen bestimmten Mittelpunkt — den Schnittpunkt der Umwendungsaxe n und der Spiegelungsebene — sie hat ferner eine bestimmte Mittelebene — die zur Spiegelungsebene senkrechte Ebene der Axe n. Wenn die Spiegelungsebene auf der Axe n senkrecht ist, so wird die Mittelebene unbestimmt; wenn endlich die Spiegelungsebene die Axe n enthält, so wird der Mittelpunkt der Umlegung unbestimmt.

Jede Bewegung S kann auf ∞^3 Arten in zwei Umlegungen zerfällt werden, von denen die zweite eine Spiegelung an einem Punkt ist.

Dem Mittelpunkt der ersten Umlegung entspricht dabei der Spiegelungsmittelpunkt in der affinen Transformation $\mathfrak{T}_1$.

Jede Bewegung S kann auf ∞^3 Arten in zwei Umlegungen zerfällt werden, von denen die erste eine Spiegelung an einem Punkt ist.

Dem Mittelpunkt der zweiten Umlegung entspricht dabei der Spiegelungsmittelpunkt in der affinen Transformation $\mathfrak{T}_2^{-1}$.

Ferner entspricht z. B. im Satze links der Mittelebene der ersten Umlegung der Spiegelungspunkt in einer dualistischen Transformation, aber in einer ausgearteten: Die Mittelebene der Umlegung ist *die* Ebene ihres Mittelpunktes, die auf der Schraubenaxe n der Bewegung S senkrecht steht.

Eine Sonderstellung diesem Satze gegenüber nimmt nur der Fall ein, wo S eine Umschraubung ist. Nimmt man den Spiegelungsmittelpunkt auf der Umschraubungsaxe n an, so wird die andere Umlegung eine Spiegelung an einer Ebene senkrecht zur Axe n; sie hat also in diesem Falle unendlich viele Mittelpunkte. —

Die angegebenen Sätze lassen sich mit der in § 5 entwickelten Theorie in einen noch engeren Zusammenhang bringen, wenn man die Bewegung S auf alle möglichen Arten in vier involutorische Umlegungen zerspaltet.

So ist in dem Satz:

„*Jede Bewegung kann auf* ∞^6 *Arten durch vier aufeinanderfolgende Spiegelungen an Ebenen des Raumes ersetzt werden*"

sowohl die Zerlegung von S in zwei Drehungen enthalten, als auch die Zerspaltung von S in zwei Umlegungen, deren eine eine Spiegelung an einer Ebene ist. Entsprechendes gilt von dem Satz:

„*Jede Bewegung kann auf* ∞^6 *Arten durch vier involutorische Umlegungen dargestellt werden, von denen eine eine Spiegelung an einem Punkt ist, während die drei anderen Spiegelungen an Ebenen sind.*"

Von hier aus kommt man einmal zur Zerlegung von S in eine Umschraubung und eine Drehung, dann zur Zerlegung von S in eine Spiegelung an einem Punkt oder an einer Ebene und in eine andere Umlegung. Die zweite dieser Zerlegungen und die dritte zum Theil kann aber auch dem folgenden Satz angeschlossen werden:

„*Jede Bewegung, die keine Schiebung ist, kann auf* ∞^6 *Arten und jede Schiebung auf* ∞^7 *Arten in vier involutorische Umlegungen zerspalten werden, von denen zwei Spiegelungen an Punkten und zwei Spiegelungen an Ebenen sind.*"

Zugleich ergibt sich hieraus die von uns nicht besonders hervorgehobene Zerlegung von S in eine Drehung und eine Schiebung, und die mit Absicht bei Seite gelassene Zerlegung von S in zwei Umschraubungen.

Einen specielleren Charakter als die drei genannten aber haben zwei weitere Sätze der Art, die der Vollständigkeit halber ebenfalls aufgeführt werden sollen:

„Jede Umschraubung kann auf ∞^7 Arten in vier involutorische Umlegungen zerspalten werden, von denen eine eine Spiegelung an einer Ebene ist, während die drei anderen Spiegelungen an Punkten sind."

„Jede Schiebung kann auf ∞^9 Arten in vier auf einander folgende Spiegelungen an Punkten zerlegt werden."

Alle diese Sätze, die für die Einsicht in den inneren Zusammenhang der Theorie von Bedeutung sind, lassen sich leicht an unsere bisherigen Entwickelungen anknüpfen; man kann sich leicht Rechenschaft geben von der Lage der Spiegelungsebenen und der Spiegelungspunkte.

Man kann aber auch den Gedankengang umkehren, indem man die involutorischen Transformationen an die Spitze stellt; das sind jetzt, wo es sich um eine zusammenhängende Entwickelung der Theorie der Bewegungen *und* Umlegungen handelt, die Umwendungen und die Spiegelungen. Wie der Verfasser sich überzeugt hat, kommt man auch auf diesem Wege ohne grosse Mühe zu den Eigenschaften der mit $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T u. s. w. bezeichneten Transformationen. Natürlich erhält bei einer solchen Veränderung des Standpunktes die ganze Theorie einen anderen Charakter. Die Spiegelungen, die von drei Constanten abhängen, erscheinen einfacher als die Umwendungen, die vier Constante haben, und die Umlegungen, die durch drei Spiegelungen darstellbar sind, einfacher als die Bewegungen, zu deren Ausdruck man vier Spiegelungen braucht.

Vielleicht ist es zweckmässig, an die Spitze der ganzen Theorie die Aufgabe zu stellen: „*Die identische Transformation auf alle möglichen Arten in vier, sechs, . . . Spiegelungen zu zerlegen.*"

Denn an dieses Problem, das nicht so speciell ist, wie es auf den ersten Blick wohl scheinen mag, lassen sich sehr leicht zahlreiche weitere Entwickelungen anschliessen.

Wir dürfen uns um so eher mit diesen Andeutungen begnügen, als die ferneren Untersuchungen H. Wiener's weiteren Aufschluss über diese Fragen zu geben versprechen. Wir heben nur noch eine naheliegende Bemerkung hervor, weil sie uns wieder vor Augen bringt, welche ausgezeichnete Stellung die Umschraubungen und die Drehungen zusammen in der Theorie der Bewegungen einnehmen:

Die Umschraubungen und die Drehungen sind die einzigen Bewegungen, die schon durch zwei Spiegelungen darstellbar sind.

Man überzeugt sich sofort davon, dass unter diesen Transformationen wiederum die *Umwendungen* und die *Schiebungen* ein besonderes Verhalten zeigen.

§ 12.

Die Bewegungen im Strahlenbündel.

In mehreren Sätzen der §§ 10 und 11 erkennt man Verallgemeinerungen der in § 3 entwickelten Theorie. Um in dieses für das Verständniss der Lehre von den Bewegungen und Umlegungen wichtige Verhältniss einen deutlichen Einblick zu gewinnen, betrachten wir die Bewegungen und Umlegungen, bei denen ein im Endlichen gelegener Punkt o des Raumes in Ruhe bleibt, indem wir diese Transformationen als Zuordnungen zwischen den Strahlen oder Ebenen des Punktes o auffassen.

Die Umlegungen, die den Punkt o in Ruhe lassen, entstehen aus den Drehungen um Axen des Punktes o einfach dadurch, dass man vor oder nach einer Drehung die Spiegelung an dem Punkt o ausführt. Diese involutorische Transformation ist also mit allen unseren Bewegungen und Umlegungen vertauschbar; sie ist eine ausgezeichnete Transformation der betrachteten Gruppe (die einzige neben der identischen Transformation). Da bei ihr alle Strahlen und Ebenen des Punktes o in Ruhe bleiben, so folgt, dass für die Strahlen und Ebenen des Bündels o ein Unterschied zwischen Bewegungen und Umlegungen nicht besteht: Führt man die Strahlen oder Ebenen von o als Raumelemente ein, so erhält man eine irreducibele Schaar, eine continuirliche Gruppe von ∞^3 Transformationen. Sie mögen als *„Bewegungen im Strahlenbündel"* bezeichnet werden.

Beim Studium dieser Gruppe haben wir vor Allem darauf zu achten, dass ihre Transformationen von der dualistischen Transformation $\mathfrak{P}$ des zu dem Bündel o gehörigen absoluten Polarsystems in Ruhe gelassen werden. Die Beziehung zwischen einem Strahl g und der auf ihm senkrechten Ebene γ des Punktes o, also zwischen Pol und Polare in Bezug auf den imaginären sogenannten absoluten Kegel des Punktes o ist invariant gegenüber allen Bewegungen des Bündels o; diese bilden die Gesammtheit *aller* collinearen Transformationen der Strahlen unseres Bündels, die mit der dualistischen Transformation $\mathfrak{P}$ vertauschbar sind.

In der Transformation $\mathfrak{P}$ entsprechen einander wechselweise:

Zwei Strahlen g, g'. —	Ihre Polarebenen γ, γ'. —
Die beiden Winkelhalbirenden (Strahlen) $\bar{g}$ und $\bar{\bar{g}}$ von g und g'. —	Die beiden Winkelhalbirenden (Ebenen) $\bar{\gamma}$ und $\bar{\bar{\gamma}}$ von γ und γ'. —
Die beiden *„Normalebenen"* $\bar{\gamma}$ und $\bar{\bar{\gamma}}$ des Strahlenpaars g, g', das sind die Polarebenen von $\bar{g}$	Die beiden *„Normalstrahlen"* $\bar{g}$ und $\bar{\bar{g}}$ des Ebenenpaars γ, γ', das sind die Pole von $\bar{\gamma}$ und $\bar{\bar{\gamma}}$, also

und $\bar{\bar{g}}$, also Ebenen, die bez. durch $\bar{\bar{g}}$ und $\bar{g}$ gehen und auf der Ebene von g und g' senkrecht stehen.

Strahlen, die bez. in $\bar{\bar{\gamma}}$ und $\bar{\gamma}$ liegen und auf der Schnittlinie von γ und γ' senkrecht stehen.

Lassen wir nun g, g' ein Paar von Strahlen bedeuten, die sich in einer Bewegung S des Strahlenbündels entsprechen, und betrachten wir die Bewegung s oder die Umlegung σ des Raumes, die die Strahlen unseres Bündels in der vorgeschriebenen Weise vertauscht. Dann wird im ersten Falle (s) etwa die Winkelhalbirende $\bar{g}$ der Ort der zu den Punkten von g, g' gehörigen Sehnenmitten, und die Normalebene $\bar{\bar{\gamma}}$ (die Polare der anderen Winkelhalbirenden $\bar{\bar{g}}$) wird die gemeinsame Normalebene der genannten Sehnen; im Falle der Umlegung (σ) aber wird $\bar{\bar{g}}$ der Ort der Sehnenmitten, und $\bar{\gamma}$ wird die Normalebene aller zu g, g' gehörigen Sehnen. Wir haben also bereits gewonnene Erkenntnisse nur anders anzuordnen, um zu dem Satze zu gelangen:

Bei einer Bewegung S des Strahlenbündels zeigen die beiden Winkelhalbirenden und Normalen von je zwei entsprechenden Strahlen oder Ebenen ein verschiedenes Verhalten.

Die Winkelhalbirenden erster Art $\bar{g}$ aller Paare g, g' zugeordneter Strahlen erfüllen entweder das ganze Strahlenbündel — oder sie vereinigen sich in einem und demselben Strahl (der Drehungsaxe von S).

Die Winkelhalbirenden erster Art $\bar{\gamma}$ aller Paare γ, γ' zugeordneter Ebenen erfüllen entweder das ganze Ebenenbündel — oder sie vereinigen sich in einer und derselben Ebene (der sogleich zu definirenden Mittelebene von S).

Die Winkelhalbirenden zweiter Art $\bar{\bar{g}}$ liegen dagegen unter allen Umständen in einer bestimmten Ebene, nämlich in der Polarebene der Drehungsaxe, der „Mittelebene" der Bewegung S.

*Die Winkelhalbirenden zweiter Art $\bar{\bar{\gamma}}$ gehen dagegen unter allen Umständen durch einen bestimmten Strahl, nämlich durch die Drehungsaxe der Bewegung S.**)

Die Normalebenen erster Art $\bar{\gamma}$ ferner erfüllen entweder das ganze Ebenenbündel, oder sie vereinigen sich in einer einzigen Ebene (der Mittelebene).

Die Normalstrahlen erster Art $\bar{g}$ ferner erfüllen entweder das ganze Strahlenbündel, oder sie vereinigen sich in einem einzigen Strahl (der Drehungsaxe).

*) Man kann die beiden Winkelhalbirenden so unterscheiden: Projicirt man entsprechende Strahlenbüschel von γ und γ' (orthogonal) auf die Winkelhalbirende erster Art $\bar{\gamma}$, so entstehen in dieser gleichstimmig-projective Strahlenbüschel; projicirt man sie auf die Winkelhalbirende zweiter Art $\bar{\bar{\gamma}}$, so entstehen Strahlenbüschel von entgegengesetztem Drehungssinn. Entsprechende Unterschiede bestehen natürlich auch bei den anderen im Texte behandelten Gebilden.

Dagegen gehen die Normalebenen zweiter Art $\bar{\bar{\gamma}}$ unter allen Umständen durch einen bestimmten Strahl, nämlich durch die Drehungsaxe der Bewegung.

Dagegen liegen die Normalstrahlen zweiter Art $\bar{\bar{\gamma}}$ unter allen Umständen in einer bestimmten Ebene, nämlich in der Mittelebene der Bewegung.

Die im Satze genannten besonderen Fälle treten dann ein, wenn die Bewegung S involutorisch wird; wenn also die mit der Bewegung S des Strahlenbündels verbundene Bewegung s des Raumes in eine Umwendung um eine Axe des Punktes o, und gleichzeitig die zugehörige Umlegung σ in eine Spiegelung an einer Ebene (der Polarebene jener Umwendungsaxe) übergeht.

An das Gesagte schliessen sich nun naturgemäss die weiteren Sätze an:

Mit jeder nicht-involutorischen Bewegung S des Strahlenbündels sind zwei vertauschbare collineare Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ des Bündels verknüpft, die hinter einander ausgeführt die Bewegung erzeugen:

(1) $$\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 = S = \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_1.$$

Die Transformation $\mathfrak{T}_1$ ordnet jedem Strahle g des Bündels die Winkelhalbirende $\bar{g}$ erster Art des Strahlenpaars g, g' zu.

Die Transformation $\mathfrak{T}_2$ ordnet jeder Ebene γ des Bündels die Winkelhalbirende $\bar{\gamma}$ erster Art des Ebenenpaars γ, γ' zu.

Die Transformation $\mathfrak{T}_2^{-1}$ ordnet jedem Strahle g' des Bündels die Winkelhalbirende $\bar{g}$ erster Art des Strahlenpaars g, g' zu.

Die Transformation $\mathfrak{T}_1^{-1}$ ordnet jeder Ebene γ' des Bündels die Winkelhalbirende $\bar{\gamma}$ erster Art des Ebenenpaars γ, γ' zu.

In Zeichen:

(2) $$g\{\mathfrak{T}_1\}\,\bar{g}\{\mathfrak{T}_2\}\,g', \quad \gamma\{\mathfrak{T}_2\}\,\bar{\gamma}\{\mathfrak{T}_1\}\,\gamma'.$$

Ferner:

Mit jeder nicht-involutorischen Bewegung S des Strahlenbündels sind zwei dualistische Transformationen T, T' des Bündels verknüpft, deren jede, zweimal hinter einander ausgeführt, die Bewegung S erzeugt:

(3) $$S = T^2, \quad S = T'^2.$$

Die Transformation T ordnet jedem Strahl g die Normalebene $\bar{\gamma}$ erster Art des Strahlenpaars g, g', und dieser Ebene wiederum den Strahl g' zu.

Die Transformation T' ordnet jeder Ebene γ den Normalstrahl $\bar{g}$ erster Art des Ebenenpaars γ, γ', und diesem Strahl wiederum die Ebene γ' zu.

In Zeichen:

(4) $$g\{T\}\,\bar{\gamma}\{T\}\,g', \quad \gamma\{T'\}\,\bar{g}\{T'\}\,\gamma'.$$

Zwischen den Transformationen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, T, T'$ bestehen folgende einfache Beziehungen:

Die Transformationen T und T' werden von der dualistischen Transformation $\mathfrak{P}$ des absoluten Polarsystems unter einander vertauscht:

$$T' = \mathfrak{P} T \mathfrak{P}, \quad T = \mathfrak{P} T' \mathfrak{P}. \tag{5}$$

Die collinearen Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ lassen sich aus den dualistischen Transformationen T und $\mathfrak{P}$, und ebenso auch aus T' und $\mathfrak{P}$ zusammensetzen:

$$\begin{cases} \mathfrak{T}_1 = T\mathfrak{P}, & \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{P} T, \\ \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{P} T', & \mathfrak{T}_2 = T'\mathfrak{P}. \end{cases} \tag{6}$$

$\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ werden daher durch jede der dualistischen Transformationen $T, \mathfrak{P}, T'$ unter einander vertauscht; in Zeichen:

$$\begin{cases} \mathfrak{T}_1 T = T\mathfrak{T}_2, & \mathfrak{T}_1 \mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{T}_2, & \mathfrak{T}_1 T' = T'\mathfrak{T}_2, \\ T\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 T, & \mathfrak{P}\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2\mathfrak{P}, & T'\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 T'. \end{cases} \tag{7}$$

Die Bedeutung der Transformationen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, T, T'$ wird weiter aufgeklärt durch die folgenden Bemerkungen:

Man kann eine jede Bewegung S im Strahlenbündel auf ∞^2 Arten in zwei Bewegungen zerlegen, deren zweite involutorisch ist.

Der Drehungsaxe der ersten Bewegung entspricht die Drehungsaxe und die Mittelebene der zweiten in den Transformationen $\mathfrak{T}_1$ und T.

Der Mittelebene der ersten Bewegung entspricht die Mittelebene und die Drehungsaxe der zweiten in den Transformationen $\mathfrak{T}_2$ und T'.

Man kann eine jede Bewegung S im Strahlenbündel auf ∞^2 Arten in zwei Bewegungen zerlegen, deren erste involutorisch ist.

Der Drehungsaxe der zweiten Bewegung entspricht die Drehungsaxe und die Mittelebene der ersten in den Transformationen $\mathfrak{T}_2^{-1}$ und T^{-1}.

Der Mittelebene der zweiten Bewegung entspricht die Mittelebene und die Drehungsaxe der ersten in den Transformationen $\mathfrak{T}_1^{-1}$ und T'^{-1}.

Verlangen wir, dass die Zerlegung links übereinstimmt mit der Zerlegung rechts, so kommen wir auf einen in anderem Zusammenhange (S. 493) schon hervorgehobenen Satz, der hier der Deutlichkeit halber wiederholt werden mag:

Jede Bewegung S im Strahlenbündel kann auf ∞^1 Arten in zwei involutorische Bewegungen zerlegt werden.

Die zugehörigen Drehungsaxen liegen in der Mittelebene von S, und schliessen den halben Drehungswinkel ein.

Die zugehörigen Mittelebenen gehen durch die Drehungsaxe von S, und schliessen den halben Drehungswinkel ein.

Auf diesen Satz gründet sich in bekannter Weise die Zusammensetzung der Bewegungen im Strahlenbündel. —

Die untersuchten Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T, T' lassen sich als besondere Fälle allgemeinerer Transformationen auffassen, die an gewissen Eigenschaften jener theilnehmen. Die Theorie dieser Transformationen ist ganz ähnlich der in § 7 enthaltenen Theorie der Transformationen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, t, die zu einer Bewegung des dreifach ausgedehnten Raumes gehören.

Durch irgend eine Axe n des Punktes o oder durch deren Polarebene ν ist eine eingliedrige Gruppe Γ_1 von Bewegungen des Strahlenbündels bestimmt, die Gruppe aller Drehungen um die Axe n.

Durch die Axe n ist ferner eine eingliedrige Gruppe G_1 von perspectiven Transformationen des Strahlenbündels bestimmt, nämlich die Gruppe aller der perspectiven Transformationen, deren Perspectivitätsaxe die Gerade n und deren Perspectivitätsebene die Ebene ν ist.

Seien g und g^* zwei Strahlen des Punktes o, die mit n in einer Ebene liegen, so ist die allgemeine Transformation $\mathfrak{r}$ von G_1 durch die Zuordnung $g\{\mathfrak{r}\}\,g^*$ bestimmt, sofern man festsetzt, dass das Verhältniss $\operatorname{tg}(g, n) : \operatorname{tg}(g^*, n)$ einen von der Lage des Strahles g unabhängigen Werth λ haben soll. Für $\lambda = -1$ ergibt sich der erste Theil des Satzes:

Die Gruppen G_1 und Γ_1 durchdringen sich, ausser in der identischen Transformation, in der durch die Axe n bestimmten involutorischen Bewegung.

Durch Zusammensetzung der Transformationen von G_1 und Γ_1 entsteht eine zweigliedrige continuirliche Gruppe G_2 vertauschbarer Transformationen — die Gruppe aller der linearen Transformationen $\mathfrak{t}$ des Bündels, die die Ebenen der Axe n und die Strahlen der Ebene ν ebenso unter einander vertauschen, wie die Bewegungen der Gruppe Γ_1.

Bezeichnen wir mit γ und γ^* die Polarebenen der besprochenen Strahlen g und g^*, und mit g_1 und g_1^* die Spuren dieser Ebenen in der Ebene durch g und n, so haben wir $\operatorname{ctg}(\gamma, n) : \operatorname{ctg}(\gamma^*, n) = \lambda$, oder $\operatorname{tg}(g_1, n) : \operatorname{tg}(g_1^*, n) = 1 : \lambda$; daraus folgt aber, dass die Transformation $\mathfrak{r}$ von G_1 durch die dualistische Transformation $\mathfrak{P}$ des absoluten Polarsystems mit ihrer entgegengesetzten Transformation vertauscht wird:

$$(8) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{r}^{-1}.$$

Hieraus ziehen wir den Schluss:

Setzt man alle Transformationen von G_1 mit der dualistischen Transformation $\mathfrak{P}$ des absoluten Polarsystems zusammen, so entsteht eine continuirliche Schaar H_1 von ∞^1 Polarsystemen — die Gesammtheit

aller Polarsysteme $\mathfrak{p}$, *die zu den Umdrehungskegeln mit der Axe* n *gehören.*

Die Schaar H_1 *der Transformationen* $\mathfrak{p}$ *bildet mit den Transformationen von* G_1 *zusammen eine Gruppe.*

Die Ordnungsfläche des Polarsystems

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{P}$$

hat imaginäre oder reelle Erzeugende, je nachdem der zu $\mathfrak{r}$ gehörige Werth von λ positiv oder negativ ist.

Setzt man alle Transformationen von Γ_1 *mit irgend einer der dualistischen Transformationen* $\mathfrak{p}$ *von* H_1 *zusammen, so entsteht eine Schaar* H_1 *von* ∞^1 *dualistischen Transformationen, deren jede den zu* $\mathfrak{p}$ *gehörigen Umdrehungskegel in sich selbst überführt.*

Die Gruppe Γ_1 *und die Schaar* H_1 *bilden zusammen eine Gruppe von vertauschbaren Transformationen.*

Solcher Schaaren H_1 *und Gruppen* Γ_1, H_1 *gibt es* ∞^1, *darunter eine, die aus dem absoluten Polarsystem* $\mathfrak{P}$ *hervorgegangen ist, und die daher den absoluten Kegel des Punktes* o *in Ruhe lässt.*

In der That, nennen wir S und B Transformationen von Γ_1, so haben wir in S, B, und $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{r}$ vertauschbare Transformationen vor uns; hieraus ergibt sich sofort der Satz. Geht $\mathfrak{r}$ in die identische Transformation über, so entsteht die zu dem absoluten Polarsystem gehörige, die Transformation $\mathfrak{P}$ enthaltende Schaar H_1. Die Umdrehungskegel mit der Axe n werden von den Transformationen dieser Schaar (wie von denen aller übrigen Schaaren H_1) paarweise vertauscht.

Setzt man alle Transformationen der Gruppe G_2 *mit irgend einer der Transformationen von* H_1, *oder alle Transformationen der Gruppe* G_1 *mit sämmtlichen Transformationen irgend einer der Schaaren* H_1, *oder endlich alle Transformationen von* Γ_1 *mit allen Transformationen von* H_1 *zusammen, so entsteht eine continuirliche Schaar* H_2 *von* ∞^2 *dualistischen Transformationen, deren jede den Inbegriff der Umdrehungskegel mit der Axe* n *in sich selbst überführt.*

Die Schaar H_2 *bildet zusammen mit der Gruppe* G_2 *wieder eine Gruppe (von nicht vertauschbaren Transformationen).*

Die allgemeine Transformation von H_2 lautet:

$$t = S\mathfrak{P}\mathfrak{r} = S\mathfrak{r}^{-1}\mathfrak{P}. \tag{9}$$

Man beweist leicht, dass zwei solche Transformationen nur dann vertauschbar sind, wenn sie derselben Schaar H_1 angehören.

Ueber die gegenseitige Beziehung der sechs Gruppen

$$G_1;\ \Gamma_1;\ G_2;\ -G_1,\ H_1;\ \Gamma_1,\ \mathsf{H}_1;\ G_2,\ H_2$$

gibt der folgende Satz Auskunft:

Die Gruppen G_1; G_1, H_1 und natürlich auch G_2 sind invariante Untergruppen der Gruppe G_2, H_2, die Gruppe Γ_1 aber ist überdies eine ausgezeichnete Untergruppe. Die ∞^1 Untergruppen Γ_1, H_1 sind unter einander gleichberechtigt.

Dies wird zum Theil näher erläutert durch die folgenden Bemerkungen:

Die Transformationen der Gruppe G_2 lassen sich in bestimmter Weise zu Paaren $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ ordnen.

Je zwei zusammengehörige werden durch sämmtliche Transformationen der Schaar H_2 unter einander vertauscht

$$(10) \qquad \mathfrak{t}_1 t = t\mathfrak{t}_2, \quad t\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 t.$$

Ferner sind $\mathfrak{t}_1^{-1}\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2^{-1}$ (entgegengesetzte) Transformationen der Gruppe G_1; endlich ergeben $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ hinter einander ausgeführt eine Transformation von Γ_1, eine Bewegung.

Umgekehrt kann jede Drehung um die Axe n auf ∞^1 Arten in zwei zusammengehörige Transformationen von G_2 zerlegt werden.

Sei $S^{\frac{1}{2}}$ eine der beiden Drehungen, die zweimal hinter einander angewendet die Drehung S erzeugen, so wird

$$(11) \qquad \mathfrak{t}_1 = S^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{r}, \quad \mathfrak{t}_2 = S^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{r}^{-1}$$

der allgemeine Ausdruck eines Paars zusammengehöriger Transformationen von G_2.

Seien g, g^*, g' drei Strahlen von o, die der Bedingung

$$g\{\mathfrak{t}_1\}\, g^*\{\mathfrak{t}_2\}\, g'$$

genügen, und seien γ, γ^*, γ' ihre Polarebenen, so hat man gleichzeitig

$$\gamma\{\mathfrak{t}_2\}\,\gamma^*\{\mathfrak{t}_1\}\,\gamma';$$

g^* ist ein Strahl der Normalebene zweiter Art $\overline{\overline{\gamma}}$ von g und g', und γ^* ist eine Ebene des Normalstrahls zweiter Art $\overline{\overline{g}}$ von γ und γ'.

Je zwei entgegengesetzte Transformationen der Gruppe G_1 bilden ein Paar zusammengehöriger Transformationen der Gruppe G_2; jede Transformation der Gruppe Γ_1 aber ist sich selbst zugeordnet.

Der Formel (9) können wir den Satz entnehmen:

Jede Transformation t der Schaar H_2 erzeugt, zweimal hintereinander ausgeführt, eine Transformation von Γ_1, eine Bewegung:

$$(12) \qquad S = t^2.$$

Umgekehrt kann jede Drehung um die Axe n auf ∞^1 Arten durch Wiederholung einer Transformation der Schaar H_2 erzeugt werden.

Jede dieser Transformationen t ordnet irgend einem Strahl g eine Ebene zu, die durch die Winkelhalbirende $\bar{\bar{g}}$ zweiter Art des Strahlenpaars g, g' hindurchgeht, und dieser Ebene ordnet sie wiederum dem Strahl g' zu. Sie ordnet ferner irgend einer Ebene γ einen Strahl zu, der in der Winkelhalbirenden zweiter Art $\bar{\bar{\gamma}}$ des Ebenenpaars γ, γ' liegt, und diesem Strahl ordnet sie wiederum die Ebene γ' zu.

Man wird bemerken, dass in der Theorie der Gruppe G_2, H_2 die sämmtlichen Polarsysteme $\mathfrak{p}$, oder die zugehörigen concentrischen Umdrehungskegel unter einander gleichberechtigt sind. Wir kehren jetzt zu unserem früheren Gedankengang zurück, indem wir das absolute Polarsystem $\mathfrak{P}$ auszeichnen.

Durch das absolute Polarsystem $\mathfrak{P}$ *werden jeder Zerlegung der Drehung* S *in zusammengehörige Transformationen von* G_2

$$S = \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_1$$

zwei bestimmte Darstellungsweisen derselben Bewegung durch Transformationen von H_2 *zugeordnet,*

$$S = t^2 \quad \textit{und} \quad S = t'^2.$$

Die Beziehung von t *und* t' *zu* $\mathfrak{t}_1$ *und* $\mathfrak{t}_2$ *wird ausgedrückt durch die Formeln*

$$\left\{\begin{aligned} t &= \mathfrak{t}_1 \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \mathfrak{t}_2, \\ t' &= \mathfrak{P} \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_2 \mathfrak{P}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Brauchen wir die Zeichen $g, g^*, g', \gamma, \gamma^*, \gamma'$ in der nämlichen Bedeutung, wie soeben (S. 505), so können wir die gegenseitige Beziehung der Transformationen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, t, t' und S vielleicht am Besten durch eine schematische Figur deutlich machen:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[r, "\mathfrak{t}_1"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathfrak{P}"'] \arrow[dr, "t" near start] & g^* \arrow[r, "\mathfrak{t}_2"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathfrak{P}"] \arrow[dr, "t'" near end] & g' \arrow[d, leftrightarrow, "\mathfrak{P}"] \\
\gamma \arrow[r, "\mathfrak{t}_2"'] \arrow[ur, "t'" near start] & \gamma^* \arrow[r, "\mathfrak{t}_1"'] \arrow[ur, "t" near end] & \gamma'
\end{tikzcd}$$

Dabei liegt g^*, wie gesagt, in der Ebene $\bar{\bar{\gamma}}$, und γ^* geht durch den Strahl $\bar{\bar{g}}$.

Die dargestellte Beziehung der Transformationen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, t und t' stimmt überein mit dem in den Formeln (2) und (4) ausgedrückten Zusammenhang der Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T, T'. Es gilt denn auch der Satz:

Die Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T, T' *bilden ein Quadrupel zusammengehöriger Transformationen* $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, t, t' *der Gruppe* G_2, H_2.

Man kann nämlich setzen

$$\mathfrak{T}_1 = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R},\quad \mathfrak{T}_2 = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}^{-1},\quad T = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}\mathfrak{P},\quad T' = S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{P},$$

sofern $\mathfrak{R}$ eine Transformation der Gruppe G_1 bedeutet, deren Parameter λ, je nach der Wahl von $S^{\frac{1}{2}}$, den Werth $\frac{1}{\cos\vartheta}$ oder den Werth $-\frac{1}{\cos\vartheta}$ hat. 2ϑ ist, wie immer, der Winkel der Drehung S. g^* und γ^* gehen jetzt, für alle Lagen des Strahles g, über in $\bar{g}$ und $\bar{\gamma}$.

§ 13.

Fortsetzung. — Nochmals die Bewegungen und Umlegungen in der Ebene.

Die bis auf den Wortlaut der meisten Sätze sich erstreckende Uebereinstimmung unserer letzten Betrachtungen mit denen des § 7 ist einer genaueren Erklärung bedürftig. Diese kann in den folgenden Ueberlegungen gefunden werden:

Die in § 7 *definirte Gruppe* G_3, H_3 *enthält eine invariante Untergruppe* G_2', H_2', *die holoëdrisch isomorph ist mit der in* § 12 *behandelten Gruppe* G_2, H_2.

Man sieht dies leicht, wenn man die in § 7 dargestellte Theorie etwas anders aufbaut, als es dort geschehen ist. Verbindet man die Transformationen der Gruppe G_1 (§ 7) nicht mit der Gruppe G_2 aller Schraubungen um die Axe n, sondern nur mit der Gruppe G_1' der Drehungen um diese Axe, so entsteht eine Gruppe G_2' von affinen Transformationen des Raumes, die die Strahlen irgend eines auf n angenommenen Punktes o genau ebenso vertauschen, wie die Transformationen der Gruppe G_2 des § 12. Fügt man nun zu den Transformationen von G_2' das Nullsystem $\mathfrak{W}$, und zu den Transformationen von G_2 das Polarsystem $\mathfrak{P}$, so entsteht im zweiten Falle die Gruppe G_2, H_2 des § 12, im ersten eine gewisse Gruppe G_2', H_2'. Beide Gruppen sind holoëdrisch-isomorph in dem engeren Sinne, in dem das Wort in der Galois'schen Theorie gebraucht wird; ihre Transformationen werden einander *eindeutig*-umkehrbar zugeordnet, wenn man die Transformationen von G_2 und G_2' in der angegebenen Weise auf einander bezogen hat, und wenn man dann auch noch die dualistischen Transformationen $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{P}$ einander zuordnet.

Die Schiebungen in der Richtung der Axe von n sind mit den Transformationen von G_2', H_2' vertauschbar; fügt man sie zu den

Transformationen von G_2', H_2' hinzu, so entsteht wieder die Gruppe G_3, H_3. Wir können also auch sagen:

Man kann die Gruppe G_3, H_3 des § 7 auf die Gruppe G_2, H_2 des § 12 in der Weise isomorph beziehen, dass man die Schiebungen parallel zur Axe n der identischen Transformation zuordnet.

In ganz ähnlicher Art kann man übrigens, wie nachträglich hervorgehoben werden mag, auch die den Entwickelungen des § 12 selbst zu Grunde liegende Anschauung ausdrücken; es gelten nämlich offenbar die folgenden beiden, wohl auseinanderzuhaltenden Sätze:

Man kann die Gruppe aller Bewegungen und Umlegungen im Raume auf die Gruppe aller Drehungen und Umlegungen um einen festen Punkt in der Weise isomorph beziehen, dass man die Schiebungen der identischen Transformation zuordnet.

Man kann die Gruppe der Bewegungen und Umlegungen im Raume auf die Gruppe der Bewegungen im Strahlenbündel in der Weise isomorph beziehen, dass man die Schiebungen und die Spiegelungen an Punkten der identischen Transformation zuordnet.

Es ist das eine unmittelbare Folge der Thatsache, dass die Punkte der unendlich fernen Ebene von den allgemeinsten Bewegungen und Umlegungen ganz ebenso unter einander vertauscht werden, wie von den Drehungen um einen festen Punkt. —

Nicht minder wichtig, als die Beziehung der Bewegungen im Strahlenbündel zu den Bewegungen und Umlegungen im Raume ist ihre allerdings ganz anders geartete Beziehung zu den Bewegungen und Umlegungen in der Ebene.

Man kann die Geometrie im Strahlenbündel o zur ebenen Geometrie durch eine dualistische Transformation des Raumes oder durch Centralprojection in Beziehung setzen. Wir wählen das zweite, der Anschauung zugänglichere Verfahren. Wir nehmen demnach jetzt irgend eine den Punkt o nicht enthaltende Ebene π fest an, und ersetzen jeden Strahl g des Punktes o durch seine Spur x in der Ebene π, und jede Ebene γ von o durch ihre Spurlinie u. Wir können dann die in § 12 entwickelte Theorie ohne Weiteres auf die Ebene π übertragen. *So entsteht eine geometrische Theorie der collinearen und dualistischen Transformationen eines Kegelschnittes in der Ebene* (zunächst eines imaginären Kreises), die natürlich auch unmittelbar begründet werden kann. Wir werden auf diesen Gegenstand bei späteren Gelegenheiten noch wiederholt zurückkommen müssen; für jetzt be-

schränken wir uns auf die Betrachtung eines Grenzfalles, der uns zu den Untersuchungen des § 2 und des § 3 zurückführt.

Wenn der Punkt o in bestimmter Richtung ins Unendliche rückt, so zerfällt die continuirliche Schaar der Bewegungen im Strahlenbündel o in zwei getrennte Schaaren. Diese gehen, wenn man die Strahlen und Ebenen des Punktes o durch ihre Spuren in einer zur Richtung von o senkrechten Ebene π ersetzt, in die Bewegungen und Umlegungen der Ebene π über.

Die Theorie der Bewegungen und Umlegungen in der Euclidischen Ebene kann mithin als ein Grenzfall der Theorie der Bewegungen im Strahlenbündel angesehen werden.*)

Man kann sich dies leicht in den Einzelheiten deutlich machen.

Wir bezeichnen, vor Ausführung unseres Grenzübergangs, mit x, $\bar{x}$, x', $\bar{\bar{x}}$ die Spuren der Strahlen g, $\bar{g}$, g', $\bar{\bar{g}}$ in der Ebene π, und mit u, $\bar{u}$, u', $\bar{\bar{u}}$ die Spuren der Polarebenen γ, $\bar{\gamma}$, γ', $\bar{\bar{\gamma}}$ jener Strahlen. (S. § 12, S. 501.) Dabei mögen etwa die Punkte x und x', die einander durch die Bewegung S des Strahlenbündels zugeordnet werden, im Endlichen liegen; sie sollen, während o in einer zu π senkrechten Richtung ins Unendliche rückt, festgehalten werden.

Nun muss im Grenzfalle offenbar eine der Geraden $\bar{u}$, $\bar{\bar{u}}$ in die unendlich ferne Gerade der Ebene π übergehen.

Nehmen wir zuerst an, dass die Gerade $\bar{u}$ in's Unendliche rückt: Dann erhalten wir, als Grenzfall der Bewegung S des Strahlenbündels, eine Bewegung der Ebene π. Der Mittelpunkt der Bewegung ist die Grenzlage des Schnittpunktes der Drehungsaxe n mit der Ebene π; die Mittelebene ν aber trifft π in der unendlich fernen Geraden. $\bar{x}$ wird die Mitte der Sehne xx', $\bar{\bar{x}}$ ihr unendlich ferner Punkt; $\bar{\bar{u}}$ wird die Normale der Sehne xx', während u und u' wiederum in die unendlich ferne Gerade übergehen.

Möge zweitens die Gerade $\bar{\bar{u}}$ in's Unendliche rücken: Dann entsteht eine Umlegung der Ebene π. Die Mittelgerade der Umlegung ist die Schnittlinie von π mit der Grenzlage der Mittelebene ν der

*) F. Klein, *Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie.* (Math. Ann. Bd. 4).

Der dort auf S. 602 hervorgehobene Satz, dass die reellen linearen Transformationen eines (allgemeinen, zu einem reellen Polarsystem gehörigen) Kegelschnittes in zwei getrennte Schaaren zerfallen, ist nur richtig für Kegelschnitte mit *reellen* Punkten. — Völlig unverständlich ist mir die Unterscheidung der linearen Transformationen eines Kegelschnittes in „eigentliche" und „uneigentliche", die Herr Lindemann in seinem kürzlich erschienenen, in vieler Hinsicht ausgezeichneten Werke vorgenommen hat. (Vorlesungen über Geometrie, II. Bd., Leipzig 1891, S. 382—385).

Bewegung des Strahlenbündels; die Grenzlage der Spur der Drehungsaxe aber wird der zur Mittelgeraden senkrechte unendlich ferne Punkt. $\bar{\bar{x}}$ wird die Mitte der Sehne xx', $\bar{x}$ ihr unendlich ferner Punkt. $\bar{u}$ wird die Normale der Sehne xx', während u und u', wie vorhin, mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

Wir haben hier den Grenzübergang in der Weise ausgeführt, dass wir zwei in der Ebene π gelegene Punkte x, x' festgehalten haben. Man kann aber ebensogut auch zwei zugeordnete Gerade u, u' festhalten. Die Punkte x, $\bar{x}$, x', $\bar{\bar{x}}$ fallen dann sämmtlich in's Unendliche. Gehen wir zu einer Bewegung über, so wird $\bar{\bar{u}}$ die Winkelhalbirende von u und u', die den Drehungsmittelpunkt enthält; $\bar{u}$ wird die andere Winkelhalbirende. Gehen wir zu einer Umlegung über, so wird $\bar{u}$ zur Mittelgeraden der Umlegung parallel und $\bar{\bar{u}}$ wird zu ihr senkrecht.

Alle diese Thatsachen können wir in einfacher Weise zusammenfassen:

Geht man von einer Bewegung des Strahlenbündels zu einer Bewegung der Ebene über, so gehen die collinearen Transformationen $\mathfrak{T}_1$ *und* $\mathfrak{T}_2$ *des Bündels in die ebenso bezeichneten affinen Transformationen der Ebene über; die dualistischen Transformationen* T *und* T' *hingegen arten aus.*

Geht man aber von einer Bewegung des Strahlenbündels zu einer Umlegung der Ebene über, so bleibt nur die mit T *bezeichnete dualistische Transformation erhalten; die Transformationen* $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ *und* T' *dagegen arten aus.*

Ein Theil der Eigenschaften einer Bewegung im Strahlenbündel findet sich also noch bei den Bewegungen der Ebene, ein anderer bei den Umlegungen; wieder andere Eigenschaften aber gehen im Grenzfall verloren. — In ähnlicher Weise kann man natürlich auch alle anderen Sätze des § 12 bis zur Grenze verfolgen. Die Durchführung dieses Gedankens mag dem Leser überlassen bleiben.

Um später hier anknüpfen zu können, müssen wir wenigstens erwähnen, dass wir den Uebergang von den Bewegungen und Umlegungen um einen festen Punkt o des Raumes zu den Bewegungen und Umlegungen einer Ebene noch in anderer Weise vollziehen können. Umschliessen wir nämlich den Punkt o mit einer Kugel, und betrachten wir dann deren Punkte als Raumelemente, so haben wir (bekanntlich) in den Bewegungen und Umlegungen dieser Fläche wieder eine dreigliedrige Gruppe, die im Grenzfall in die Gruppe der Bewegungen und Umlegungen einer Ebene übergeht. Wie man sieht, besteht zwischen beiden Arten der Verallgemeinerung der elementaren Geometrie ein wesentlicher Unterschied. In der Geometrie des Strahlenbündels tritt an Stelle der Bewegungen und Umlegungen der Ebene

eine *continuirliche Gruppe*, in der Geometrie der Kugelfläche aber haben wir nach wie vor eine Gruppe, die aus zwei *getrennten Schaaren* von Transformationen besteht. Diese Schaaren zerfallen beim Uebergang zur Ebene nicht, wie es die Bewegungen des Strahlenbüschels thun: Vielmehr gehen die Bewegungen der Kugel über in die Bewegungen der Ebene, und die Umlegungen der Kugel in die Umlegungen der Ebene.

Die Beziehung zwischen der continuirlichen Gruppe der Drehungen im Strahlenbündel und der aus zwei Schaaren bestehenden Gruppe der Drehungen und Umlegungen der Kugelfläche wird vermittelt durch die Spiegelung an dem Mittelpunkt der Kugel. Diese involutorische Transformation fehlt in der ersten Gruppe, in der zweiten aber ist sie ausgezeichnet enthalten. Sie eben wird bei der isomorphen Beziehung beider Gruppen der identischen Transformation zugeordnet. Beim Grenzübergang verschwindet sie: Hierdurch wird es ermöglicht, dass beide Gruppen, die continuirliche und die zerfallende, als Grenzlagen eine und dieselbe zerfallende Gruppe haben.

Wir haben es für nützlich gehalten, diese einfachen Verhältnisse so ausführlich zu besprechen, weil man sie sich in der That bisher nicht immer genügend klar gemacht zu haben scheint; bei späteren Gelegenheiten werden wir uns dafür desto kürzer fassen können.

Die Theorie der Bewegungen und die der Umlegungen in der Ebene werden nach dem Gesagten in der Theorie der Bewegungen des Strahlenbündels gewissermassen zu einer höheren Einheit verschmolzen; ein Gleiches ist aber nicht der Fall, wenn man die andere Art der Verallgemeinerung wählt.

Kann man nun auch die Bewegungen und Umlegungen im dreifach ausgedehnten Raume als Grenzfall einer sechsgliedrigen continuirlichen Gruppe auffassen? Die Antwort fällt bekanntlich verneinend aus: Wie man auch die Verallgemeinerung vollziehen möge, immer erhält man zwei getrennte Schaaren von Transformationen. Es besteht eben zwischen der metrischen Geometrie der Ebene und der des Raumes keine durchgreifende Analogie: Vielmehr kann man nur die Mannigfaltigkeiten gerader und die Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension in je eine Reihe stellen, deren Glieder unter sich engere Analogien darbieten — eine in der Theorie der quadratischen Formen längst bemerkte und mehrfach hervorgehobene Thatsache.

Doch mit solchen Betrachtungen überschreiten wir schon die dieser Arbeit gezogenen Grenzen.

II.

Von der Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen.

In gegenwärtigem Aufsatz handelt es sich zunächst um die Frage nach einer möglichst einfachen analytischen Darstellung der Bewegungen im dreifach ausgedehnten Raume. Es soll gezeigt werden, dass man diesen Transformationen acht homogene, durch eine quadratische Relation verbundene Parameter eindeutig-umkehrbar zuordnen kann, die ganz ähnliche Eigenschaften haben, wie Eulers Parameter der Drehungen um einen festen Punkt. Die gefundene Parameterdarstellung wird sodann auf die Umlegungen ausgedehnt; auch wird gezeigt, wie man aus den Formeln Eulers entsprechende Formeln für die Bewegungen und Umlegungen in der Ebene herleiten kann.

Vorbereitet sind diese Betrachtungen einmal durch gewisse Gedanken Cayleys und Cliffords über den Quaternionencalcul, und durch neuere Untersuchungen über Systeme von complexen Zahlen überhaupt, sodann in anderer Richtung durch die bekannten Arbeiten von Hermite, Cayley, Frobenius und Anderen über die Parameterdarstellung der linearen Transformationen einer quadratischen Form. Für den Verfasser lag der Ausgangspunkt in der Theorie der complexen Zahlen; sie ist auch die Grundlage der folgenden Darstellung. Die — übrigens in der Hauptsache leicht hindurchzusehenden — Beziehungen zu den anderen genannten Arbeiten werden wir ausführlich erst in einem späteren Abschnitt darlegen können, der von der Anwendung der Methoden der Invariantentheorie auf unseren Gegenstand handeln soll.

Die folgenden analytischen Entwickelungen sind, ihrer ganzen Anlage nach, von der im ersten Abschnitte vorgetragenen geometrischen Theorie unabhängig. Nur um der Kürze willen haben wir eine Anzahl von Sätzen einfach aus dem ersten Abschnitt herübergenommen, ohne sie mit den Hülfsmitteln der Analysis von Neuem herzuleiten.

Beide Abschnitte ergänzen sich wechselweise. Sie bilden in doppelter Hinsicht ein zusammenhängendes Ganzes. Erstens in methodischer Beziehung, insofern auch hier — durch ausschliessliche Anwendung rechtwinkliger Parallelcoordinaten — eine möglichst elementare Darstellung angestrebt worden ist. Zweitens sachlich, da hier wie dort die mit $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T u. s. w. bezeichneten linearen

und dualistischen Transformationen das Interesse vorzugsweise in Anspruch nehmen. Es zeigt sich jetzt eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Transformationen: Ihre Coefficienten werden, bei geeigneter Schreibart, höchst einfache *lineare* Functionen von 7 unabhängigen Verhältnissgrössen. Hiervon handeln drei in § 7 zusammengestellte Sätze. *Einer* von diesen ist schon vor fünfzig Jahren von Rodrigues erkannt und in seiner Bedeutung vollständig gewürdigt worden. Diese Entdeckung, die die Grundlage seiner originellen Theorie der Bewegungen bildet, ist indessen unbeachtet geblieben. —

Wegen der von der angewendeten Methode unzertrennlichen Schwerfälligkeit haben wir uns in der Auswahl der zu behandelnden Stoffe verschiedene Beschränkungen auferlegt. Wirkliche Schwierigkeiten stehen aber einer genaueren analytischen Darstellung der im ersten Abschnitt vorgetragenen Theorie auch bei Gebrauch der Coordinatenmethode natürlich nicht entgegen.

Um Wiederholungen einer und derselben Schlussweise zu vermeiden, werden wir jetzt einen anderen Gedankengang innehalten, als im ersten Abschnitt. Wir beginnen sogleich mit den Bewegungen im dreifach-ausgedehnten Raume, und lassen hierauf die zugehörigen Umlegungen folgen, um dann erst zu den Bewegungen und Umlegungen der Ebene herabzusteigen.

§ 1.

Die Transformationscoefficienten.

Wir bedienen uns in der gegenwärtigen Arbeit, wie gesagt, rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten. Wir drücken also eine *Bewegung* aus durch ein Gleichungssystem von der Form

$$
(1)\qquad \begin{cases} a_{00}z_1' = a_{10} + a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3, \\ a_{00}z_2' = a_{20} + a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3, \\ a_{00}z_3' = a_{30} + a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3. \end{cases}
$$

Sollen diese Formeln wirklich eine Bewegung bedeuten, so müssen zwischen den Coefficienten a_{ik} die bekannten Bedingungsgleichungen bestehen. Wir stellen diese Relationen kurz zusammen, um uns nachher darauf beziehen zu können. Wir werden dabei, um einer später anzustellenden Betrachtung willen, für die linken Seiten mehrerer von ihnen kurze Bezeichnungen einführen. Der Einfachheit halber wird von je drei Formeln, die durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 aus einander hervorgehen, immer nur eine aufgeführt. Die

in eckiger Klammer hinzugefügte Ziffer gibt die Anzahl der unter einander gleichwerthigen Relationen an.

An die Spitze stellen wir den Ausdruck für die Determinante unserer Transformation, eine Relation dritten Grades in den Coefficienten $a_{i\varkappa}$:

$$\Delta = |a_{11}a_{22}a_{33}| = a_{00}^3. \tag{2}$$

Andere Relationen dritten oder höheren Grades werden wir nicht benutzen; wohl aber ist es uns von Wichtigkeit, die Relationen vom zweiten Grade in den Coefficienten a_{ik} möglichst genau zu kennen.

Es sind die folgenden:

$$R_{i\varkappa} = a_{00}a_{i\varkappa} - \frac{\partial\Delta}{\partial a_{i\varkappa}} = 0 \qquad [9], \tag{3}$$

oder ausführlicher:

$$\text{(3b)} \qquad \begin{cases} R_{11} = a_{00}a_{11} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} = 0, & [3], \\ R_{23} = a_{00}a_{23} - a_{12}a_{31} + a_{11}a_{32} = 0, & [3], \\ R_{32} = a_{00}a_{32} - a_{21}a_{13} + a_{11}a_{23} = 0, & [3]; \end{cases}$$

ferner

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} P_1 = a_{00}^2 - a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 = 0, & [3], \\ P_1' = a_{00}^2 - a_{11}^2 - a_{21}^2 - a_{31}^2 = 0. & [3]; \end{cases}$$

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Q_1 = a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0, & [3], \\ Q_1' = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0. & [3]. \end{cases}$$

Die sechs Gleichungen $P_i = 0$, $Q_i = 0$ sind bekanntlich von einander unabhängig; aus ihnen folgt

$$\Delta = \pm a_{00}^3.$$

Entscheidet man sich für das obere Vorzeichen, so ergeben sich die übrigen Relationen. Es bleiben also, wie es sein muss, drei von den neun Coefficientenverhältnissen $a_{11} : a_{00}, \ldots, a_{33} : a_{00}$ willkürlich.

Die angeschriebenen Relationen zweiten Grades (3)...(5), im Ganzen 21, sind offenbar nicht linear-unabhängig; man hat nämlich auch dann, wenn die Grössen $a_{i\varkappa}$ ganz beliebige Werthe haben, die Identität

$$P_1 + P_2 + P_3 = D = P_1' + P_2' + P_3'. \tag{6}$$

Demnach ist von den sechs Gleichungen (4) irgend eine überflüssig; sie könnte fortgelassen werden, wenn dadurch nicht die Symmetrie gestört würde.

Die übrigen 20 *Relationen sind linear-unabhängig. Sie stellen das vollständige System aller Relationen zweiten Grades vor, die zwischen den Coefficienten $a_{i\varkappa}$ bestehen.*

Das heisst, hat man irgend einen Ausdruck zweiten Grades $\Omega(a_{i\varkappa})$, der für die Coefficienten $a_{i\varkappa}$ einer orthogonalen Substitution verschwindet, so lässt sich Ω linear mit constanten Coefficienten darstellen durch die Ausdrücke $R_{i\varkappa}$, Q_i, Q_i' und durch fünf von den Ausdrücken P_i, P_i'.

Den Beweis für diesen bisher — wie es scheint — unbemerkt gebliebenen Satz werden wir später (in § 5) in sehr einfacher Weise führen, indem wir das System der Gleichungen (3) . . . (6) in eine andere Form bringen.

In den Gleichungen (1), deren Coefficienten durch die Bedingungen (2) . . . (5) an einander gebunden sind, sind sechs linear-unabhängige infinitesimale Transformationen enthalten, unendlich kleine Bewegungen, deren Ausdrücke schon von Euler angegeben worden sind. Wir schreiben sie, mit Anwendung der von Herrn S. Lie eingeführten Symbolik, in dieser Weise:

$$(7)\qquad \begin{cases} X_1 f = 2\left(z_3 \dfrac{\partial f}{\partial z_2} - z_2 \dfrac{\partial f}{\partial z_3}\right), & Y_1 f = -2 \dfrac{\partial f}{\partial z_1}, \\ X_2 f = 2\left(z_1 \dfrac{\partial f}{\partial z_3} - z_3 \dfrac{\partial f}{\partial z_1}\right), & Y_2 f = -2 \dfrac{\partial f}{\partial z_2}, \\ X_3 f = 2\left(z_2 \dfrac{\partial f}{\partial z_1} - z_1 \dfrac{\partial f}{\partial z_2}\right), & Y_3 f = -2 \dfrac{\partial f}{\partial z_3}. \end{cases}$$

$X_1 f \dots X_3 f$ stellen, wie man leicht sieht, unendlich kleine Drehungen um die Coordinatenaxen vor, $Y_1 f \dots Y_3 f$ sind Schiebungen längs dieser Axen.

Die *Zusammensetzung* der Gruppe der Bewegungen wird, bei der von uns getroffenen Auswahl der infinitesimalen Transformationen, gegeben durch die Formeln

$$(8)\qquad \begin{cases} (X_2 X_3) = 2X_1, \quad (X_3 X_1) = 2X_2, \quad (X_1 X_2) = 2X_3, \\ \qquad (X_2 Y_3) = 2Y_1 = (Y_2 X_3), \\ \qquad (X_3 Y_1) = 2Y_2 = (Y_3 X_1), \\ \qquad (X_1 Y_2) = 2Y_3 = (Y_1 X_2), \\ \qquad (Y_i Y_i) = 0, \quad (X_i Y_\varkappa) = 0 \\ \qquad (i, \varkappa = 1, 2, 3). - \end{cases}$$

Um einer späteren Anwendung willen bestimmen wir im Anschluss hieran die infinitesimalen Transformationen der Gruppe von Bewegungen, die einen gegebenen Punkt z_1^0, z_2^0, z_3^0 in Ruhe lassen. Diese Gruppe enthält drei unabhängige infinitesimale Transformationen, Drehungen um Axen, die den Coordinatenaxen parallel laufen:

$$(9)\quad\begin{cases} Z_1 f = 2(z_3 - z_3^0)\dfrac{\partial f}{\partial z_2} - 2(z_2 - z_2^0)\dfrac{\partial f}{\partial z_3} \\ \quad = X_1 f - z_2^0 Y_3 f + z_3^0 Y_2 f, \\ Z_2 f = 2(z_1 - z_1^0)\dfrac{\partial f}{\partial z_3} - 2(z_3 - z_3^0)\dfrac{\partial f}{\partial z_1} \\ \quad = X_2 f - z_3^0 Y_1 f + z_1^0 Y_3 f, \\ Z_3 f = 2(z_2 - z_2^0)\dfrac{\partial f}{\partial z_1} - 2(z_1 - z_1^0)\dfrac{\partial f}{\partial z_2} \\ \quad = X_3 f - z_1^0 Y_2 f + z_2^0 Y_1 f. - \end{cases}$$

In unseren ferneren Betrachtungen soll es sich nun darum handeln, die Transformationscoefficienten $a_{i\varkappa}$ in möglichst einfacher Weise durch eine geringere Zahl von Grössen auszudrücken.

Denken wir uns die Transformationen $S_1, S_2, \ldots$ einer r-gliedrigen continuirlichen Gruppe dargestellt durch $r + s + 1$ homogene Parameter, zwischen denen s von einander unabhängige Relationen stattfinden; so wollen wir sagen, dass für diese Parameter *bilineare Zusammensetzung* besteht, wenn die Parameter der zusammengesetzten Transformation $S_1 S_2$ homogene lineare Functionen sind sowohl der Parameter von S_1 als auch der Parameter von S_2. Diese durch ihre besondere Einfachheit ausgezeichnete Art der Zusammensetzung der Parameter liegt zum Beispiel bei der allgemeinen projectiven Gruppe

$$x_i' = c_{i0}x_0 + c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + c_{i3}x_3 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

vor, wenn man als Parameter die 16 Coefficienten $c_{i\varkappa}$ selbst nimmt; und ebenso findet bilineare Zusammensetzung für unsere Gruppe (1) der Bewegungen statt, wenn man die 13 Coefficienten $a_{i\varkappa}$ als die Parameter ansieht. Zwischen beiden Fällen besteht aber ein wesentlicher Unterschied: Während bei der allgemeinen projectiven Gruppe die Zahl der Parameter $c_{i\varkappa}$ den kleinsten überhaupt denkbaren Werth 16 hat, haben wir bei der nur sechsgliedrigen Gruppe der Bewegungen noch 13 homogene Parameter, also nicht weniger als *sechs* Parameter mehr, als zur Darstellung der Bewegungen durch homogene Parameter überhaupt erforderlich sind. Bemerkt man, dass die Leichtigkeit der analytischen wie der geometrischen Behandlung einer Gruppe genau abhängig ist von der Leichtigkeit, mehrere Transformationen der Gruppe hinter einander auszuführen', so erhebt sich von selbst die Frage: Ob man nicht, unter Beibehaltung der Forderung der bilinearen Zusammensetzung, die Bewegungen schon durch weniger als 13 homogene Parameter ausdrücken kann? Wir stellen also die Aufgabe:

Man soll die Bewegungen des Raumes durch eine möglichst geringe Zahl von homogenen Parametern mit bilinearer Zusammensetzung darstellen.

Die Lösung dieses Problems kann nicht völlig bestimmt sein; sie enthält noch willkürliche Elemente. Denn hat man ein System von Parametern der genannten Eigenschaft gefunden, so erhält man durch eine lineare Transformation sofort unendlich viele Parameterdarstellungen derselben Art. Ferner wird der Ausdruck der Coefficienten a_{ik} durch die fraglichen Parameter nothwendig unbestimmt, wenn sich zeigen sollte, dass die kleinste Zahl von Parametern mit bilinearer Zusammensetzung grösser ist, als 7: in diesem Fall kann man mit Hülfe der alsdann zwischen ihnen stattfindenden Relationen die Form der Coefficienten a_{ik} noch in mannigfacher Weise abändern. Sieht man aber auch alle solchen Parametersysteme, die sich aus einem einzigen ableiten lassen, als identisch an, so ist noch nicht von vorn herein klar, dass nicht noch andere möglich sind, zu denen man auf diese Weise nicht kommt.

Eine ähnliche Aufgabe, wie die soeben formulirte, kann man bei ganz beliebigen continuirlichen Gruppen stellen; denn nach den Untersuchungen des Herrn S. Lie gibt es projective Gruppen von jeder beliebigen Zusammensetzung. Schon bei den eingliedrigen Gruppen sind indessen zwei wesentlich verschiedene Parameterdarstellungen mit bilinearer Zusammensetzung vorhanden, von denen die eine ein Grenzfall der anderen ist, und bei dreigliedrigen Gruppen bereits kommt auch der Fall vor, dass mehrere wesentlich verschiedene Parameterdarstellungen von gleicher Allgemeinheit möglich sind.

Dass die Gruppe der Bewegungen ein anderes und zwar einfacheres Verhalten zeigt, werden wir im nächsten Paragraphen sehen.

§ 2.

Die Biquaternionen.

Die in § 1 formulirte Aufgabe lässt sich, nach den Darlegungen, die der Verfasser bei einer anderen Gelegenheit gegeben hat, auf die folgende zurückführen:

„Man soll, für einen möglichst kleinen Werth der Zahl s, alle Typen von Systemen complexer Zahlen mit $7 + s$ Haupteinheiten finden, von der Eigenschaft, dass die zugehörige $(7 + s - 1)$gliedrige einfach-transitive Gruppe $G^{(1)}$ eine Untergruppe enthält, die mit der Gruppe der Bewegungen gleichzusammengesetzt ist“*).

Nun geht aus Untersuchungen des Herrn Scheffers**) hervor,

*) S. die Abhandlung: *Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen.* Wiener Monatshefte 1890 (I. Jahrg.), 8–10. Heft. Statt der Bezeichnung $G^{(1)}$ des Textes ist dort G_1 geschrieben.

**) G. Scheffers, *Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen.* Math. Ann. Bd. 39 (1891), S. 293, § 10 u. ff.

dass der kleinste mögliche Werth der Zahl s der Werth $s = 1$ ist, und dass zu diesem Werth nur *ein* System von complexen Zahlen gehört, dessen Gruppe $G^{(1)}$ eine (und nur eine) Untergruppe von der verlangten Zusammensetzung enthält. Daraus lässt sich schliessen:

Eine Darstellung der Bewegungen durch sieben homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung ist unmöglich.

*Dagegen gibt es eine, und zwar im Wesentlichen nur eine solche Darstellung durch acht homogene Parameter, zwischen denen eine Relation besteht.**)

Im Wesentlichen, das heisst: abgesehen von linearen Transformationen der Parameter, und abgesehen natürlich von Umgestaltungen vermöge der Identität, die zwischen den Parametern angenommen werden soll.

Das fragliche System complexer Zahlen ist eines der von Clifford aufgefundenen und als *Biquaternionen* bezeichneten Zahlensysteme. Seine Multiplicationstafel sieht, wenn man die acht Haupteinheiten in zwei Gruppen von je vieren, $e_0 \ldots e_3$, $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_3$ spaltet, so aus:

(1)

	e_0	e_1	e_2	e_3	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	ε_1	$-\varepsilon_0$	ε_3	$-\varepsilon_2$	
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	ε_2	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_0$	ε_1	
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_0$	
ε_0	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	0	0	0	0	
ε_1	ε_1	$-\varepsilon_0$	ε_3	$-\varepsilon_2$	0	0	0	0	
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_0$	ε_1	0	0	0	0	
ε_3	ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_0	0	0	0	0	**)

*) Es dürfte vielleicht im Interesse einiger Leser liegen, wenn wir ausdrücklich darauf hinweisen, dass der Satz des Textes nur soweit auf der Theorie des Herrn Scheffers beruht, als er das Nicht-Vorhandensein einer zweiten, einfacheren oder auch nur eben so einfachen Parameterdarstellung der Bewegungen aussagt. Im Uebrigen werden wir von jenen (nach der Natur des Gegenstandes) nicht ganz einfachen Betrachtungen, und insbesondere auch von der soeben gezogenen wichtigen Folgerung keinen Gebrauch zu machen haben.

**) Der zu früh verstorbene Clifford hat in mehreren theilweise unvollendet gebliebenen Abhandlungen, die man in seinen „Mathematical Papers" (London 1882) abgedruckt findet, drei Arten von „Biquaternionen" betrachtet und zur sogenannten elliptischen, parabolischen (Euclidischen) und hyperbolischen Geo-

Schreiben wir zur Abkürzung $(e_i e_k)$ für $e_i e_k - e_k e_i$, so haben wir nach dieser Tafel die Relationen

$$(2)\qquad \begin{cases} (e_2 e_3) = 2e_1, \quad (e_3 e_1) = 2e_2, \quad (e_1 e_2) = 2e_3, \\ \qquad (e_2 \varepsilon_3) = 2\varepsilon_1 = (\varepsilon_2 e_3), \\ \qquad (e_3 \varepsilon_1) = 2\varepsilon_2 = (\varepsilon_3 e_1), \\ \qquad (e_1 \varepsilon_2) = 2\varepsilon_3 = (\varepsilon_1 e_2), \\ (e_i \varepsilon_i) = 0 \;\; (i = 1, 2, 3), \quad (\varepsilon_i \varepsilon_k) = 0 \;\; (i, k = 1, 2, 3), \end{cases}$$

$$(3)\qquad (e_i \varepsilon_0) = 0, \quad (\varepsilon_i \varepsilon_0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Führen wir ferner noch die Abkürzungen ein

$$a = \sum_0^3 (\alpha_i e_i + \beta_i \varepsilon_i), \qquad a' = \sum_0^3 (\alpha_i' e_i + \beta_i' \varepsilon_i) \quad \text{u. s. f.}$$

$$x = \sum_0^3 (\xi_i e_i + \eta_i \varepsilon_i), \qquad x' = \sum_0^3 (\xi_i' e_i + \eta_i' \varepsilon_i) \quad \text{u. s. w.},$$

so können wir die mit den Biquaternionen (1) verknüpfte siebengliedrige Gruppe $G^{(1)}$ oder G_7 kurz so schreiben:

$$(4)\qquad x' = xa.$$

Aus den Formeln (8) des § 1, und den Formeln (2), (3) des gegenwärtigen Paragraphen ergibt sich sodann (vgl. Wiener Ber. a. a. O., § 9), dass die Gruppe G_7 in der That eine einzige, und zwar eine *invariante* Untergruppe G_6 enthält, die gleichzusammengesetzt ist

---

metrie in Beziehung gesetzt. Er gelangte zu ihnen durch die von Herrn Scheffers „*Multiplication*" genannte Operation, indem er Hamiltons Quaternionen mit den drei binären Zahlensystemen $(i_0 = 1,\ i_1^2 = i_0)$, $(i_0 = 1,\ i_1^2 = 0)$, $(i_0 = 1,\ i_1^2 = -i_0)$ verband. Er operirte mit ihnen ungefähr in derselben Weise, wie Hamilton und seine Nachfolger mit den gewöhnlichen Quaternionen. Zu einer Parameterdarstellung und Zusammensetzung der Bewegungen scheint Clifford eben so wenig gelangt zu sein, wie Buchheim, der eine zusammenfassende Darstellung und Weiterbildung der Clifford'schen Gedanken versucht hat. (*A memoir on Biquaternions.* Am. J. v. VIII [1885].)

Nach der Terminologie des Verfassers sind die zur elliptischen und hyperbolischen Geometrie gehörigen Biquaternionen verschiedene *Gestalten* desselben *Typus*, die zur parabolischen Geometrie gehörigen aber entsprechen einem neuen Typus, der eine Ausartung des ersten ist. Von diesen und noch zwei weiteren, ähnlich gebauten Zahlensystemen werden wir in den folgenden Abschnitten dieser Untersuchung noch mehr zu reden haben.

Bei Scheffers findet sich das hier benutzte System auf S. 380. Es ist dort mit Q_8 bezeichnet.

mit der Gruppe der Bewegungen, eine Gruppe, deren allgemeine infinitesimale Transformation lautet:

$$x' = x[e_0 + (\mathfrak{a}_1 e_1 + \mathfrak{a}_2 e_2 + \mathfrak{a}_3 e_3 + \mathfrak{b}_1 \varepsilon_1 + \mathfrak{b}_2 \varepsilon_2 + \mathfrak{b}_3 \varepsilon_3)\delta t]. \tag{5}$$

Ferner ergibt sich, dass eine (einzige) *ausgezeichnete* Untergruppe G_1 vorhanden ist mit der infinitesimalen Transformation

$$x' = x[e_0 + \varepsilon_0 \delta t]. \tag{6}$$

Die Gruppe G_6 ist isomorph auf die Gruppe der Bewegungen des Raumes bezogen, wenn man die allgemeine infinitesimale Bewegung in der Form

$$\mathfrak{a}_1 X_1 f + \mathfrak{a}_2 X_2 f + \mathfrak{a}_3 X_3 f + \mathfrak{b}_1 Y_1 f + \mathfrak{b}_2 Y_2 f + \mathfrak{b}_3 Y_3 f \tag{7}$$

schreibt, und den Constanten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ dieselben Werthe beilegt, wie denen der Formel (5). —

Es wird sich nun weiterhin vor Allem darum handeln, die *endlichen* Gleichungen der von den infinitesimalen Transformationen (5) erzeugten Gruppe G_6 aufzustellen, d. h., die Bedingung zu finden, der die acht Parameter α_i, β_i genügen müssen, wenn die Transformation (4) von G_7 der Untergruppe G_6 angehören soll. Bevor wir aber noch dies ausgeführt haben, können wir aus den bereits abgeleiteten Sätzen schon einige wichtige Folgerungen ziehen. Wir können nämlich jetzt schon die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter (α, β) angeben.

Seien S, S' irgend zwei Bewegungen, und S'' ihr Product, $= SS'$, seien ferner $x' = xa$, $x' = xa'$, $x' = xa''$ drei Transformationen von G_6, die den Bewegungen S, S', S'' entsprechen, so hat man $a'' = aa'$; d. h. die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter (α, β) werden geliefert durch das sogenannte *Multiplicationstheorem* unseres Zahlensystems (1).

Verlassen wir den Algorithmus der complexen Zahlen, so können wir nunmehr den Satz formuliren:

Hat man die Bewegungen des Raumes durch irgend ein System von acht homogenen Parametern mit bilinearer Zusammensetzung ausgedrückt, so kann den Formeln für die Zusammensetzung der Parameter durch eine lineare Transformation der Parameter immer die folgende Gestalt ertheilt werden:

$$\begin{cases} \alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\ \alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2', \\ \alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1' - \alpha_1\alpha_3', \\ \alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_3\alpha_0' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1', \end{cases} \tag{8}$$

$$
(8)\quad \begin{cases}
\beta_0'' = \alpha_0\beta_0' - \alpha_1\beta_1' - \alpha_2\beta_2' - \alpha_3\beta_3' \\
\qquad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3', \\
\beta_1'' = \alpha_0\beta_1' + \alpha_1\beta_0' + \alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' \\
\qquad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2', \\
\beta_2'' = \alpha_0\beta_2' + \alpha_2\beta_0' + \alpha_3\beta_1' - \alpha_1\beta_3' \\
\qquad + \beta_0\alpha_2' + \beta_2\alpha_0' + \beta_3\alpha_1' - \beta_1\alpha_3', \\
\beta_3'' = \alpha_0\beta_3' + \alpha_3\beta_0' + \alpha_1\beta_2' - \alpha_2\beta_1' \\
\qquad + \beta_0\alpha_3' + \beta_3\alpha_0' + \beta_1\alpha_2' - \beta_2\alpha_1'.
\end{cases}
$$

Die ersten vier von diesen Gleichungen stellen ein wohlbekanntes Formelsystem dar, das Multiplicationstheorem der Quaternionen, durch deren Erweiterung eben das Zahlensystem (1) entstanden ist.

Betrachten wir die Determinante des Gleichungssystems (8), nachdem wir es in Bezug auf die Grössen α_i', β_i' geordnet haben, so ergibt sich der Ausdruck $N^4(\alpha, \beta)$, wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$
(9)\qquad N(\alpha, \beta) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.
$$

Ordnen wir sodann nach den Grössen α_i, β_i, und bilden wir wieder die Determinante, so ergibt sich der Werth $N^4(\alpha', \beta')$. Der Ausdruck N, der von den Grössen β_i ganz unabhängig ist, spielt also die Rolle der *Discriminante* für unser Gleichungssystem; die Werthe der Grössen (α, β), für die N verschwindet, definiren die ausgearteten Transformationen der Gruppe G_7. Wir werden immer nur nicht-ausgeartete Transformationen zu betrachten haben; wir dürfen daher aus jeder Gleichung mit dem Factor N diesen Factor weglassen.

Aus den ersten vier Gleichungen (8) folgt die ebenfalls aus der Quaternionentheorie bekannte Formel

$$
(10)\qquad N(\alpha) \,.\, N(\alpha') = N(\alpha'').
$$

Zu diesen Sätzen sind wir gelangt, ohne noch die Bedingungsgleichung zwischen den Parametern α_i, β_i zu kennen. Wir werden später sehen, dass auch der Ausdruck der Bewegungen selbst in gewissem Umfang von jener Relation unabhängig ist. (Vgl. § 6).

§ 3.

Die Gruppe G_6 und ihre adjungirte Gruppe.

Wir setzen jetzt, wie im vorigen Paragraphen, $x = \Sigma \xi_i e_i + \eta_i \varepsilon_i$, $a = \Sigma \alpha_i e_i + \beta_i \varepsilon_i$, und deuten die Grössen $\xi_i : \xi_0$, $\eta_i : \xi_0$ etwa als Cartesische Coordinaten in einem Raum R_7 von 7 Dimensionen. Da die Gruppe $x' = xa$, unsere Gruppe G_7, einfach-transitiv ist, so wird der Raum R_7 durch die Transformationen von G_6 zerlegt in eine Schaar von ∞^1 sechsfach ausgedehnten Räumen, von denen jeder einzelne

noch transitiv transformirt wird. Diese Schaar von Mannigfaltigkeiten nun lässt sich leicht angeben: Sie wird dargestellt durch die Gleichung

$$(1)\qquad f = \lambda(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + \mu(\xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3) = 0,$$

wenn man dem Parameter $\lambda:\mu$ alle möglichen Werthe beilegt. In der That überzeugt man sich leicht, dass der Zuwuchs der Function f bei jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe G_6 verschwindet. (Vgl. Formel (5), § 2).*)

Die für die Transformationen von G_6 charakteristische Bedingungsgleichung zwischen den Parametern α_i, β_i muss nun unter der Form

$$f = \lambda(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \mu(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = 0$$

enthalten sein. Seien nämlich $x' = xa$ und $x'' = x'a'$ irgend zwei Transformationen von G_6, und sei $x'' = xa''$ die aus beiden zusammengesetzte Transformation, so hat man $a'' = aa'$; diese Gleichung aber hat wieder die Form $x' = xa$. Da nun zwischen den Parametern α_i'', β_i'' dieselbe Relation bestehen muss, wie zwischen den Parametern α_i, β_i und α_i', β_i', so folgt, dass die gesuchte Relation aus einer der Gleichungen (1) dadurch hervorgeht, dass man α_i für ξ_i und β_i für η_i schreibt. Wir haben also nur noch den Parameter $\lambda:\mu$ in geeigneter Weise zu specialisiren. Da die infinitesimalen Transformationen von G_6 bereits bekannt sind, so findet man ohne Weiteres $\lambda = 0$. Wir haben also den Satz:

Bei der von uns getroffenen Wahl der acht homogenen Parameter einer Bewegung lautet die zwischen ihnen stattfindende Relation:

$$(2)\qquad L(\alpha, \beta) = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

Die Gleichung (2) ist linear in jedem der acht Parameter α_i, β_i Sie stellt, im Raume von 7 Dimensionen gedeutet, eine allgemeine quadratische Mannigfaltigkeit vor, die von zwei reellen Schaaren linearer dreifach ausgedehnter Räume beschrieben werden kann.

Man kann es durch eine allerdings umständliche Rechnung bestätigen, dass die Gleichung $L(\alpha, \beta) = 0$ wirklich die Transformationen einer Untergruppe von G_7 bestimmt. Es besteht nämlich vermöge der Gleichungen (8), § 2, die Identität

*) Bei der infinitesimalen Transformation von G_1 (S. Nr. (6), § 2) erhält der Zuwuchs von f den Werth

$$\mu(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\,\delta t,$$

was wieder ein Ausdruck von der Form f ist. Die Mannigfaltigkeiten $f = 0$ werden also durch die Gruppe G_1 unter einander vertauscht. Da dieser Umstand schon aus den Gleichungen (2) und (3) des § 2 ersichtlich ist, so kann man nach einem Satze des Herrn S. Lie die Invariante $\lambda:\mu$ der Gruppe G_6 unmittelbar finden. Indessen erfordert die Anwendung der allgemeinen Integrationstheorie umständliche Rechnungen; es mag daher die angedeutete Verification genügen.

(3) $$L(\alpha'', \beta'') = N(\alpha', \beta') \,.\, L(\alpha, \beta) + N(\alpha, \beta) \,.\, L(\alpha', \beta'),$$
woraus der Satz folgt.*)

Von der Relation $L(\alpha, \beta) = 0$ können wir sogleich eine wichtige Anwendung machen. Berechnen wir nämlich, mit Hülfe der Formeln (8), § 2, die Entgegengesetzte $x' = xa^{-1}$ einer Transformation $x' = xa$ von G_7, so finden wir für deren Parameter im Allgemeinen Ausdrücke *dritten* Grades in α_i, β_i. Haben wir aber insbesondere eine Transformation von G_6 vor uns, so können wir die Parameter ihrer entgegengesetzten Transformation schon durch Ausdrücke *ersten* Grades in α_i, β_i darstellen. In der That, setzen wir zur Abkürzung

(4) $$\bar{a} = \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 + \beta_0 \varepsilon_0 - \beta_1 \varepsilon_1 - \beta_2 \varepsilon_2 - \beta_3 \varepsilon_3,$$
so haben wir die Identität

(5) $$a\{N \,.\, \bar{a} - 2L \,.\, (\alpha_0 \varepsilon_0 - \alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2 - \alpha_3 \varepsilon_3)\} = N^2 \,.\, e_0,$$
aus der man den Werth von a^{-1} entnehmen kann, sowie die daraus folgende Identität zweiten Grades:

(6) $$a\bar{a} = \bar{a}a = N(\alpha, \beta) \,.\, e_0 + 2L(\alpha, \beta) \,.\, \varepsilon_0 .$$
Setzt man L gleich Null, so ergibt sich der Satz:

Sind die Parameter einer Bewegung S

$$\alpha_0 : \quad \alpha_1 : \quad \alpha_2 : \quad \alpha_3 : \beta_0 : \quad \beta_1 : \quad \beta_2 : \quad \beta_3,$$

so sind $\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : \beta_0 : -\beta_1 : -\beta_2 : -\beta_3$

die Parameter der entgegengesetzten Bewegung S^{-1}.

Auf Grund dieser Bemerkung gelingt es, die endlichen Gleichungen der *Adjungirten* der Gruppe G_6 (oder was dasselbe ist, der Gruppe der Bewegungen) in einer besonders einfachen Weise durch die Parameter (α, β) auszudrücken: Die adjungirte Gruppe wird einfach dargestellt durch die Gleichung

(7) $$x' = \bar{a}xa,$$
sofern man den Coefficienten $\mathfrak{x}_i$, η_i die Werthe

$$\mathfrak{x}_0 = 1, \quad \eta_0 = 0, \quad \mathfrak{x}_i = \mathfrak{a}_i, \quad \eta_i = \mathfrak{b}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$
und den Coefficienten $\mathfrak{x}_i'$, η_i' die entsprechenden Werthe beilegt.**)

Wir schreiben auch diese Gleichungen in ausgerechneter Form hin, da wir sie weiterhin zu verwenden haben werden. Sie lauten:

(8) $$\begin{cases} N\mathfrak{a}_i' = a_{i1}\mathfrak{a}_1 + a_{i2}\mathfrak{a}_2 + a_{i3}\mathfrak{a}_3, \\ N\mathfrak{b}_i' = b_{i1}\mathfrak{a}_1 + b_{i2}\mathfrak{a}_2 + b_{i3}\mathfrak{a}_3 \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \qquad + a_{i1}\mathfrak{b}_1 + a_{i2}\mathfrak{b}_2 + a_{i3}\mathfrak{b}_3, \end{cases}$$
worin wir zur Abkürzung gesetzt haben

*) Eine kurze Herleitung der Formel (3) findet man in § 6 (S. 538).

**) Wiener Ber. a. a. O., § 7 und § 10.

$$
(9)\quad \begin{cases}
a_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \qquad a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1),\\
a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2,\\
b_{11} = 2(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3),\\
b_{23} = 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0),\\
b_{32} = 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), \quad \text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Es wird wohl keine Verwirrung daraus entstehen, dass wir die Bezeichnungen a_{ik} im § 1 schon in einem anderen Sinne verwendet haben: die Ausdrücke der Coefficienten a_{ik} durch die Parameter (α, β) sind, wie wir sogleich sehen werden, beidemal die nämlichen.

§ 4.

Die Parameterdarstellung der Bewegungen.

Von dem im vorigen Paragraphen gefundenen Ausdruck der adjungirten Gruppe der Bewegungen gelangen wir leicht zur Parameterdarstellung der Bewegungen selbst.

Die Gleichungen (8) und (9) des § 3 geben an, wie die infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_6 durch die endlichen Transformationen von G_6 unter einander vertauscht werden. Da aber die Gruppe G_6 durch die Formeln (5) und (7) des § 2 isomorph auf die Gruppe der Bewegungen des Raumes bezogen ist, so wissen wir damit auch, wie die infinitesimalen Bewegungen durch die in den Parametern (α, β) ausgedrückten endlichen Bewegungen unter einander vertauscht werden. Wir werden also zum Beispiel im Stande sein, die infinitesimalen Transformationen der dreigliedrigen Gruppe G_3' zu berechnen, die aus der Gruppe G_3 aller Drehungen um den festen Punkt z_1^0, z_2^0, z_3^0 durch die Bewegung $S(\alpha, \beta)$ hervorgeht. Bestimmen wir dann den Mittelpunkt z_1', z_2', z_3' der neuen Gruppe G_3', so haben wir damit bereits den gesuchten Ausdruck der Bewegungen. Die Coordinaten z_i' werden offenbar lineare Functionen der Coordinaten z_i^0 und *rationale* Functionen der Parameter α_i, β_i.

Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_3 haben wir (in § 1, Nr. (9)) bereits angegeben. Für $Z_1 f$ z. B. haben wir $\mathfrak{a}_1 = 1$, $\mathfrak{a}_2 = 0$, $\mathfrak{a}_3 = 0$, $\mathfrak{b}_1 = 0$, $\mathfrak{b}_2 = z_3^0$, $\mathfrak{b}_3 = -z_2^0$. Daraus folgt dann mit Hülfe der Formeln (8) und (9), § 3, der Ausdruck der transformirten infinitesimalen Transformation $Z_1'f$:

$$
\begin{aligned}
N \,.\, Z_1'f = a_{11}X_1f &+ a_{21}X_2f + a_{31}X_3f\\
&+ (b_{11} + a_{12}z_3^0 - a_{13}z_2^0)\,.\,Y_1f\\
&+ (b_{21} + a_{22}z_3^0 - a_{23}z_2^0)\,.\,Y_2f\\
&+ (b_{31} + a_{32}z_3^0 - a_{33}z_2^0)\,.\,Y_3f;
\end{aligned}
$$

entsprechende Ausdrücke für $Z_2'f$ und $Z_3'f$ entstehen durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3.

Um den Punkt z_1', z_2', z_3' zu finden, der bei den Transformationen $Z_1'f$, $Z_2'f$, $Z_3'f$ in Ruhe bleibt, führen wir am Besten statt der Transformationen $Z_1'f$, $Z_2'f$, $Z_3'f$ drei neue $\overline{Z}_1f$, $\overline{Z}_2f$, $\overline{Z}_3f$ ein, die wieder die Form von Z_1f, Z_2f, Z_3f haben. Wir erhalten dann den Ausdruck einer jeden Coordinate z_1', z_2', z_3' zweimal, und haben damit zugleich eine Controlle für die Richtigkeit der Rechnung. Man findet ohne Mühe

$$\begin{aligned}\overline{Z}_1f &= X_1f - z_2'Y_3f + z_3'Y_2f \\ &= N^{-1}.(a_{11}Z_1'f + a_{12}Z_2'f + a_{13}Z_3'f) \quad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung fallen nicht allein X_2f und X_3f heraus, sondern auch Y_1f, in Folge des Bestehens der Relation $L(\alpha, \beta) = 0$; die Vergleichung der Coefficienten von X_1f, Y_3f und Y_2f gibt dann die gesuchten Transformationsformeln, die Ausdrücke der Coefficienten a_{ik} des § 1 durch die Parameter (α, β), sobald wir an Stelle von z_1^0, z_2^0, z_3^0 wieder z_1, z_2, z_3 schreiben.

Bei der endgültigen Formulirung unseres Ergebnisses wollen wir uns übrigens nicht, wie bisher, der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten z_1, z_2, z_3 sondern *homogener Coordinaten* $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ bedienen, die mit jenen durch die Gleichungen

$$z_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad z_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad z_3 = \frac{x_3}{x_0}$$

verbunden sind. $u_0 : u_1 : u_2 : u_3$ nennen wir die zugehörigen Ebenencoordinaten, $p_{ik} = -p_{ki}$ die zugehörigen Complex- oder Liniencoordinaten; so dass beispielsweise die Verbindungslinie der Punkte x und y die Coordinaten erhält:

$$\begin{aligned} p_{01} &= x_0y_1 - x_1y_0, & p_{23} &= x_2y_3 - x_3y_2, \\ p_{02} &= x_0y_2 - x_2y_0, & p_{31} &= x_3y_1 - x_1y_3, \\ p_{03} &= x_0y_3 - x_3y_0, & p_{12} &= x_1y_2 - x_2y_1. \end{aligned}$$

Hiernach können wir nun die Bewegungen im Raume in Punkt-, Linien- und Ebenencoordinaten ausdrücken:

$$(1)\quad \begin{cases} x_0' = a_{00}x_0 \quad . \quad . \quad . \;, \\ x_1' = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} p_{01}' = a_{11}p_{01} + a_{12}p_{02} + a_{13}p_{03} \quad [3], \\ p_{23}' = b_{11}p_{01} + b_{12}p_{02} + b_{13}p_{03} \\ \qquad + a_{11}p_{23} + a_{12}p_{31} + a_{13}p_{12} \quad [3]; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} u_0' = a_{00}u_0 + a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3, \\ u_1' = \quad\cdot\quad + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\ u_2' = \quad\cdot\quad + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \\ u_3' = \quad\cdot\quad + a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3. \end{cases}$$

Diese Formeln stellen die allgemeine Bewegung im Raume dar, sofern man die Coefficienten a_{ik}, b_{ik} durch die Parameter (α, β) ausdrückt, wie folgt:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{00} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \\ a_{11} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \\ a_{22} = \alpha_0^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2, \\ a_{33} = \alpha_0^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, \\ a_{23} = 2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_0\alpha_1), \quad a_{32} = 2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_1), \\ a_{31} = 2(\alpha_3\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2), \quad a_{13} = 2(\alpha_3\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2), \\ a_{12} = 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_3), \quad a_{21} = 2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3), \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{10} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0), \\ a_{20} = 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0), \\ a_{30} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0), \\ a_{01} = 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), \\ a_{02} = 2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0), \\ a_{03} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0), \end{cases}$$

endlich

$$(6)\qquad \begin{cases} b_{11} = 2(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) \quad [3], \\ b_{23} = 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0) \quad [3], \\ b_{32} = 2(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) \quad [3]. - \end{cases}$$

Der Zusammenhang der Grössen b_{ik} mit den Grössen a_{ik} wird angegeben durch die Formeln:

$$(7)\qquad \begin{cases} a_{20}a_{31} - a_{30}a_{21} = a_{00}b_{11} \quad [3], \\ a_{30}a_{13} - a_{10}a_{33} = a_{00}b_{23} \quad [3], \\ a_{10}a_{22} - a_{20}a_{12} = a_{00}b_{32} \quad [3], \end{cases}$$

Gleichungen, die man in mannigfaltiger Weise nach den Grössen a_{10}, a_{20}, a_{30} auflösen kann (S. § 5, S. 536, Nr. 14). Der Zusammenhang der Grössen a_{i0} mit den Grössen a_{0i} endlich wird dargestellt durch die Formeln

$$(8)\qquad \begin{cases} a_{00}a_{0i} + a_{10}a_{1i} + a_{20}a_{2i} + a_{30}a_{3i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ a_{00}a_{i0} + a_{01}a_{i1} + a_{02}a_{i2} + a_{03}a_{i3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Beachten wir, dass die Formeln (2) genau übereinstimmen mit den Formeln (8) des vorigen Paragraphen, sobald man ihren linken Seiten noch den Factor $a_{00} = N$ hinzufügt, so können wir schliessen:

Die Adjungirte der Gruppe der Bewegungen wird erhalten, wenn man die Coordinaten p_{ik} der den Bewegungen unterworfenen linearen Complexe als Cartesische Coordinaten in einem sechsfach ausgedehnten Raume deutet.

Dies kann nicht überraschen: Der Satz ist nur der analytische Ausdruck der uns bereits geläufigen Thatsache, dass mit jedem linearen Complex eine infinitesimale Bewegung verknüpft ist, und umgekehrt.

Setzt man die Grössen β_i sämmtlich gleich Null, so gehen die Formeln (1) und (4) über in die bekannten Formeln Eulers für die Drehungen um einen festen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten z_1, z_2, z_3.

Wir haben schon hervorgehoben, dass man den Ausdruck der Coefficienten a_{ik} durch die Parameter (α, β) noch mannigfach abändern kann. Man wird es vielleicht als einen Uebelstand empfinden, dass für den Fall $\alpha_0 = 1$, $\alpha_i = 0$, $\beta_0 = 0$ bei positiven Werthen der Grössen β_1, β_2, β_3 sich negative Werthe der Grössen a_{10}, a_{20}, a_{30} aus unseren Formeln ergeben, also Schiebungen, die den positiven Richtungen der Coordinatenaxen entgegengesetzt sind. Dem wird leicht abgeholfen durch Einführung der neuen Parameter $\bar{\beta}_k = -\beta_k'$, oder der Parameter $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$, $\bar{\alpha}_i = -\alpha_i$, $\bar{\beta}_0 = \beta_0$, $\bar{\beta}_i = -\beta_i$ statt der Parameter (α, β). Die erste Aenderung empfiehlt sich nicht, wegen der alsdann in § 7 vorzunehmenden Abänderungen. Bei der zweiten aber, gegen die an sich Nichts zu erinnern ist, wird die Beziehung unserer Parameterdarstellung zu Eulers Formeln und zur Quaternionentheorie, wie sie einmal vorliegt, nicht mehr ganz so unmittelbar; an Stelle der Multiplicationstafel der Biquaternionen tritt nämlich die sogenannte reciproke Tafel, die aus jener durch Vertauschung der Horizontalreihen mit den Verticalreihen hervorgeht. Wir haben es daher vorgezogen, die Ausdrücke der Coefficienten a_{i0} in der Gestalt (5) beizubehalten, und den genannten kleinen Uebelstand mit in Kauf zu nehmen.

§ 5.

Die Transformationscoefficienten und die Parameter (α, β).

Mehrere wichtige Folgerungen knüpfen sich an die Bemerkung, dass man Eulers Gleichungen (4), § 4, nach den Quadraten und Producten der Parameter α_i auflösen kann. Man findet unmittelbar:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\qquad a_{00}+a_{11}+a_{22}+a_{33}=4\alpha_0^2, \\
\qquad a_{00}+a_{11}-a_{22}-a_{33}=4\alpha_1^2, \\
\qquad a_{00}+a_{22}-a_{33}-a_{11}=4\alpha_2^2, \\
\qquad a_{00}+a_{33}-a_{11}-a_{22}=4\alpha_3^2, \\
a_{23}-a_{32}=4\alpha_0\alpha_1, \qquad a_{23}+a_{32}=4\alpha_2\alpha_3, \\
a_{31}-a_{13}=4\alpha_0\alpha_2, \qquad a_{31}+a_{13}=4\alpha_3\alpha_1, \\
a_{12}-a_{21}=4\alpha_0\alpha_3, \qquad a_{12}+a_{21}=4\alpha_1\alpha_2.
\end{cases}
$$

Hieraus ergibt sich zunächst der Beweis des in § 1 ausgesprochenen Satzes, dass die dort aufgestellten Relationen $P_i=0$, $P_i'=0$, $Q_i=0$, $Q_i'=0$, $R_{ik}=0$ das vollständige System aller linear-unabhängigen Identitäten zweiten Grades zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution enthalten. Denn die Identitäten zwischen den Quadraten und Producten von vier unabhängigen Grössen kann man sofort hinschreiben; es sind sechs vom Typus $\alpha_i^2 . \alpha_k^2 - \alpha_i\alpha_k . \alpha_i\alpha_k = 0$, zwölf vom Typus $\alpha_i^2 . \alpha_k\alpha_l - \alpha_i\alpha_k . \alpha_i\alpha_l = 0$ und zwei unabhängige vom Typus $\alpha_i\alpha_k \cdot \alpha_l\alpha_m - \alpha_i\alpha_l . \alpha_k\alpha_m = 0$, also im Ganzen zwanzig. Wir haben daher in den nachfolgenden Formeln (2) ein *vollständiges* System von Relationen zweiten Grades zwischen den Coefficienten a_{ik}:

$$
(2)\quad \begin{cases}
A_{01}=(a_{00}+a_{11})^2-(a_{22}+a_{33})^2-(a_{23}-a_{32})^2=0 \qquad [3], \\
A_{23}=(a_{00}-a_{11})^2-(a_{22}-a_{33})^2-(a_{23}+a_{32})^2=0 \qquad [3], \\
B_{01}=(a_{00}+a_{11}+a_{22}+a_{33})(a_{23}+a_{32}) \\
\qquad\quad -(a_{31}-a_{13})(a_{12}-a_{21})=0 \qquad [3], \\
B_{10}=(a_{00}+a_{11}-a_{22}-a_{33})(a_{23}+a_{32}) \\
\qquad\quad -(a_{12}+a_{21})(a_{31}+a_{13})=0 \qquad [3], \\
B_{23}=(a_{00}-a_{11}+a_{22}-a_{33})(a_{23}-a_{32}) \\
\qquad\quad -(a_{31}-a_{13})(a_{12}+a_{21})=0 \qquad [3], \\
B_{32}=(a_{00}-a_{11}+a_{33}-a_{22})(a_{23}-a_{32}) \\
\qquad\quad -(a_{31}+a_{13})(a_{12}-a_{21})=0 \qquad [3], \\
C_1=(a_{31}-a_{13})(a_{31}+a_{13})-(a_{12}-a_{21})(a_{12}+a_{21})=0, \\
C_2=(a_{12}-a_{21})(a_{12}+a_{21})-(a_{23}-a_{32})(a_{23}+a_{32})=0, \\
C_3=(a_{23}-a_{32})(a_{23}+a_{32})-(a_{31}-a_{13})(a_{31}+a_{13})=0.
\end{cases}
$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die drei letzten Relationen nicht linear-unabhängig sind; es ist nämlich identisch

$$
(3)\qquad C_1+C_2+C_3=0,
$$

so dass man sie kürzer so schreiben kann:

$$
(4)\qquad a_{23}^2-a_{32}^2=a_{31}^2-a_{13}^2=a_{12}^2-a_{21}^2.
$$

Die linken Seiten der Relationen (2) einerseits und die linken Seiten der Relationen (3)...(5) des § 1 andrerseits lassen sich nun wechselweise durch einander ausdrücken, wie folgt:

$$(5)\quad \begin{cases} 4P_1 = A_{02} + A_{03} + A_{12} + A_{13} + 2C_1, \\ 4P_1' = A_{02} + A_{03} + A_{12} + A_{13} - 2C_1, \\ 4R_{11} = A_{01} - A_{23}, \\ 4Q_1 = B_{01} - B_{10} - B_{23} + B_{32}, \\ 4Q_1' = B_{01} - B_{10} + B_{23} - B_{32}, \\ 4R_{23} = B_{01} + B_{10} + B_{23} + B_{32}, \\ 4R_{32} = B_{01} + B_{10} - B_{23} - B_{32}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} C_1 = P_1 - P_1', \\ A_{01} = -P_1 - P_1' + D + 2R_{11}, \\ A_{23} = -P_1 - P_1' + D - 2R_{11}, \\ B_{01} = R_{23} + R_{32} + Q_1 + Q_1', \\ B_{10} = R_{23} + R_{32} - Q_1 - Q_1', \\ B_{23} = R_{23} - R_{32} - Q_1 + Q_1', \\ B_{32} = R_{23} - R_{32} + Q_1 - Q_1'. \end{cases}$$

Jede dieser Identitäten vertritt *drei* unter einander gleichwerthige Formeln.

Hiermit haben wir den fraglichen Satz bewiesen; zugleich haben wir, unabhängig von der Theorie der Parameter (α, β), das System der Relationen zwischen den Coefficienten a_{ik} in eine andere Form, in die Form (2) gebracht, die der gewöhnlichen Gestalt dieser Relationen in einigen Fällen vorzuziehen ist.

Um ein Beispiel zu geben, betrachten wir das System der Relationen

$$a_{11}^2 - a_{23}^2 = a_{22}^2 - a_{31}^2 = a_{33}^2 - a_{12}^2,$$
$$a_{11}^2 - a_{32}^2 = a_{22}^2 - a_{13}^2 = a_{33}^2 - a_{21}^2,$$

die (wie beiläufig bemerkt werden mag) mit dem sogenannten *Sinussatz* der sphärischen Trigonometrie in einem einfachen Zusammenhang stehen. Man findet auf dem angegebenen Wege z B.:

$$\begin{aligned} &(a_{22}^2 - a_{31}^2) - (a_{33}^2 - a_{12}^2) \\ &= \tfrac{1}{4}\{A_{02} - A_{03} + A_{31} - A_{12} - 2C_1\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{-P_1 + P_1' - P_2 - P_2' + P_3 + P_3'\} = P_3 - P_2'. \end{aligned}$$

Man kann die soeben angestellte Betrachtung leicht auf Relationen beliebig hohen Grades zwischen den Coefficienten a_{ik} ausdehnen:

Zwischen den Coefficienten $a_{00}, a_{11} \dots a_{33}$ einer orthogonalen Substitution in drei Veränderlichen bestehen

$$\binom{n+9}{9} - \binom{2n+3}{3}$$

linear-unabhängige Relationen n. Grades ($n \geqq 2$). *Diese lassen sich alle in der Form*

$$\sum_1^{20} i F_i \Phi_i = 0$$

*schreiben, sofern F_i homogene Functionen $n-2$. Grades der Coefficienten $a_{00}, a_{11} \dots a_{33}$, und Φ_i die linken Seiten der 20 zwischen diesen stattfindenden Relationen zweiten Grades bedeuten.**)

Jeder Ausdruck F vom n. Grade in den Grössen a_{ik} lässt sich nämlich als Ausdruck $2n$. Grades in den Parametern $\alpha_0 \dots \alpha_3$ schreiben, und umgekehrt. Solcher gibt es aber nur $\binom{2n+3}{3}$ linear-unabhängige; die übrigen Ausdrücke F müssen also identisch gleich Null sein. Wenn F identisch verschwindet, so müssen, nachdem man die Coefficienten a_{ik} durch die Parameter $\alpha_0 \dots \alpha_3$ ausgedrückt hat, die verschiedenen Glieder von der Form

$$A_\nu \alpha_0^{k_0} \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \alpha_3^{k_3} \quad (k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 2n)$$

einander gegenseitig zerstören. Diese einzelnen Glieder unterscheiden sich aber nur durch die Zahlenwerthe der Coefficienten A_ν (deren Summe Null ist), und durch die Art, wie in ihnen die Parameter α_i, α_k paarweise zu Producten $\alpha_i \alpha_k$ vereinigt sind. Bezeichnet man daher mit Φ irgend einen Ausdruck der Form $\alpha_i \alpha_k \,.\, \alpha_j \alpha_s - \alpha_j \alpha_k \,.\, \alpha_i \alpha_s$, so kann man F, ohne die Producte $\alpha_i \alpha_k$ in ihre Factoren zu zerspalten, auf die Form $\Sigma F_i \Phi_i$ bringen, wie es der Satz behauptet. Der Ausdruck der einzelnen Relation $F = 0$ in der Form $\Sigma F_i \Phi_i$ ist natürlich noch vielgestaltig. Beispielsweise erhält man für die in § 1 angeführte Relation 3. Grades Nr. (2) u. A. die folgenden unter einander gleichwerthigen Darstellungen

$$(7) \quad \begin{cases} a_{00}^3 - | a_{11} \; a_{22} \; a_{33} | \\ = a_{i1} R_{i1} + a_{i2} R_{i2} + a_{i3} R_{i3} + a_{00} P_i \qquad (i = 1, 2, 3) \\ = a_{1i} R_{1i} + a_{2i} R_{2i} + a_{3i} R_{3i} + a_{00} P_i'. \; - \end{cases}$$

Wie zu den Relationen zweiten Grades zwischen den Coefficienten $a_{00}, a_{11} \dots a_{33}$, so führen die Formeln (1) auch leicht zu den *bilinearen Relationen* zwischen diesen Coefficienten und den Parametern $\alpha_0 \dots \alpha_3$,

*) Die Methoden der Invariantentheorie führen, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll, zu einem tieferen Einblick in die Structur dieses Systems von Relationen.

d. h. zu den Ausdrücken, die in den Grössen α_i wie in den Grössen a_{ik} linear und homogen sind, und die identisch verschwinden, wenn man die Coefficienten a_{ik} durch die Parameter α_i ausdrückt.

Wir theilen diese Relationen hier in der Gestalt und Anordnung mit, in der sie bei mehreren Rechnungen mit Nutzen verwendet werden können.

Zunächst hat man die drei Formeln

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31} = a_{00} \,.\, \alpha_1, \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{32} = a_{00} \,.\, \alpha_2, \\ \alpha_1 a_{13} + \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 a_{33} = a_{00} \,.\, \alpha_3, \end{cases}$$

die durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 in einander übergehen; ferner neun weitere, ähnlich gebaute Formeln, als deren Vertreter die drei folgenden gelten mögen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha_0 a_{11} - \alpha_3 a_{21} + \alpha_2 a_{31} = a_{00} \,.\, \alpha_0 & [3], \\ \alpha_0 a_{12} - \alpha_3 a_{22} + \alpha_2 a_{32} = a_{00} \,.\, \alpha_3 & [3], \\ \alpha_0 a_{13} - \alpha_3 a_{23} + \alpha_2 a_{33} = -a_{00} \,.\, \alpha_2 & [3]. \end{cases}$$

Aus diesen zwölf bilinearen Relationen ergeben sich zwölf weitere, wenn man a_{ik} mit a_{ki} vertauscht, und gleichzeitig $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$ ersetzt.

Somit kennen wir 24 bilineare Relationen. Diese sind aber nicht linear-unabhängig, sondern sie sind durch vier von einander unabhängige Identitäten verknüpft, nämlich durch diese:

$$(10)\qquad \begin{cases} \,[\alpha_0(a_{11}-a_{00}) - \alpha_3 a_{21} + \alpha_2 a_{31}] \\ -\,[\alpha_0(a_{11}-a_{00}) + \alpha_3 a_{12} - \alpha_2 a_{13}] \\ +\,[\alpha_0(a_{22}-a_{00}) - \alpha_1 a_{32} + \alpha_3 a_{12}] \\ -\,[\alpha_0(a_{22}-a_{00}) + \alpha_1 a_{23} - \alpha_3 a_{21}] \\ +\,[\alpha_0(a_{33}-a_{00}) - \alpha_2 a_{13} + \alpha_1 a_{23}] \\ -\,[\alpha_0(a_{33}-a_{00}) + \alpha_2 a_{31} - \alpha_1 a_{32}] = 0, \\[1ex] \,[\alpha_0 a_{32} - \alpha_2 a_{12} + \alpha_1(a_{22}+a_{00})] \\ +\,[\alpha_0 a_{23} + \alpha_2 a_{21} - \alpha_1(a_{22}+a_{00})] \\ -\,[\alpha_0 a_{23} - \alpha_1(a_{33}+a_{00}) + \alpha_3 a_{13}] \\ -\,[\alpha_0 a_{32} + \alpha_1(a_{33}+a_{00}) - \alpha_3 a_{31}] \\ -\,[\alpha_1(a_{11}-a_{00}) + \alpha_2 a_{21} + \alpha_3 a_{31}] \\ +\,[\alpha_1(a_{11}-a_{00}) + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13}] = 0 \quad [3]. \end{cases}$$

Hiernach sind vier von unseren Relationen überflüssig. *Die übrigen zwanzig aber sind linear-unabhängig; sie stellen die Gesammtheit aller linear-unabhängigen bilinearen Relationen zwischen den Parametern* $\alpha_0 \ldots \alpha_3$ *und den Transformationscoefficienten* $a_{00}, a_{11} \ldots a_{33}$ *vor.*

Der Beweis ist ganz ähnlich der soeben (S. 530) durchgeführten Betrachtung. —

Von einigen der hier zusammengestellten Formeln wollen wir sogleich eine Anwendung machen, indem wir untersuchen, wie sich die Parameter (α, β) durch die Transformationscoefficienten ausdrücken lassen.

Aus den Gleichungen (1) ergeben sich zunächst vier verschiedene Ausdrücke für die Verhältnisse der Grössen α_i, die sich als *lineare* Functionen der Transformationscoefficienten a_{ik} darstellen:

$$
(11)\quad \begin{cases}
\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \\
= (a_{00}+a_{11}+a_{22}+a_{33}) : (a_{23}-a_{32}) : (a_{31}-a_{13}) : (a_{12}-a_{21}) \\
= (a_{23}-a_{32}) : (a_{00}+a_{11}-a_{22}-a_{33}) : (a_{12}+a_{21}) : (a_{31}+a_{13}) \\
= (a_{31}-a_{13}) : (a_{12}+a_{21}) : (a_{00}+a_{22}-a_{33}-a_{11}) : (a_{23}+a_{32}) \\
= (a_{12}-a_{21}) : (a_{31}+a_{13}) : (a_{23}+a_{32}) : (a_{00}+a_{33}-a_{11}-a_{22}).
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen stellen im Grunde nur eine etwas übersichtlichere Form der Relationen (2) vor. Man sieht daraus:

Verschwindet irgend eines der sechzehn Glieder auf den rechten Seiten von (11), *so verschwinden gleichzeitig entweder alle die Glieder, die mit ihm in einer Verticalreihe stehen, oder alle die, die mit ihm in derselben Horizontalreihe enthalten sind.*

Im ersten Falle hat der entsprechende Parameter α_i den Werth Null; zugleich verschwindet, wegen der Symmetrie des Schemas (11) zu seiner Diagonale, auch eine Horizontalreihe, und eine unserer vier Proportionen nimmt die unbestimmte Form $0:0:0:0$ an. Da dies augenscheinlich nicht für alle vier Proportionen gleichzeitig eintreten kann, so erhält man unter *allen* Umständen eindeutig bestimmte, rationale Ausdrücke für die Verhältnisse der Grössen α_i.

Man mag etwa die erste unserer Proportionen benutzen, so lange $a_{00}+a_{11}+a_{22}+a_{33} \neq 0$ ist. Wenn aber dieser Ausdruck verschwindet, so wird das Coefficientenschema symmetrisch $(a_{ik} = a_{ki})$, und es ergeben sich die Verhältnisse der Grössen α_i aus einer der Proportionen

$$
(11\text{b})\quad \begin{cases}
\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 \\
= 0 : (a_{00}+a_{11}) : a_{12} : a_{31} \\
= 0 : a_{12} : (a_{00}+a_{22}) : a_{23} \\
= 0 : a_{31} : a_{23} : (a_{00}+a_{33}).
\end{cases}
$$

Von diesen ist die erste wiederum nur so lange brauchbar, als $a_{00}+a_{11} \neq 0$ ist. Verschwindet $a_{00}+a_{11}$, so wird auch $a_{12} = a_{31} = 0$, und man hat noch zwei Proportionen

$$
(11\mathrm{c})\qquad \begin{cases} \alpha_0 : \alpha_1 : \quad \alpha_2 \quad : \quad \alpha_3 \\ = 0 : 0 : (a_{00}+a_{22}) : \quad a_{23} \\ = 0 : 0 : \quad a_{23} \quad : (a_{00}-a_{22}), \end{cases}
$$

von denen wieder etwa die erste so lange brauchbar ist, als nicht $a_{00} + a_{22}$ verschwindet. Tritt auch noch dieser Fall ein, so hat man schliesslich

$$
(11\mathrm{d})\qquad \begin{cases} \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \quad \alpha_3 \\ = 0 : 0 : 0 : (a_{00}+a_{33}). \end{cases}
$$

Nachdem hieraus die Verhältnisse der Parameter α_i gefunden sind, ergeben sich die Parameter β_i durch Auflösung der linearen Gleichungen

$$
(12)\qquad \begin{cases} \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \\ \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_2\beta_3 = \frac{1}{2}a_{10} \cdot \frac{\Sigma\alpha_i^2}{a_{00}}, \\ \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 = \frac{1}{2}a_{\;0} \cdot \frac{\Sigma\alpha_i^2}{a_{00}}, \\ \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_0\beta_3 = \frac{1}{2}a_{30} \cdot \frac{\Sigma\alpha_i^2}{a_{00}}. \end{cases}
$$

Um daraus β_i zu finden, multiplicire man die linke und rechte Seite einer jeden dieser Gleichungen mit einem solchen Factor α_k, dass der Coefficient von β_i in der Summe der Producte links gleich $\Sigma\alpha_i^2$ wird. So kommt man zu den Formeln:

$$
(13)\qquad \begin{cases} \alpha_1 a_{10} + \alpha_2 a_{20} + \alpha_3 a_{30} = \quad 2a_{00} \cdot \beta_0, \\ \alpha_0 a_{10} - \alpha_3 a_{20} + \alpha_2 a_{30} = -2a_{00} \cdot \beta_1, \\ \alpha_3 a_{10} + \alpha_0 a_{20} - \alpha_1 a_{30} = -2a_{00} \cdot \beta_2, \\ -\alpha_2 a_{10} + \alpha_1 a_{20} + \alpha_0 a_{30} = -2a_{00} \cdot \beta_3. \end{cases}
$$

Es gehört also nicht allein zu jedem Parametersystem (α, β) *eine bestimmte Bewegung, sondern auch umgekehrt zu jeder Bewegung nur ein System von Parametern.*

Vorausgesetzt ist hier, dass die Determinante des Gleichungssystems (12) nicht verschwindet, dass also die Bewegung nicht ausartet. Für diesen Fall, der von uns ausgeschlossen worden ist, gilt der Satz natürlich nicht mehr.

Die in diesem Paragraphen mitgetheilten Betrachtungen lassen sich nach mehreren Richtungen hin verallgemeinern. Wir bemerken darüber nur, dass man die Gleichungen (5) und (6) des § 4 nach den Producten $\alpha_i\beta_k$ auflösen kann, und dass man in Folge dessen ohne Weiteres die von einander unabhängigen Relationen zweiten Grades angeben kann, die zwischen den 16 Grössen a_{ik} und den 9 Grössen b_{ik} bestehen. Um der grossen Zahl dieser Relationen willen (es sind ihrer nicht weniger als 208) verzichten wir jedoch darauf, sie erschöpfend

zu behandeln; es mag genügen, ausser den bereits angegebenen Relationen Nr. (8), § 4 noch einige von ihnen aufzuführen, die, mit Hülfe der bereits entwickelten Formeln, aus den Gleichungen (7), § 4 hervorgehen:

$$(14)\qquad \begin{cases} a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} = a_{00}a_{10} & [3], \\ a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23} = -a_{00}a_{10} & [3], \\ a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} = 0 & [3]. \end{cases}$$

Sie liefern die Ausdrücke der Coefficienten a_{i0}, wenn die Gleichungen der Bewegung in Liniencoordinaten gegeben sind.

Ein zweites Relationensystem dieser Art entsteht, wenn man in (14) die Grössen a_{ik}, b_{ik} mit den Grössen a_{ki}, b_{ki} vertauscht.

§ 6.

Andere Herleitung und Verallgemeinerung der Parameter (α, β).

Zu den Parametern (α, β), durch die wir die Bewegungen im Raume dargestellt haben, kann man noch auf mehreren anderen Wegen gelangen. Hier wollen wir eine Herleitung mittheilen, die den Vorzug hat, sehr kurz zu sein, und weiter Nichts vorauszusetzen, als den bekannten Zusammenhang der Formeln Eulers mit der Quaternionentheorie.

Seien e_0, e_1, e_2, e_3 die Quaternioneneinheiten, so dass

$$e_1^2 = -e_0 \;[3], \quad e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1 \;[3],$$

und seien α, β, $x, \ldots$ Quaternionen, beispielsweise also

$$(1)\qquad \alpha = \alpha_0e_0 + \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3,$$

sei endlich

$$(2)\qquad \bar{\alpha} = \alpha_0e_0 - \alpha_1e_1 - \alpha_2e_2 - \alpha_3e_3$$

die sogenannte conjugirte Quaternion der Quaternion α; so hat man

$$(3)\qquad \alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = \Sigma\alpha_i^2 = N(\alpha).$$

Es wird ferner

$$(4)\qquad x' = \bar{\alpha}x\alpha$$

der abgekürzte Ausdruck für Eulers Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt, den Anfangspunkt der Coordinaten, sofern man die Grössen $z_i = \frac{x_i}{x_0}$ als rechtwinklige Coordinaten im Raume deutet; die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter ziehen sich ebenfalls in eine einzige Gleichung zusammen:

$$(5)\qquad \alpha'' = \alpha\alpha'.$$

Wir haben nun offenbar den Ausdruck einer allgemeinen Bewegung vor uns, wenn wir statt der Gleichung (4) die folgende schreiben:

(6) $$x' = \bar{\alpha} x \alpha - 2\bar{\alpha}\beta \,.\, x_0;$$

sofern wir nur die Quaternion β so wählen, dass das zweite Glied auf der rechten Seite von (6) keinen Beitrag zum Werthe von x_0' liefert. Dies wird bewirkt durch die Forderung, dass

(7) $$\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha$$
$$= 2(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = 0$$

sein soll.

Rechnen wir, unter dieser Voraussetzung, den Ausdruck auf der rechten Seite von (6) aus, so kommen wir zu dem System der Gleichungen (1), (4), (5) des § 4. Man zeigt dann, wie in § 5, dass zu jedem System von Coefficienten a_{ik} nur ein System von Parametern (α, β) gehört.

Es fragt sich nun, wie die auf solche Art gefundenen Parameter (α, β) sich zusammensetzen.

Führen wir nach der Transformation (6) die Transformation

$$x'' = \bar{\alpha}' x' \alpha' - 2\bar{\alpha}'\beta' x_0'$$

aus, so findet sich sofort

$$x'' = \bar{\alpha}'\bar{\alpha} x \alpha\alpha' - 2(\bar{\alpha}'\bar{\alpha}\beta\alpha' + \bar{\alpha}'\bar{\alpha}\alpha\beta')x_0\,;$$

soll diese Gleichung wieder die Form (6) haben, soll also

$$x'' = \bar{\alpha}'' x \alpha'' - 2\bar{\alpha}''\beta'' x_0$$

sein, so folgt

(8) $$\alpha'' = \alpha\alpha', \quad \bar{\alpha}'' = \bar{\alpha}'\bar{\alpha}, \quad \beta'' = \alpha\beta' + \beta\alpha'.$$

Die zweite von diesen Gleichungen ist nur eine andere Form der ersten; rechnet man aber die erste und die dritte aus, so entstehen die Formeln (8) des § 2.

Hiermit haben wir den wichtigsten der bis jetzt abgeleiteten Sätze von Neuem bewiesen, allerdings unter Verzichtleistung auf die in § 1 gewonnene Erkenntniss, dass unsere Parameterdarstellung der Bewegungen einzig ist in ihrer Art. Zugleich aber gelangen wir zu einem neuen Ergebniss.

Statt der Formel (6) können wir nämlich einen etwas allgemeineren Ansatz machen, indem wir acht Parameter α_i, β_i benutzen, die durch keine Relation an einander gebunden sind: Auch die Formel

(9) $$x' = \bar{\alpha} x \alpha - (\bar{\alpha}\beta - \bar{\beta}\alpha)\, x_0$$

kann zur Darstellung der allgemeinen Bewegung im Raume benutzt werden. Fragen wir wieder nach der Zusammensetzung der Parameter, so erhalten wir statt der Formeln (8) die folgenden:

(10) $$\begin{cases} \alpha'' = \alpha\alpha', & \beta'' = \alpha\beta' + \beta\alpha', \\ \bar{\alpha}'' = \bar{\alpha}'\bar{\alpha}\,, & \bar{\beta}'' = \bar{\alpha}'\bar{\beta} + \bar{\beta}'\bar{\alpha}\,. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind wieder nur eine andere Form der beiden ersten Gleichungen. Rechnet man aber diese aus, so erhält man von Neuem die Formeln (8) des § 2; rechnet man die rechte Seite von (9) aus, so kommt man wiederum zu den Transformationsformeln (1), (4), (5) des § 4. Wir haben also den Satz:

Betrachtet man in unseren Ausdrücken der Coefficienten a_{ik} durch die Parameter (α, β) diese Parameter nicht, wie bisher, als von einander abhängig, sondern als völlig willkürliche Grössen — so gelten auch bei dieser Darstellung der Bewegungen noch dieselben Formeln für die Zusammensetzung der Parameter.

Endlich mögen wir, im Anschluss an das Vorgetragene, noch die Formel (3) des § 3 beweisen. Diese lautet in unserer jetzigen Bezeichnung

$$\alpha''\bar{\beta}'' + \beta''\bar{\alpha}'' = \alpha'\bar{\alpha}'(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}(\alpha'\bar{\beta}' + \beta'\bar{\alpha}'). \tag{11}$$

Aus den Formeln (10) aber folgt sofort

$$\begin{aligned}\alpha''\bar{\beta}'' + \beta''\bar{\alpha}'' &= \alpha\alpha'(\bar{\alpha}'\bar{\beta} + \bar{\beta}'\bar{\alpha}) + (\alpha\beta' + \beta\alpha')\bar{\alpha}'\bar{\alpha} \\ &= \alpha'\bar{\alpha}'(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + \alpha(\alpha'\bar{\beta}' + \beta'\bar{\alpha}')\bar{\alpha} \\ &= \alpha'\bar{\alpha}'(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) + \alpha\bar{\alpha}(\alpha'\bar{\beta}' + \beta'\bar{\alpha}'). \text{ —}\end{aligned}$$

Dass der soeben hervorgehobene Satz bestehen muss, war vorauszusehen; er lässt sich eben so leicht an die Theorie der in § 2 und § 3 behandelten Gruppe G_7 anschliessen.

Wie wir dort gesehen haben, enthält die Gruppe G_7 eine eingliedrige ausgezeichnete Untergruppe G_1, deren allgemeine endliche Transformation, in der Bezeichnung des § 2, lautet:

$$x' = x(e_0 + h\varepsilon_0) \tag{12}$$

sofern h einen numerischen Parameter bedeutet. (Vgl. § 2, Nr. (6)). Sei nun für den Augenblick mit $x' = xa^*$ irgend eine Transformation von G_7 bezeichnet, so kann man die Grösse h immer und nur auf eine Weise so bestimmen, dass der zweite Factor rechts in der Gleichung

$$a^* = (e_0 + h\varepsilon_0)a \tag{13}$$

der Bedingung $L(\alpha, \beta) = 0$ genügt, dass also

$$x' = xa^* \quad \text{und} \quad x' = xa \tag{14}$$

entsprechende Transformationen der isomorph auf einander bezogenen Gruppen G_7 und G_6 werden.

Man findet sofort

$$(15) \qquad h = \frac{L(\alpha^*, \beta^*)}{N(\alpha^*, \beta^*)},$$

$$(16) \qquad \alpha_i^* = \alpha_i, \qquad \beta_i^* = \beta_i + h\alpha_i.$$

Führt man nun, vermöge der Substitutionen (16), an Stelle der Parameter (α, β), die der Bedingung $L(\alpha, \beta) = 0$ genügen, in die Formeln (4) und (5) des § 4 die Parameter (α^*, β^*) ein, die der Bedingung $L(\alpha^*, \beta^*) = 0$ nicht genügen, so ändern jene Formeln ihre Gestalt nicht. Dies ist von Neuem der oben bewiesene Satz. Zugleich erkennen wir, worin die Bedeutung dieses Theorems liegt:

Der zuletzt hervorgehobene Satz gilt nicht mehr, wenn man die Ausdrücke der Coefficienten a_{ik} durch die Parameter (α, β) dadurch abändert, dass man ihren rechten Seiten Vielfache des verschwindenden Ausdrucks $L(\alpha, \beta)$ hinzufügt.

Wir können also in gewissem Sinne sagen, dass die von uns gewählten Ausdrücke von allen jenen Darstellungsformen, die man zunächst als gleichwerthig betrachten möchte, die *einfachsten* sind. In ihnen kommt der Isomorphismus der Gruppe der Bewegungen mit der zu den Biquaternionen gehörigen Gruppe G_7 am reinsten zum Ausdruck.

Natürlich ist es in der Regel viel zweckmässiger, die Bewegungen durch die Parameter (α, β) darzustellen, die nur in einer Art vorhanden sind, als die Parameter (α^*, β^*) zu benutzen, die den überzähligen Parameter h enthalten; wir werden auch in dieser Arbeit von den Parametern (α^*, β^*) noch keinen Gebrauch machen.

Die letzten Betrachtungen beziehen sich nur auf unsere Ausdrücke der Bewegungen durch *Punkt-* oder *Ebenencoordinaten.* Natürlich gilt aber auch für *Liniencoordinaten* ein entsprechender Satz, wenn man statt der Gleichungen (2), § 4 die unverkürzten Gleichungen schreibt, die sich aus den Gleichungen (1), § 4 ergeben:

$$(17) \qquad \begin{cases} p'_{01} = a_{00}(a_{11}p_{01} + a_{12}p_{02} + a_{13}p_{03}), & [3] \\ p'_{23} = (a_{00}b_{11} - 2La_{11})p_{01} + a_{00}a_{11}p_{23} & \\ \quad + (a_{00}b_{12} - 2La_{12})p_{02} + a_{00}a_{12}p_{31} & \\ \quad + (a_{00}b_{13} - 2La_{13})p_{03} + a_{00}a_{13}p_{12} & [3]. \end{cases}$$

Fügt man hier den linken Seiten den Factor $a_{00}^2 = N^2$ hinzu, und ersetzt man die Grössen $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$ durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$, so erhält man den Ausdruck der Adjungirten der Gruppe G_7 durch die Parameter (α, β) dieser Gruppe.

Wir würden also schon im § 3 zur Erkenntniss des auf S. 538 ausgesprochenen Satzes gelangt sein, wenn wir dort die Rechnung nicht von vorn herein durch Benutzung der Relation $L(\alpha, \beta) = 0$ abgekürzt hätten.

§ 7.

Geometrische Deutung der Parameter (α, β).

Unsere bisherigen Ueberlegungen beruhen allein auf der Voraussetzung, dass die zu untersuchenden Bewegungen nicht ausarten, dass a_{00} von Null verschieden ist; alles Vorgetragene gilt gleichmässig für reelle, wie für complexe Werthe der Coefficienten a_{ik} und der Parameter (α, β). Von nun an aber wollen wir uns, der Kürze halber, auf die Betrachtung reeller Werthe der genannten Grössen, also auf die Untersuchung *reeller Bewegungen* beschränken.

Wir ermitteln im Folgenden die geometrische Bedeutung, die den Parametern (α, β) oder vielmehr deren Verhältnissen in Bezug auf das Coordinatensystem (z_1, z_2, z_3) zukommt. Die hierbei anzustellenden einfachen Rechnungen mögen dem Leser überlassen bleiben; wir bemerken nur, dass man sich bei ihrer Ausführung mit Vortheil der in § 5 entwickelten Relationen bedienen kann.

Um zunächst den Mittelcomplex und die Schraubenaxe der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ zu finden, kann man etwa so verfahren, dass man, von den Gleichungen (2) in § 4 ausgehend, überhaupt alle (reellen) linearen Complexe aufsucht, die bei der Bewegung in Ruhe bleiben. Man findet, dass ihre Coordinaten p_{ik} im Allgemeinen dargestellt werden durch die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} p_{01} = \mu\alpha_1, & p_{02} = \mu\alpha_2, & p_{03} = \mu\alpha_3, \\ p_{23} = \mu\beta_1 - \nu\alpha_1, & p_{31} = \mu\beta_2 - \nu\alpha_2, & p_{12} = \mu\beta_3 - \nu\alpha_3, \end{cases}$$

und dass nur dann, wenn entweder α_0 oder $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ verschwindet, noch weitere solche Complexe hinzutreten. Unter den Complexen (1) ist u. A. sowohl der Mittelcomplex als auch die *Schraubenaxe* der Bewegung S enthalten. Man findet, dass der erste dem Parameterwerth $\nu : \mu = 0$, die zweite dem Parameterwerth

$$(2)\qquad \frac{\nu}{\mu} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_3} = -\frac{\alpha_0\beta_0}{a_{00} - \alpha_0^2}$$

entspricht. Besonders hervorgehoben zu werden verdient das erste Ergebniss:

Der Mittelcomplex der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ hat die Coordinaten:

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} \\ = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3. \end{cases}$$

Das Nullsystem $\mathfrak{W}$, die Zuordnung zwischen einer Sehnenmitte $\bar{x}$ und der Normalebene $\bar{\bar{u}}$ der zugehörigen Sehne, wird mithin dargestellt durch die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{\bar{u}}_0 = \quad \cdot \quad - \beta_1 \bar{x}_1 - \beta_2 \bar{x}_2 - \beta_3 \bar{x}_3, \\ \bar{\bar{u}}_1 = \beta_1 \bar{x}_0 \quad \cdot \quad - \alpha_3 \bar{x}_2 + \alpha_2 \bar{x}_3, \\ \bar{\bar{u}}_2 = \beta_2 \bar{x}_0 + \alpha_3 \bar{x}_1 \quad \cdot \quad - \alpha_1 \bar{x}_3, \\ \bar{\bar{u}}_3 = \beta_3 \bar{x}_0 - \alpha_2 \bar{x}_1 + \alpha_1 \bar{x}_2 \quad \cdot \quad, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \bar{x}_0 = \quad \cdot \quad - \alpha_1 \bar{\bar{u}}_1 - \alpha_2 \bar{\bar{u}}_2 - \alpha_2 \bar{\bar{u}}_3, \\ \bar{x}_1 = \alpha_1 \bar{\bar{u}}_0 \quad \cdot \quad - \beta_3 \bar{\bar{u}}_2 + \beta_2 \bar{\bar{u}}_3, \\ \bar{x}_2 = \alpha_2 \bar{\bar{u}}_0 + \beta_3 \bar{\bar{u}}_1 \quad \cdot \quad - \beta_1 \bar{\bar{u}}_3, \\ \bar{x}_3 = \alpha_3 \bar{\bar{u}}_0 - \beta_2 \bar{\bar{u}}_1 + \beta_1 \bar{\bar{u}}_2 \quad \cdot \quad . \end{cases}$$

Jedes dieser beiden Gleichungssysteme ist die Auflösung des anderen; ihre Determinanten haben den gemeinsamen Werth

$$(6)\qquad (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 = \alpha_0^2\,\beta_0^2.$$

Den beiden Fällen, in denen das Nullsystem $\mathfrak{W}$ ausartet, entsprechen also die beiden Fälle, in denen α_0 oder β_0 verschwindet.

Genaueren Aufschluss über die Bedeutung der Gleichungen $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ erhalten wir, wenn wir die Schraubungshöhe und den Schraubungswinkel der Schraubung $S(\alpha, \beta)$ berechnen. Beide Ausdrücke sind in dem folgenden Satz zusammengefasst:

Sei 2ϑ der Schraubungswinkel, 2η die Schraubungshöhe der Schraubung $S(\alpha, \beta)$; seien endlich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Winkel, die die Schraubungsaxe mit den Coordinatenaxen bildet, so besteht die Proportion:

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg}\vartheta : \cos\lambda_1 : \cos\lambda_2 : \cos\lambda_3 : \eta \\ = \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 . \end{cases}$$

Man entnimmt hieraus die speciellen Folgerungen:

Für die Umschraubungen verschwindet der Parameter α_0. | *Für die Drehungen verschwindet der Parameter β_0.*

Für die Schiebungen verschwinden die Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0$. — Die Umwendung um die Axe p_{ik} hat die Parameter

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 \\ = 0 : p_{01} : p_{02} : p_{03} : 0 : p_{23} : p_{31} : p_{12} . \end{cases}$$

Aus (7) folgt

$$(9)\qquad \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}},$$

$$(10)\qquad \eta = \frac{\beta_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}},$$

wobei man das Vorzeichen der Quadratwurzel beidemal in demselben

Sinne zu bestimmen hat. Verschwindet der Nenner, so wird S eine Schiebung. Der Ausdruck für η nimmt aldann die unbestimmte Form $0:0$ an; als wahrer Werth der halben Schiebungsgrösse findet sich:

$$\eta = \frac{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}{\alpha_0}. \text{ —} \tag{10b}$$

Zu sehr bemerkenswerthen Ergebnissen werden wir geführt, wenn wir auch noch die mit der Bewegung S verknüpften Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ und T durch die Parameter (α, β) ausdrücken.

Wir betrachten, wie in § 5 des ersten Abschnittes, die von Punkten und Ebenen gebildeten Figuren, deren Elemente in dieser Beziehung zu einander stehen:

$$x\{\mathfrak{T}_1\}\bar{x}\{\mathfrak{T}_2\}x', \qquad u\{\mathfrak{T}_2\}\bar{u}\{\mathfrak{T}_1\}u',$$
$$x\{T\}\bar{\bar{u}}\{T\}x'.$$

Erinnern wir uns der Bedeutung dieser Formeln, so kommen wir zu den Sätzen:

I. *Die Abhängigkeit der Endpunkte x, x' einer Sehne xx' von der Sehnenmitte $\bar{x}$ wird ausgedrückt durch die Formeln*

$$\mathfrak{T}_1^{-1}: \begin{cases} x_0 = \alpha_0\bar{x}_0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\,, \\ x_1 = \beta_1\bar{x}_0 + \alpha_0\bar{x}_1 - \alpha_3\bar{x}_2 + \alpha_2\bar{x}_3, \\ x_2 = \beta_2\bar{x}_0 + \alpha_3\bar{x}_1 + \alpha_0\bar{x}_2 - \alpha_1\bar{x}_3, \\ x_3 = \beta_3\bar{x}_0 - \alpha_2\bar{x}_1 + \alpha_1\bar{x}_2 + \alpha_0\bar{x}_3; \end{cases} \tag{11a}$$

$$\mathfrak{T}_2: \begin{cases} x_0' = \alpha_0\bar{x}_0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\,, \\ x_1' = -\beta_1\bar{x}_0 + \alpha_0\bar{x}_1 + \alpha_3\bar{x}_2 - \alpha_2\bar{x}_3, \\ x_2' = -\beta_2\bar{x}_0 - \alpha_3\bar{x}_1 + \alpha_0\bar{x}_2 + \alpha_1\bar{x}_3, \\ x_3' = -\beta_3\bar{x}_0 + \alpha_2\bar{x}_1 - \alpha_1\bar{x}_2 + \alpha_0\bar{x}_3\text{*}). \end{cases} \tag{11b}$$

Ausgenommen sind nur die Umschraubungen (die Bewegungen, deren Parameter α_0 verschwindet).

*) Diese Formeln (11), oder doch solche, die von ihnen nicht sehr verschieden sind, bilden den Kern der auch heute noch beachtenswerthen Abhandlung von Rodrigues: *Des lois géométriques qui régissent les déplacéments d'un système solide dans l'éspace.* Liouville J. t. 5 (1840). Sie sind diesem Autor so merkwürdig erschienen, dass er es nicht für überflüssig gehalten hat, sie auf vier verschiedene Arten zu beweisen. Er hat sich nur insofern geirrt, als er glaubte zeigen zu können, dass seine Formeln ausnahmslos gültig seien.

Die von Rodrigues benutzten Parameter hängen mit den hier verwendeten sehr einfach zusammen: Es ist

$$\mathsf{A} = -2\frac{\beta_1}{\alpha_0}, \quad \mathsf{B} = -2\frac{\beta_2}{\alpha_0}, \quad \Gamma = -2\frac{\beta_3}{\alpha_0},$$
$$m = 2\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad n = 2\frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad p = 2\frac{\alpha_3}{\alpha_0}.$$

II. *Die Abhängigkeit der beiden einander zugeordneten Ebenen u, u' von ihrer Winkelhalbirenden erster Art $\bar{u}$ wird ausgedrückt durch die Formeln*

$$(12\text{a})\qquad \mathfrak{T}_2^{-1}:\begin{cases} u_0 = \alpha_0\bar{u}_0 - \beta_1\bar{u}_1 - \beta_2\bar{u}_2 - \beta_3\bar{u}_3,\\ u_1 = \quad\cdot\quad + \alpha_0\bar{u}_1 - \alpha_3\bar{u}_2 + \alpha_2\bar{u}_3,\\ u_2 = \quad\cdot\quad + \alpha_3\bar{u}_1 + \alpha_0\bar{u}_2 - \alpha_1\bar{u}_3,\\ u_3 = \quad\cdot\quad - \alpha_2\bar{u}_1 + \alpha_1\bar{u}_2 + \alpha_0\bar{u}_3,\end{cases}$$

$$(12\text{b})\qquad \mathfrak{T}_1:\begin{cases} u_0' = \alpha_0\bar{u}_0 + \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2 + \beta_3\bar{u}_3,\\ u_1' = \quad\cdot\quad + \alpha_0\bar{u}_1 + \alpha_3\bar{u}_2 - \alpha_2\bar{u}_3,\\ u_2' = \quad\cdot\quad - \alpha_3\bar{u}_1 + \alpha_0\bar{u}_2 + \alpha_1\bar{u}_3,\\ u_3' = \quad\cdot\quad + \alpha_2\bar{u}_1 - \alpha_1\bar{u}_2 + \alpha_0\bar{u}_3.\end{cases}$$

Ausgenommen sind jedoch wieder die Umschraubungen.

III. *Die Abhängigkeit der Endpunkte x, x' einer Sehne von deren Normalebene $\bar{\bar{u}}$ wird ausgedrückt durch die Formeln*

$$(13\text{a})\qquad T^{-1}:\begin{cases} x_0 = \quad\cdot\quad - \alpha_1\bar{\bar{u}}_1 - \alpha_2 u_2 - \alpha_3\bar{\bar{u}}_3,\\ x_1 = \alpha_1\bar{\bar{u}}_0 + \beta_0\bar{\bar{u}}_1 - \beta_3\bar{\bar{u}}_2 + \beta_2\bar{\bar{u}}_3,\\ x_2 = \alpha_2\bar{\bar{u}}_0 + \beta_3\bar{\bar{u}}_1 + \beta_0\bar{\bar{u}}_2 - \beta_1\bar{\bar{u}}_3,\\ x_3 = \alpha_3\bar{\bar{u}}_0 - \beta_2\bar{\bar{u}}_1 + \beta_1\bar{\bar{u}}_2 + \beta_0\bar{\bar{u}}_3;\end{cases}$$

$$(13\text{b})\qquad T:\begin{cases} x_0' = \quad\cdot\quad + \alpha_1\bar{\bar{u}}_1 + \alpha_2\bar{\bar{u}}_2 + \alpha_3\bar{\bar{u}}_3,\\ x_1' = -\alpha_1\bar{\bar{u}}_0 + \beta_0\bar{\bar{u}}_1 + \beta_3\bar{\bar{u}}_2 - \beta_2\bar{\bar{u}}_3,\\ x_2' = -\alpha_2\bar{\bar{u}}_0 - \beta_3\bar{\bar{u}}_1 + \beta_0\bar{\bar{u}}_2 + \beta_1\bar{\bar{u}}_3,\\ x_3' = -\alpha_3\bar{\bar{u}}_0 + \beta_2\bar{\bar{u}}_1 - \beta_1\bar{\bar{u}}_2 + \beta_2\bar{\bar{u}}_3.\text{*)}\end{cases}$$

Ausgenommen sind hier die Drehungen (die Bewegungen, deren Parameter β_0 verschwindet). —

Eliminirt man also aus den Gleichungen (11) *die Coordinaten $\bar{x}$ der Sehnenmitte, oder aus den Gleichungen* (12) *die Coordinaten $\bar{u}_i$ der Winkelhalbirenden, oder endlich aus den Gleichungen* (13) *die Coordinaten $\bar{\bar{u}}_i$ der Normalebene, so entstehen die Gleichungen der allgemeinen Bewegung im Raume.*

---

*) Die Formeln (11)...(13) wurden vom Verfasser in einer vorläufigen Mittheilung über die in dieser Arbeit behandelten Gegenstände angegeben. (Sächs. Ber. Oct. 1890, S. 347 und 348). Gleichzeitig hat auch Herr Lindemann einige Andeutungen über die in den Formeln (12) liegende Parameterdarstellung der Bewegungen gemacht. (Vorlesungen über Geometrie, Bd. II (1891), S. 373 unten). Er hat indessen seinen Gedanken nicht weiter ausgeführt; auch hat er — wenn ich ihn recht verstehe — das Vorhandensein von Formelpaaren des Typus (11) oder (13) in Abrede gestellt.

Ausgenommen sind indessen in den beiden ersten Fällen die Umschraubungen und im letzten die Drehungen: Diese besonderen Bewegungen können nicht auf solche Art erhalten werden.

Um von dem Zustandekommen der Ausnahmefälle eine klare Vorstellung zu erhalten, bedenken wir, dass wir den linken Seiten der Gleichungssysteme (11), (12) und (13) genau genommen noch je einen Proportionalitätsfactor ϱ hinzuzufügen haben. Nehmen wir diesen Factor in den beiden ersten Fällen $= \alpha_0$, und im letzten $= \beta_0$, so bestehen unsere Gleichungen völlig allgemein; die Gleichungen (11) z. B. sagen dann für den Fall $\alpha_0 = 0$ aus, dass die Sehnenmitte $\bar{x}$ auf der Schraubenaxe liegt. Natürlich kann man jetzt die Verhältnisse der Grössen x_i oder x_i' nicht mehr durch die Verhältnisse der Grössen $\bar{x}_i'$ ausdrücken. Entsprechendes gilt in den anderen Fällen.

Die Determinante der Gleichungen (11a), (11b), (12a) oder (12b) hat den Werth $a_{00} \cdot \alpha_0^2$, die Determinante der Gleichungen (13a) oder (13b) den Werth

$$(14)\qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\,\beta_0^2 + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 = \alpha_{00}\beta_0^2.$$

Man sieht also, dass die Gleichungen (11) und (12) nach den Grössen $\bar{x}_i$, bez. $\bar{u}_i$ auflösbar sind, wenn $\alpha_0 \neq 0$ ist, und die Gleichungen (13) nach den Grössen $\bar{\bar{u}}_i$, wenn $\beta_0 \neq 0$ ist. Vorausgesetzt ist dabei, dass mit β_0 zugleich auch $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ verschwinden muss. Aber auch dann, wenn man die in den Formeln (13) vorkommenden Parameter als völlig unabhängige Grössen betrachten wollte, würden sie immer noch nicht zur Darstellung der Drehungen brauchbar sein: Man erhielte in diesem Fall durch Elimination der Grössen $\bar{\bar{u}}_i$ nur die identische Transformation. (Man vergleiche die Formeln (4) und (5) S. 541.) Löst man nun die genannten Gleichungen wirklich auf, so findet sich:

$$(11c)\qquad \mathfrak{T}_1: \begin{cases} \bar{x}_0 = 2a_{00}x_0 & \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \bar{x}_1 = a_{10}x_0 + (a_{11}+a_{00})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\,, \\ \bar{x}_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + (a_{22}+a_{00})x_2 + a_{23}x_3\,, \\ \bar{x}_3 = a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}+a_{00})x_3\,, \end{cases}$$

(nach Unterdrückung eines Factors $2a_{00} \cdot \alpha_0$ auf der linken Seite), ferner:

$$(12c)\qquad \mathfrak{T}_2: \begin{cases} \bar{u}_0 = 2a_{00}u_0 + a_{01}u_1 + a_{02}u_2 + a_{03}u_3\,, \\ \bar{u}_1 = \quad\cdot\quad (a_{11}+a_{00})u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3\,, \\ \bar{u}_2 = \quad\cdot\quad a_{21}u_1 + (a_{22}+a_{00})u_2 + a_{23}u_3\,, \\ \bar{u}_3 = \quad\cdot\quad a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33}+a_{00})u_3\,, \end{cases}$$

(wieder nach Unterdrückung eines Factors $2a_{00}\,.\,\alpha_0$ auf der linken Seite). Endlich wird

$$(13\text{c})\qquad T:\begin{cases} \bar{\bar{u}}_0 = -2d_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3,\\ \bar{\bar{u}}_1 = \quad a_{10}x_0 + (a_{11}-a_{00})x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \bar{\bar{u}}_2 = \quad a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + (a_{22}-a_{00})x_2 + a_{23}x_3,\\ \bar{\bar{u}}_3 = \quad a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-a_{00})x_3,\end{cases}$$

nachdem man links einen Factor $-2a_{00}\,.\,\beta_0$ unterdrückt, und zur Abkürzung

$$(15)\qquad d_{00} = \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$$

geschrieben hat.

Verbindet man nun die Formeln (11b) und (11c), (12b) und (12c), (13b) und (13c), so kommt man, wie gesagt, in allen Fällen zu den Transformationsformeln des § 4 zurück; man erhält aber, wie vorauszusehen, jene Formeln nicht sogleich in der dort angegebenen Gestalt, sondern erst dann, wenn man auf den rechten Seiten bez. die Factoren $2\alpha_0$, $2\alpha_0$, $2\beta_0$ beseitigt hat. —

In mehrfacher Hinsicht bemerkenswerth ist die Art, wie die Parameter (α, β) in die Formeln (4), (5), (11a), (11b), (12a), (12b), (13a), (13b) eintreten. Sie kommen in ihnen allen nur linear vor; ferner fehlen in (4) und (5) die Parameter α_0, β_0, in (11) und (12) fehlt der Parameter β_0, und in (13) der Parameter α_0. Indem wir die letztgenannten Thatsachen hervorheben, mögen wir bemerken, dass die Transformationen $\mathfrak{T}_1^{-1}$ und $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2^{-1}$, T und T^{-1} ihre Rolle wechseln, wenn man die Bewegung S mit der entgegengesetzten Bewegung S^{-1} vertauscht. Es genügt daher, zu sagen:

Die mit den Bewegungen im Raume verknüpften Transformationen $\mathfrak{T}_2(\mathfrak{T}_1)$ bilden, als Transformationen zwischen Punkten (Ebenen) aufgefasst, eine sechsfach ausgedehnte lineare Mannigfaltigkeit.

Die mit den Bewegungen im Raume verknüpften Transformationen T bilden, als Ebenen-Punkt-Transformationen aufgefasst, eine sechsfach ausgedehnte lineare Mannigfaltigkeit.

Deutet man die Verhältnisse $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$ der Coefficienten z. B. von $\mathfrak{T}_2$ als homogene Coordinaten in einem sechsfach ausgedehnten Raume R_6, so hat man damit eine im Allgemeinen eindeutig-umkehrbare Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Bewegungen auf die Punkte dieses Raumes hergestellt. Ein singuläres Verhalten bei dieser Abbildung zeigen, neben den ausgearteten Bewegungen, nur die *Umschraubungen:* Allen Umschraubungen mit derselben Axe entspricht ein und derselbe Punkt des Raumes R_6. Eine ganz ähnliche

Abbildung entsteht, wenn man von dem Satze rechts ausgeht; jetzt sind aber die *Drehungen* die singulären Elemente. Allen Drehungen um die nämliche Axe entspricht derselbe Punkt; der identischen Transformation aber entspricht ein völlig unbestimmter Punkt.

Die Sätze I, II, III kann man natürlich auch unmittelbar begründen, ohne Kenntniss der in den §§ 1...6 entwickelten Theorie, wie es im Falle der Gleichungen (11) von Rodrigues thatsächlich geleistet worden ist. Führt man dann mit Hülfe der Relation $L(\alpha, \beta) = 0$ in jedem Falle den noch fehlenden überzähligen Parameter ein, so hat man einen dritten Weg zu unserer Parameterdarstellung der Bewegungen. Wir begnügen uns mit dieser Andeutung, da eine tiefere Einsicht in das Wesen der letzten Sätze nur aus der allgemeinen Theorie der quadratischen Formen geschöpft werden kann, also (bei sachgemässer Darstellung) Hülfsmittel erfordert, deren Anwendung wir uns hier versagen.

§ 8.

Die canonischen Parameter der Bewegungen. Continuirliche Bewegungsgruppen.

Specialisiren wir unsere Parameter, unter Einführung einer unendlich kleinen Grösse δt, deren Quadrat vernachlässigt wird, in dieser Weise:

$$(1)\qquad \alpha_0 = 1,\quad \beta_0 = 0,\quad \alpha_i = \mathfrak{a}_i \delta t,\quad \beta_i = \mathfrak{b}_i \delta t,\quad (i = 1, 2, 3),$$

so erhalten wir wieder die Formeln

$$(2)\qquad \begin{cases} z_1' = z_1 - 2\{\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_3 z_2 + \mathfrak{a}_2 z_3\}\,\delta t, \\ z_2' = z_2 - 2\{\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_1 z_3 + \mathfrak{a}_3 z_1\}\,\delta t, \\ z_3' = z_3 - 2\{\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_2 z_1 + \mathfrak{a}_1 z_2\}\,\delta t, \end{cases}$$

die die allgemeine unendlich kleine Bewegung darstellen; dieselbe infinitesimale Transformation, deren Symbol

$$(3)\qquad Xf = \sum_1^3 (\mathfrak{a}_i^0 X_i f + \mathfrak{b}_i^0 Y_i f)$$

wir bereits in § 1 und § 2 eingeführt haben.

Diese infinitesimale Bewegung erzeugt nun „durch unendlichmalige Wiederholung“ die allgemeine endliche Bewegung, deren Gleichungen nach S. Lie in dieser Weise geschrieben werden können:

$$(4)\qquad z_i' = z_i + X(z_i) + \frac{1}{2!} X\big(X(z_i)\big) + \frac{1}{3!} X\Big(X\big(X(z_i)\big)\Big) + \cdots.$$

Die hierin auftretenden Parameter $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ heissen die *canonischen*

Parameter der Bewegung. Es fragt sich, wie sie mit den Parametern (α, β) verknüpft sind.

Um diesen Zusammenhang zu ermitteln, verfahren wir am einfachsten und anschaulichsten so, dass wir die Schraubenaxe n der Bewegung S, ihre Schraubungshöhe 2η und den Schraubungswinkel 2ϑ, die wir alle durch die Parameter (α, β) schon dargestellt haben, nun auch durch die canonischen Parameter $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i$ ausdrücken. Zunächst erhält man aus (1) die Schraubenaxe, sowie die Grössen η und ϑ für die infinitesimale Bewegung Xf. Berücksichtigt man, dass in der von Xf erzeugten eingliedrigen Gruppe die Schraubenaxe für alle Bewegungen dieselbe ist, und dass η und ϑ sich dem Parameter t der Gruppe proportional ändern, so ergeben sich für die Parameter (α, β) der allgemeinen Transformation (t) unserer eingliedrigen Gruppe die Ausdrücke:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\varrho\alpha_0 = \sqrt{\mathfrak{m}}\operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t, & \varrho\beta_0 = -\,\mathfrak{n}t,\\
\varrho\alpha_1 = \mathfrak{a}_1, & \varrho\beta_1 = \mathfrak{b}_1 + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}(\sqrt{\mathfrak{m}}\,t\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t - 1)\,\mathfrak{a}_1,\\
\varrho\alpha_2 = \mathfrak{a}_2, & \varrho\beta_2 = \mathfrak{b}_2 + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}(\sqrt{\mathfrak{m}}\,t\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t - 1)\,\mathfrak{a}_2,\\
\varrho\alpha_3 = \mathfrak{a}_3, & \varrho\beta_3 = \mathfrak{b}_3 + \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}(\sqrt{\mathfrak{m}}\,t\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t - 1)\,\mathfrak{a}_3,
\end{cases}
$$

worin zur Abkürzung

$$
(6)\qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3, \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3
$$

gesetzt ist.

Man überzeugt sich leicht durch wirkliche Ausrechnung davon dass die Gleichungen (5) bei veränderlichem t in der That die von der infinitesimalen Transformation (2) erzeugte Gruppe darstellen. Setzt man den Proportionalitätsfactor ϱ der Einfachheit halber gleich Eins, und bezeichnet man durch α_i^*, β_i^* die Werthe der Parameter (α, β), die aus den Werthen α_i'', β_i'' in Nr. (8), § 2 dadurch hervorgehen, dass man rechts an Stelle von α_i, β_i und α_i', β_i' die den Formeln (5) zu entnehmenden Werthe von $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ und $\alpha_i(t')$, $\beta_i(t')$ einsetzt, so werden die Grössen α_i^*, β_i^* proportional zu den aus (5) hervorgehenden Werthen von $\alpha_i(t+t')$, $\beta_i(t+t')$:

$$
(7)\qquad \begin{cases}
\alpha_i^* = \sqrt{\mathfrak{m}}(\operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t + \operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t')\cdot\alpha_i(t+t'),\\
\beta_i^* = \sqrt{\mathfrak{m}}(\operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t + \operatorname{ctg}\sqrt{\mathfrak{m}}\,t')\cdot\beta_i(t+t');
\end{cases}
$$

es besteht also zwischen den drei Bewegungen $S(t)$, $S(t')$, $S(t+t')$ die Beziehung $S(t)\cdot S(t') = S(t+t')$.

Wenn $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ nicht gleichzeitig den Werth Null haben, so geben die Formeln (5) bei einem endlichen Werthe von t im Allgemeinen unmittelbar völlig bestimmte endliche Werthe für die Ver-

hältnisse der Parameter (α, β); denn diese Formeln enthalten die Irrationalität $\sqrt{\mathfrak{m}}$ nur scheinbar. Wenn aber t ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{m}}}$, etwa gleich $\frac{\varkappa\pi}{\sqrt{\mathfrak{m}}}$ wird, so muss man den Proportionalitätsfactor ϱ ins Unendliche wachsen lassen, um noch endliche Werthe der Grössen α_i, β_i zu erhalten. Die zugehörigen Bewegungen werden Schiebungen:

$$(5\text{b})\quad \begin{cases} \varrho\alpha_0 = \frac{\mathfrak{m}\sqrt{\mathfrak{m}}}{\pi}, & \varrho\beta_i = \mathfrak{n}\,.\,\varkappa\,.\,\mathfrak{a}_i, \\ \beta_0 = 0, & \alpha_i = 0. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Schiebungen entstehen endlich auch, wenn $\mathfrak{m}$ verschwindet:

$$(5\text{c})\quad \varrho\alpha_0 = 1,\ \ \beta_0 = 0,\ \ \alpha_i = 0,\ \ \varrho\beta_i = \mathfrak{b}_i t \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die entwickelten Formeln geben den Zusammenhang zwischen den Parametern (α, β) einer Bewegung und den canonischen Parametern $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ derselben Bewegung vollständig an, sobald man in ihnen $t = 1$ setzt. Lösen wir die Gleichungen (5) unter dieser Voraussetzung auf, so finden wir

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = \cos\lambda_1 \cdot \vartheta, & \mathfrak{b}_1 = \cos\lambda_1 \cdot \eta \cdot (\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta - 1) + \mu_1 \cdot \vartheta, \\ \mathfrak{a}_2 = \cos\lambda_2 \cdot \vartheta, & \mathfrak{b}_2 = \cos\lambda_2 \cdot \eta \cdot (\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta - 1) + \mu_2 \cdot \vartheta, \\ \mathfrak{a}_3 = \cos\lambda_3 \cdot \vartheta, & \mathfrak{b}_3 = \cos\lambda_3 \cdot \eta \cdot (\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta - 1) + \mu_3 \cdot \vartheta, \end{cases}$$

worin die Grössen $\operatorname{ctg}\vartheta$, η, $\cos\lambda_i$, μ_i folgende Werthe haben:

$$(9)\quad \begin{aligned} \operatorname{ctg}\vartheta &= \frac{\alpha_0}{\sqrt{a_{00} - \alpha_0^2}}, & \eta &= \frac{\beta_0}{\sqrt{a_{00} - \alpha_0^2}}, \\ \cos\lambda_i &= \frac{\alpha_i}{\sqrt{a_{00} - \alpha_0^2}}, & \mu_i &= \frac{\beta_i}{\sqrt{a_{00} - \alpha_0^2}}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (8) und (9) ergeben die canonischen Parameter für eine jede Bewegung, die keine Schiebung ist. Man erhält für jede Bewegung $S(\alpha, \beta)$ unendlich viele verschiedene Werthe der Grössen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, denen ebensoviele unendlich kleine Bewegungen entsprechen, die die Bewegung $S(\alpha, \beta)$ erzeugen. Ausgenommen ist jedoch der Fall, dass S eine Drehung ist $(\eta = 0)$. In diesem Falle haben die canonischen Parameter $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ eindeutig-bestimmte Verhältnisse; S wird nur von *einer* unendlich-kleinen Bewegung erzeugt, von dieser aber noch unendlich oft.

Ein wesentlich anderes Verhalten zeigen die Schiebungen. Die canonischen Parameter einer Schiebung werden thatsächlich unbestimmt. Berücksichtigt man, dass aus den Gleichungen (8) und (9) die Relationen

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{m} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3 = \vartheta^2, \\ \mathfrak{n} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 = -\,\eta\vartheta \end{cases}$$

folgen, und dass die Grössen auf der rechten Seite auch bei den Schiebungen endliche Werthe behalten, so ergibt sich bei Gebrauch der Abkürzungen:

$$(11)\qquad \cos\lambda_i = \frac{-\beta_i}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}, \quad \eta = \frac{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}{\alpha_0},$$

dass man für eine Schiebung mit den Parametern $\alpha_0, 0, 0, 0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ zwei verschiedene Ansätze machen kann. Entweder, man setzt, unter $\varkappa$ eine von Null verschiedene ganze Zahl verstehend,

$$(8\text{b})\qquad \mathfrak{a}_1 = \cos\lambda_1 \cdot \varkappa\pi, \quad \mathfrak{a}_2 = \cos\lambda_2 \cdot \varkappa\pi, \quad \mathfrak{a}_3 = \cos\lambda_3 \cdot \varkappa\pi,$$

und wählt $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ der Bedingung gemäss

$$(10\text{b})\qquad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 = -\eta\cdot\varkappa\pi,$$

im Uebrigen aber beliebig. Oder man setzt

$$(8\text{c})\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_1 = 0, & \mathfrak{a}_2 = 0, & \mathfrak{a}_3 = 0, \\ \mathfrak{b}_1 = -\eta\cos\lambda_1, & \mathfrak{b}_2 = -\eta\cos\lambda_2, & \mathfrak{b}_3 = -\eta\cos\lambda_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8b) und (10b) enthalten zusammen die allgemeine Auflösung der Gleichungen (5b); jedem Werthe von $\varkappa$ entsprechend erhält man ∞^2 Werthe der canonischen Parameter $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i$; sie geben die Erzeugung der Schiebung $S(\alpha, \beta)$ durch unendlich kleine Schraubungen; die Gleichungen (8c) aber entsprechen den Gleichungen (5c); sie geben die Parameter der unendlich kleinen Schiebung an, die die Schiebung $S(\alpha, \beta)$ erzeugt.

In noch höherem Grade unbestimmt, als die canonischen Parameter einer allgemeinen Schiebung, werden endlich die canonischen Parameter der identischen Transformation, deren leicht abzuleitende Ausdrücke unterdrückt werden mögen.

Bemerkenswerth ist der Umstand, dass nicht nur die schon besprochenen Grössen η, ϑ, λ_i, sondern auch die Grössen μ_i auf den rechten Seiten der Gleichungen (8) einfache geometrische Bedeutungen haben. Mit dem Mittelcomplex der Bewegung $S(\alpha, \beta)$ ist nämlich in bekannter Weise eine Ausdehnungsgrösse zweiter Stufe oder ein Kräftesystem verbunden, das man, mit Anwendung der Bezeichnungen Grassmanns, so darstellen kann:

$$(12)\qquad \begin{cases} \cos\lambda_1[e_0e_1] + \cos\lambda_2[e_0e_2] + \cos\lambda_3[e_0e_3] \\ +\mu_1[e_2e_3] + \quad \mu_2[e_3e_1] + \quad \mu_3[e_1e_2]. \end{cases}$$

e_0 bedeutet hier den Anfangspunkt der Coordinaten, e_1, e_2, e_3 sind Strecken von der Länge Eins, den Coordinatenaxen parallel gerichtet, $[e_ie_\varkappa]$ sind die äusseren Producte zweiter Stufe dieser Grössen, deren äusseres Product vierter Stufe $[e_0e_1e_2e_3]$ gleich Eins gesetzt wird. Stellt man die Ausdehnungsgrösse (12) als Summe von zwei Linien-

theilen dar, so schliessen diese (bekanntlich) ein Tetraeder von constantem Inhalt J ein; $6\,J$ wird gleich dem äusseren Quadrat des Ausdrucks (12), d. h. es besteht die Gleichung

$$J = -\frac{1}{3}\,\eta \operatorname{ctg} \vartheta. \tag{13}$$

Die Grössen μ_1, μ_2, μ_3 stellen sich sofort in einfachster Weise dar als die sechsfachen Summen von je zwei Tetraedern, oder als die Momente des Kräftesystems in Bezug auf die Coordinatenaxen. —

Mit Hülfe der entwickelten Formeln kann man in alle Ausdrücke, die die Transformationscoefficienten a_{ix} oder die Parameter (α, β) einer Bewegung enthalten, die canonischen Parameter $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ einführen. Man kann z. B. aus den Gleichungen (8), § 2 die endlichen Gleichungen der canonischen Parametergruppe ableiten. Doch wird der Bau dieser Gleichungen so verwickelt, dass es keinen Nutzen hat, sie anzuschreiben. Man wird sich überhaupt in den meisten Fällen der Parameter (α, β) mit ungleich grösserem Vortheil bedienen, als der canonischen Parameter $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i$, deren Einführung die Auflösung transcendenter Gleichungen erfordert.

Eine wichtige Eigenthümlichkeit der canonischen Parameter $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ besteht darin, dass sich in ihnen alle continuirlichen Bewegungsgruppen durch *lineare* Gleichungen darstellen lassen. Die Parameter (α, β) haben diese Eigenschaft nicht. Es ist aber bemerkenswerth, dass wenigstens *die* Bewegungsgruppen, deren Transformationen durch *algebraische* Gleichungen zwischen den Coefficienten a_{ix} gekennzeichnet werden können [nämlich die Untergruppen 2), 3), 4b), 5), 6), 7), 8b), 9) der in § 9 des ersten Abschnitts gegebenen Aufzählung] bei Gebrauch der Parameter (α, β) ebenfalls durch *lineare* Gleichungen zwischen diesen Parametern definirt werden.

So gelangt man zur Gruppe der *Drehungen um einen gegebenen Punkt* $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$, wenn man die Parameter (α, β) gemäss den Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} \beta_0 &= 0, \\ y_0\beta_1 &= \alpha_3 y_2 - \alpha_2 y_3, \\ y_0\beta_2 &= \alpha_1 y_3 - \alpha_3 y_1, \\ y_0\beta_3 &= \alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 \end{aligned}\right. \tag{14}$$

wählt.

Es hat keine Schwierigkeit, mit Hülfe der Parameter (α, β) alle continuirlichen Bewegungsgruppen auszudrücken und zu untersuchen. Auch bei der Darstellung nicht continuirlicher Gruppen von Bewegungen (sowie der Gruppen von Bewegungen und Umlegungen, vgl. § 9) werden diese Parameter wohl von Nutzen sein. Allerdings habe ich über diesen umfangreichen Gegenstand Untersuchungen noch nicht angestellt.

§ 9.

Der Ausdruck der Umlegungen im Raume durch die Parameter (α, β).

Um von dem analytischen Ausdruck der allgemeinen Bewegung im Raume zu dem Ausdruck der allgemeinen Umlegung überzugehen, braucht man nur vor, oder wie wir thun wollen, nach der Bewegung eine Spiegelung an dem Anfangspunkt der Coordinaten vorzunehmen. So gehen aus den Formeln (1), (2), (3) des § 4 die folgenden hervor:

$$(1) \quad \begin{cases} x_0' = -a_{00}x_0 \quad . \quad . \quad . \quad , \\ x_1' = \quad a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = \quad a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = \quad a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} p_{01}' = -a_{11}p_{01} - a_{12}p_{02} - a_{13}p_{03}, & [3] \\ p_{23}' = \quad b_{11}p_{01} + b_{12}p_{02} + b_{13}p_{03} & \\ \qquad + a_{11}p_{23} + a_{12}p_{31} + a_{13}p_{12}; & [3] \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} u_0' = -a_{00}u_0 - a_{01}u_1 - a_{02}u_2 - u_{03}u_3, \\ u_1' = \quad . \quad a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3, \\ u_2' = \quad . \quad a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3, \\ u_3' = \quad . \quad a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3. \end{cases}$$

Diese Gleichungen also stellen die allgemeine Umlegung im Raume dar, sobald man die Coefficienten $a_{i\varkappa}$, $b_{i\varkappa}$ nach den Vorschriften des § 4 *durch die Parameter (α, β) ausdrückt;* jedem System dieser Parameter, das den Bedingungen $N(\alpha, \beta) \neq 0$, $L(\alpha, \beta) = 0$ genügt, entspricht eine Umlegung des Raumes, und umgekehrt.

Da die Umlegungen mit den Bewegungen zusammen wieder eine Gruppe bilden, so erhebt sich die Frage, ob man nicht auch die Transformationen dieser erweiterten Gruppe noch mit Hülfe der Parameter (α, β) in einfacher Weise zusammensetzen kann. Dies ist in der That der Fall: Auch für die umfassendere Gruppe findet noch *bilineare Zusammensetzung* der Parameter (α, β) statt. Es bestehen nämlich die folgenden leicht zu beweisenden Sätze, deren erster im Grunde nur eine wenig erweiterte Fassung des in § 2 bewiesenen Hauptsatzes ist:

Ist $S(\alpha, \beta)$ eine Bewegung und $S'(\alpha' \beta')$ eine Bewegung oder eine Umlegung im Raume, so werden die Parameter (α'', β'') der zusammengesetzten Transformation $S'' = SS'$, die im ersten Fall eine Bewegung und im zweiten eine Umlegung ist, beidemal geliefert durch die Formeln (8), § 2 (S. 522 und 523).

Ist dagegen $S(\alpha, \beta)$ eine Umlegung, und $S'(\alpha', \beta')$ eine Bewegung oder eine Umlegung, so sind die Parameter (α'', β'') der zusammen-

gesetzten Transformation $S'' = SS'$ — *die eine Umlegung, bez. eine Bewegung ist — den Formeln zu entnehmen:*

$$
(4)\quad \begin{cases}
\alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\
\alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2' \quad \text{u. s. f. } [3] \\
\beta_0'' = -\alpha_0\beta_0' + \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\beta_3' \\
\qquad + \beta_0\alpha_0' - \beta_1\alpha_1' - \beta_2\alpha_2' - \beta_3\alpha_3', \\
\beta_1'' = -\alpha_0\beta_1' - \alpha_1\beta_0' - \alpha_2\beta_3' + \alpha_3\beta_2' \\
\qquad + \beta_0\alpha_1' + \beta_1\alpha_0' + \beta_2\alpha_3' - \beta_3\alpha_2' \quad \text{u. s. f. } [3]
\end{cases}
$$

Die Formeln (4) unterscheiden sich von den Formeln (8) des § 8 einfach dadurch, dass auf den rechten Seiten statt der Grössen β_i' die Grössen $-\beta_i'$ gesetzt sind. Ein besonders wichtiger Specialfall des letzten Satzes ist der folgende:

Die Entgegengesetzte einer Umlegung mit den Parametern

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

hat die Parameter

$$\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3 : -\beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3$$

Wir setzen hier, wie auch sonst überall voraus, dass die Parameter der Bedingung $L(\alpha, \beta) = 0$ gemäss gewählt sind.

Durch die Parameter (α, β) lassen sich die mit einer Umlegung verknüpften geometrischen Gebilde verhältnissmässig einfach analytisch darstellen, entsprechend dem, was wir in der Theorie der Bewegungen gesehen haben.

Die Mittelebene einer Umlegung $S(\alpha, \beta)$ *hat die Coordinaten*

$$(5)\quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = \beta_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Der Mittelpunkt einer Umlegung $S(\alpha, \beta)$ *hat die Coordinaten:*

$$(6)\quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3.$$

Die Drehungsaxe einer Umlegung $S(\alpha, \beta)$ *hat die Coordinaten:*

$$(7)\quad \begin{aligned} &p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} \\ &= \alpha_0\alpha_1 : \alpha_0\alpha_2 : \alpha_0\alpha_3 : -(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) : -(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) : -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \end{aligned}$$

Die in der Theorie der Umlegungen hervortretenden besonderen Fälle sind gekennzeichnet, wie folgt:

Bei den Umlegungen mit unendlich fernem Mittelpunkt verschwindet der Parameter α_0.

Bei den Spiegelungen an den Ebenen des Raumes verschwinden die Parameter

$$\alpha_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3.$$

Bei den Spiegelungen an den Punkten des Raumes verschwinden die Parameter

$$\beta_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3.$$

Wir haben demnach, analytisch wie geometrisch, bei der Classification der Umlegungen die folgenden Hauptfälle zu unterscheiden:

I. *Den allgemeinen Fall:* $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$.

Es bleibt nur ein im Endlichen gelegener Punkt in Ruhe, der Mittelpunkt der Umlegung, und ebenso ein unendlich ferner Punkt, mit den Coordinaten

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Ferner bleibt ausser der unendlich fernen Ebene nur noch eine Ebene in Ruhe, die Mittelebene.

Die Umlegung kann erzeugt werden durch eine Spiegelung an der Mittelebene (5), und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um die Axe (7). (S. I, § 10, S. 487.)

Die Spiegelung hat die Parameter:

$$0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : 0 : 0 : 0, \tag{8a}$$

die Drehung hat die Parameter:

$$\begin{aligned} &-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_0\alpha_2 : \alpha_0\alpha_3 \\ &: 0 : -(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) : -(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) : -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1); \end{aligned} \tag{8b}$$

der zugehörige Winkel $2\vartheta'$ ist also gegeben durch die Gleichung

$$\operatorname{ctg} \vartheta' = -\frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{\alpha_0}. \tag{8c}$$

Die Umlegung kann ferner erzeugt werden durch eine Spiegelung an dem Mittelpunkt,

$$x_0' = -\alpha_0 x_0, \quad x_i' = -2\beta_i x_0 + \alpha_0 x_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

d. i. durch eine Umlegung mit den Parametern

$$\alpha_0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 \tag{9a}$$

und durch eine vorhergehende oder nachfolgende Drehung um die Axe (7), mit den Parametern

$$\begin{aligned} &\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_0\alpha_2 : \alpha_0\alpha_3 \\ &: 0 : -(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) : -(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) : -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \end{aligned} \tag{9b}$$

und mit dem Drehungswinkel 2ϑ, wenn

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}. \tag{9c}$$

(Vgl. Formel (8c), sowie Formel (9) in § 7, S. 541.)

In der That, führt man nach der auf S. 552 gegebenen Anweisung die Transformationen (8a) und (8b), oder die Transformationen (9a) und (9b) hinter einander aus, so kommt man auf die Formeln (1) zurück, nachdem man von den Parametern der zusammengesetzten

Transformation im ersten Fall den Factor $-(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)$, im zweiten den Factor α_0^2 abgeschieden hat. —

II. *Umlegungen mit unendlich fernem Mittelpunkt.*

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0,\quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\neq 0.$$

In Ruhe bleibt jetzt, wie früher, der zur Mittelebene senkrechte unendlich ferne Punkt $0:\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$, ausserdem aber noch jeder unendlich ferne Punkt der Mittelebene selbst, also jeder Punkt der Geraden

$$0:0:0:\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3.$$

In Ruhe bleibt ferner, ausser der Mittelebene, jede Ebene eines Büschels von parallelen und zur Mittelebene senkrechten Ebenen, nämlich jede Ebene der Geraden

$$0:0:0:\beta_1:\beta_2:\beta_3.$$

III. *Spiegelungen an den Ebenen des Raumes.*

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\neq 0,\quad \beta_1=\beta_2=\beta_3=0.$$

Der Mittelpunkt ist ein unbestimmter Punkt x der Mittelebene

$$\beta_0x_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0.$$

Von Ebenen bleiben in Ruhe ausser der Mittelebene (Spiegelungsebene) alle zu ihr senkrechten Ebenen, d. h. alle Ebenen, deren Coordinaten der Gleichung genügen:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0.$$

IV. *Spiegelungen an den Punkten des Raumes.*

$$\alpha_0\neq 0,\quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,\quad \beta_0=0.$$

Die Mittelebene ist eine unbestimmte Ebene u des Mittelpunktes

$$\alpha_0u_0+\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3=0.$$

Von Punkten bleiben in Ruhe ausser dem Mittelpunkt alle Punkte der unendlich fernen Ebene. —

Besonders hervorgehoben werden mögen noch die in den Formeln (7a) und (9a) liegenden Sätze*):

---

*) Dass es nützlich ist, Biquaternionen von der besonderen Gestalt

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\beta_0\varepsilon_0$$

zu den Ebenen, und Biquaternionen von der Form

$$\alpha_0e_0+\beta_1\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2+\beta_3\varepsilon_3$$

zu den Punkten in Beziehung zu setzen, hat bereits Buchheim bemerkt. Er ist zu seinen Festsetzungen nicht durch die Betrachtung der Spiegelungen, sondern durch Zweckmässigkeitsrücksichten anderer Art veranlasst worden. (Am. J. v. VII, a. a. O. Nr. 8). Die Beziehung der Biquaternionen von der besonderen Gestalt

Die Spiegelung an einer gegebenen Ebene $v_0 : v_1 : v_2 : v_3$ *hat die Parameter*

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 0 : v_1 : v_2 : v_3 : v_0 : 0 : 0 : 0.$$

Die Spiegelung an einem gegebenen Punkt $y_0 : y_1 : y_2 : y_3$ *hat die Parameter*

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \beta_0 : \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = y_0 : 0 : 0 : 0 : 0 : y_1 : y_2 : y_3.$$

§ 10.

Die Bewegungen im Strahlenbündel.

Setzt man die Parameter β_i sämmtlich gleich Null, so geht aus unseren Formeln die analytische Darstellung *der* Bewegungen und Umlegungen hervor, die den Anfangspunkt o der Coordinaten in Ruhe lassen.

Wir betrachten nun, wie in § 12 des ersten Abschnittes, die Strahlen g und die zu ihnen senkrechten Ebenen γ des Punktes o als Raumelemente. Ertheilen wir einer den Anfangspunkt enthaltenden Geraden die Coordinaten:

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = g_1 : g_2 : g_3 : 0 : 0 : 0,$$

und einer durch den Anfangspunkt gehenden Ebene die Coordinaten,

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = 0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3,$$

so wird die dualistische Transformation $\mathfrak{P}$ des absoluten Polarsystems dargestellt durch die Gleichungen:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3. \tag{1}$$

Statt der Bewegungen und Umlegungen erhalten wir jetzt eine continuirliche Gruppe

$$\begin{cases} g_i' = a_{i1} g_1 + a_{i2} g_2 + a_{i3} g_3, \\ \gamma_i' = a_{i1} \gamma_1 + a_{i2} \gamma_2 + a_{i3} \gamma_3, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

worin die Ausdrücke der Coefficienten $a_{i\varkappa}$ wieder den Formeln (4) § 4 zu entnehmen sind. (S. S. 528.)

Die Formeln für die Zusammensetzung der Parameter werden nach wie vor geliefert durch das Multiplicationstheorem der Quaternionen, dessen Gleichungen wir jetzt etwas anders anordnen wollen:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 + \beta_3 \varepsilon_3$$

zu den linearen Complexen findet sich schon bei Clifford. Sie ist natürlich nur der Ausdruck einer Thatsache, die in anderer Form längst bekannt gewesen ist. (Vgl. die Anm. auf S. 520, 521.)

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\ \alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2', \\ \alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' - \alpha_1\alpha_3' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1', \\ \alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' + \alpha_3\alpha_0'. \end{cases}$$

Wir können nun ohne Weiteres die Ausdrücke der in § 12 des ersten Abschnittes eingeführten Transformationen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T, T' hinschreiben. Es wird:

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_1^{-1} : g = \Phi(\alpha, \bar{g}), & \mathfrak{T}_2 : g' = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{g}), \\ \mathfrak{T}_2^{-1} : \gamma = \Phi(\alpha, \bar{\gamma}), & \mathfrak{T}_1 : \gamma' = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}), \\ T^{-1} : g = \Phi(\alpha, \bar{\gamma}), & T : g' = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}), \\ T'^{-1} : \gamma = \Phi(\alpha, \bar{g}), & T' : \gamma' = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{g}), \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung beispielsweise die Gleichung $g = \Phi(\alpha, \bar{g})$ schreibt für das Formelsystem

$$(4\text{b})\quad \begin{cases} g_1 = \alpha_0\bar{g}_1 - \alpha_3\bar{g}_2 + \alpha_2\bar{g}_3, \\ g_2 = \alpha_3\bar{g}_1 + \alpha_0\bar{g}_2 - \alpha_1\bar{g}_3, \\ g_3 = -\alpha_2\bar{g}_1 + \alpha_1\bar{g}_2 + \alpha_0\bar{g}_3, \end{cases}$$

und die Gleichung $g' = \Phi(\bar{\alpha}, \bar{g})$ für das Formelsystem

$$(4\text{c})\quad \begin{cases} g_1' = \alpha_0\bar{g}_1 + \alpha_3\bar{g}_2 - \alpha_2\bar{g}_3, \\ g_2' = -\alpha_3\bar{g}_1 + \alpha_0\bar{g}_2 + \alpha_1\bar{g}_3, \\ g_3' = \alpha_2\bar{g}_1 - \alpha_1\bar{g}_2 + \alpha_0\bar{g}_3. \end{cases}$$ *)

Um etwa von den Formeln (4b) und (4c) zu den Formeln (2) zurückzugelangen, hat man das Gleichungssystem (4b) nach den Grössen $\bar{g}_i$ aufzulösen und die gefundenen Werthe in die Gleichungen (4c) einzuführen. Man erhält dann statt der Gleichungen (2) die folgenden:

$$\alpha_0 \cdot a_{00} \cdot g_i' = \alpha_0(a_{i1}g_1 + a_{i2}g_2 + a_{i3}g_3).$$

Man sieht daraus, dass die Formeln (4) für den Fall $\alpha_0 = 0$ unbrauchbar werden, ohne dass doch darum die Formeln (2) selbst zu gelten aufhörten. **)

In dem hier besprochenen Falle lässt sich am leichtesten das Programm verwirklichen, zu dessen Vorbereitung diese ganze Untersuchung unternommen worden ist: der Ausbau einer der gewöhnlichen Invariantentheorie analogen Invariantentheorie der Bewegungen. Der

*) Der Urheber dieser Formeln ist, wie bereits gesagt, Rodrigues. Später haben Hermite und Cayley die Betrachtung auf quadratische Formen ausgedehnt, die nicht als Summen von Quadraten dargestellt sind.

**) Vgl. Bachmann, Crelle's J. Bd. 76 und Hermite ebenda Bd. 78.

Verfasser hat schon im Jahre 1886 auf Grund von Formeln, die von denen Eulers nicht wesentlich verschieden sind, eine vollständige Invariantentheorie der Gruppe eines Kegelschnittes in der Ebene entwickelt, die sich durch grosse Einfachheit der Formeln auszeichnet und die als ein Mittelglied zwischen der Theorie der binären und der Theorie der ternären Formen angesehen werden kann. Er hofft, diese Untersuchungen nun bald herausgeben zu können, um dann die Betrachtung auf die verwickelteren Verhältnisse der Euclidischen Ebene und des Nicht-Euclidischen und Euclidischen Raumes auszudehnen.

Es ist leicht, einen Grenzübergang zu ersinnen, durch den man von den soeben entwickelten Formeln aus zu ähnlichen Ausdrücken für die Bewegungen und Umlegungen in der Ebene gelangen kann.

Wir setzen zunächst

$$
\text{(5)} \qquad \begin{cases} g_1 = x_1, & g_2 = \lambda x_2, \quad g_3 = \lambda x_3, \\ \gamma_1 = \lambda u_1, & \gamma_2 = u_2, \quad \gamma_3 = u_3. \end{cases}
$$

Gehen wir dann zur Grenze $\lambda = 0$ über, und deuten wir die Verhältnisse

$$
y = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{und} \quad z = \frac{x_3}{x_1}
$$

als rechtwinklige Cartesische Coordinaten in der Ebene, so geht aus dem absoluten Kegel des Punktes o:

$$
g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 0
$$

das Paar der sogenannten unendlich fernen Kreispunkte

$$
x_1 = 0, \quad u_2^2 + u_3^2 = 0
$$

hervor. Zugleich gehen die Bewegungen des Strahlenbündels über in die Bewegungen und Umlegungen der Ebene; und zwar erhält man die *Bewegungen*, wenn man zugleich mit den Substitutionen (5) neue Parameter einführt durch die Formeln

$$
\text{(6)} \qquad \alpha_0 = \alpha_0^*, \quad \alpha_1 = \alpha_1^*, \quad \alpha_2 = \lambda \alpha_2^*, \quad \alpha_3 = \lambda \alpha_3^*,
$$

und die *Umlegungen*, wenn man sich statt der Substitutionen (6) der Substitutionen

$$
\text{(7)} \qquad \alpha_0 = \lambda \alpha_0^*, \quad \alpha_1 = \lambda \alpha_1^*, \quad \alpha_2 = \alpha_2^*, \quad \alpha_3 = \alpha_3^*
$$

bedient.

Auf diese Weise sind die im nächsten Paragraphen zusammengestellten Formeln gewonnen worden. Sie bestätigen, wie man sehen wird, in allen Stücken die in § 13 des ersten Abschnittes aus geometrischen Betrachtungen hergeleiteten Resultate.

§ 11.

Die Bewegungen und Umlegungen in der Ebene.

*Ebenso wie den Bewegungen im Strahlenbündel, so kann man auch den Bewegungen in der Ebene im Wesentlichen nur auf eine Art vier homogene Parameter so zuordnen, dass für diese Parameter bilineare Zusammensetzung besteht.**)

Durch diese Darstellung der Bewegungen ist — bis auf lineare Transformationen der Parameter — gleichzeitig eine Parameterdarstellung der Umlegungen bestimmt, so dass für die Bewegungen und die Umlegungen zusammen ebenfalls noch bilineare Zusammensetzung stattfindet.

Die Formeln für die *Bewegungen* lauten, in rechtwinkligen Parallelcoordinaten y, z:

$$(1\text{a})\quad \begin{cases}(\alpha_0^2+\alpha_1^2)\,y' = (\alpha_0^2-\alpha_1^2)\,y + 2\alpha_0\alpha_1\cdot z + 2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3),\\ (\alpha_0^2+\alpha_1^2)\,z' = -\,2\alpha_0\alpha_1\cdot y + (\alpha_0^2-\alpha_1^2)z + 2(\alpha_3\alpha_1+\alpha_0\alpha_2),\end{cases}$$

oder in homogenen Punktcoordinaten $\frac{x_2}{x_1}=y,\ \frac{x_3}{x_1}=z$:

$$(1)\quad \begin{cases}x_1' = (\alpha_0^2+\alpha_1^2)\,x_1 \quad\cdot\quad\cdot\quad,\\ x_2' = 2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3)\,x_1 + (\alpha_0^2-\alpha_1^2)\,x_2 + 2\alpha_0\alpha_1\cdot x_3\ ,\\ x_3' = 2(\alpha_3\alpha_1+\alpha_0\alpha_2)\,x_1 - 2\alpha_0\alpha_1\cdot x_2 + (\alpha_0^2-\alpha_1^2)\,x_3,\end{cases}$$

oder endlich in den zugehörigen Liniencoordinaten:

$$(2)\quad \begin{cases}u_1' = (\alpha_0^2+\alpha_1^2)\,u_1 + 2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_0\alpha_3)\,u_2 + 2(\alpha_3\alpha_1-\alpha_0\alpha_2)\,u_3,\\ u_2' = \quad\cdot\quad + (\alpha_0^2-\alpha_1^2)\,u_2 + 2\alpha_0\alpha_1\cdot u_3\ ,\\ u_3' = \quad\cdot\quad - 2\alpha_0\alpha_1\cdot u_2 + (\alpha_0^2-\alpha_1^2)\,u_3\ .\end{cases}$$

Die entsprechenden Formeln für die *Umlegungen* aber sind diese:

$$(3\text{a})\quad \begin{cases}-(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,y' = (\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,y + 2\alpha_2\alpha_3\cdot z + 2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3),\\ -(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,z' = 2\alpha_2\alpha_3\cdot y - (\alpha_2^2-\alpha_3^2)z + 2(\alpha_3\alpha_1+\alpha_0\alpha_2),\end{cases}$$

oder

$$(3)\quad \begin{cases}x_1' = -(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,x_1 \quad\cdot\quad\cdot\quad,\\ x_2' = 2(\alpha_1\alpha_2-\alpha_0\alpha_3)\,x_1 + (\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,x_2 + 2\alpha_2\alpha_3\cdot x_3\ ,\\ x_3' = 2(\alpha_3\alpha_1+\alpha_0\alpha_2)\,x_1 + 2\alpha_2\alpha_3\cdot x_2 - (\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,x_3,\end{cases}$$

oder endlich

$$(4)\quad \begin{cases}u_1' = -(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\,u_1 + 2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_0\alpha_3)\,u_2 + 2(\alpha_3\alpha_1-\alpha_0\alpha_2)\,u_3,\\ u_2' = \quad\cdot\quad + (\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,u_2 + 2\alpha_2\alpha_3\cdot u_3\ ,\\ u_3' = \quad\cdot\quad + 2\alpha_2\alpha_3\cdot u_2 - (\alpha_2^2-\alpha_3^2)\,u_3\ .\end{cases}$$

---

*) Wiener Monatsh. a. a. O., § 15 und § 16.

Das Product $S'' = SS'$ von zwei Transformationen $S(\alpha)$ und $S'(\alpha')$ unserer Gruppe ist

Wenn S und S' Bewegungen sind, eine Bewegung mit den Parametern:

$$
(5)\quad \begin{cases}
\alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' \quad \cdot \quad \cdot\,, \\
\alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' \quad \cdot \quad \cdot\,, \\
\alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' - \alpha_1\alpha_3' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1', \\
\alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' + \alpha_3\alpha_0'.
\end{cases}
$$

Wenn S und S' Umlegungen sind, eine Bewegung mit den Parametern:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\alpha_0'' = \quad \cdot \quad \cdot \quad - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\
\alpha_1'' = \quad \cdot \quad \cdot \quad + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2', \\
\alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' - \alpha_1\alpha_3' + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1', \\
\alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1' + \alpha_3\alpha_0'.
\end{cases}
$$

Wenn S eine Bewegung und S' eine Umlegung ist, eine Umlegung mit den Parametern:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\
\alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1' + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2', \\
\alpha_2'' = \alpha_0\alpha_2' - \alpha_1\alpha_3' \quad \cdot \quad \cdot\,, \\
\alpha_3'' = \alpha_0\alpha_3' + \alpha_1\alpha_2' \quad \cdot \quad \cdot\,.
\end{cases}
$$

Wenn S eine Umlegung und S' eine Bewegung ist, eine Umlegung mit den Parametern:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\alpha_0'' = \alpha_0\alpha_0' - \alpha_1\alpha_1' - \alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3', \\
\alpha_1'' = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_0' + \alpha_2\alpha_3' - \alpha_3\alpha_2', \\
\alpha_2'' = \quad \cdot \quad \cdot \quad + \alpha_2\alpha_0' + \alpha_3\alpha_1', \\
\alpha_3'' = \quad \cdot \quad \cdot \quad - \alpha_2\alpha_1' + \alpha_3\alpha_0'.
\end{cases}
$$

Die Formeln (5) bilden das Multiplicationstheorem eines Systems complexer Zahlen, einer Ausartung der Quaternionen

(9)

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	0	0
e_3	e_3	e_2	0	0

Bedient man sich statt dieses Systems (9) der Quaternionen selbst,

so kann man die Formeln (1)...(4) und die Formeln (5)...(8) mit Hülfe eines weiteren Symbols ε sehr einfach zusammenfassen. Sind α_i die Parameter einer Bewegung, so setzen wir zur Abkürzung

$$(10a) \qquad \alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \varepsilon\alpha_2 e_2 + \varepsilon\alpha_3 e_3,$$

sind aber α_i die Parameter einer Umlegung, so schreiben wir entsprechend

$$(10b) \qquad \alpha = \varepsilon\alpha_0 e_0 + \varepsilon\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

Ausserdem setzen wir

$$(11) \qquad \begin{cases} x = x_1 e_1 + \varepsilon x_2 e_2 + \varepsilon x_3 e_3, \\ u = \varepsilon u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3. \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, dass ε^2 gleich Null ist, und dass die Grösse ε mit den Quaternioneneinheiten vertauschbar ist, so können wir die Formeln (1)...(4) in zwei Formeln

$$(12) \qquad x' = \bar{\alpha} x \alpha, \quad u' = \bar{\alpha} u \alpha$$

und die Formeln (5)...(8) in die einzige

$$(13) \qquad \alpha'' = \alpha\alpha'$$

zusammenziehen. Wir haben dadurch das Bildungsgesetz dieser Formeln auf seinen einfachsten Ausdruck gebracht.

Man ermittelt leicht die geometrische Bedeutung, die den Formeln (5)...(8) zukommt, falls man die Grössen α_i als homogene Coordinaten im dreifach ausgedehnten Raume deutet. (Vgl. Wiener Monatsh. a. a. O. § 16.) Auch die Beziehung der Formeln (1) und (3) zu den geometrischen Bestimmungsstücken einer Bewegung oder Umlegung kann natürlich ohne Weiteres angegeben werden.

Im Fall einer *Bewegung* $S(\alpha)$ sind

$$(14) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

die Coordinaten des Drehungsmittelpunktes; der Drehungswinkel 2ϑ ist gegeben durch die Gleichung

$$(15) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \mp\frac{\alpha_1}{\alpha_0},$$

so dass die Bewegung (1) zusammenfällt mit der Drehung

$$(16) \qquad \begin{cases} \left(y' - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \left(y - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\cos 2\vartheta \mp \left(z - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\sin 2\vartheta, \\ \left(z' - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) = \pm\left(y - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\sin 2\vartheta + \left(z - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\cos 2\vartheta. \end{cases}$$

Das Auftreten der doppelten Vorzeichen in den Formeln (15) und (16) rührt daher, dass wir noch keine Verfügung darüber getroffen

haben, in welchem Sinne wir die Winkel in der Ebene (y, z) messen wollen. Entscheiden wir uns dahin, als positiven Drehungssinn den von der positiven y-Axe nach der positiven z-Axe hin anzusehen, so gelten nur noch die oberen Vorzeichen, im anderen Falle nur die unteren.

Die Bewegung ist nach dem Gesagten eine Umwendung, wenn α_0 verschwindet, und sie ist eine Schiebung, wenn α_1 verschwindet.

Ist $S(\alpha)$ eine *Umlegung*, so werden

$$(17) \qquad u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

die Liniencoordinaten der *Mittelgeraden;* die halbe Schiebungsgrösse η hat die Componenten

$$\frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \qquad - \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

und also die Länge

$$(18) \qquad \eta = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}.$$

Die Umlegung ist demnach eine Spiegelung, wenn α_0 verschwindet.

Der Ausdruck $\alpha_0^2 + \alpha_1^2$ $(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)$ spielt die Rolle der *Discriminante* bei den Bewegungen (Umlegungen); er darf immer als von Null verschieden angenommen werden. Bezeichnet man ihn mit N, so hat man für die Zusammensetzung der Bewegungen wie der Umlegungen die Formel

$$(19) \qquad N(\alpha)\, N(\alpha') = N(\alpha''),$$

ganz wie in der Quaternionentheorie. (Vgl. Nr. (10), § 2.) Ebenso kann auch der folgende Satz ohne Weiteres herübergenommen werden:

Die Entgegengesetzte einer Bewegung oder Umlegung mit den Parametern

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

hat die Parameter

$$\alpha_0 : -\alpha_1 : -\alpha_2 : -\alpha_3.$$

Ist $S(\alpha)$ eine nicht-involutorische *Bewegung*, so hängen die Endpunkte einer Sehne xx' von deren Mitte $\bar{x}$ in dieser Weise ab:

$$(20) \qquad \mathfrak{T}_1^{-1} : \begin{cases} x_1 = \alpha_0 \bar{x}_1 & \cdot \qquad \cdot \;, \\ x_2 = \alpha_3 \bar{x}_1 + \alpha_0 \bar{x}_2 - \alpha_1 \bar{x}_3, \\ x_3 = -\alpha_2 \bar{x}_1 + \alpha_1 \bar{x}_2 + \alpha_0 \bar{x}_3; \end{cases}$$

$$(20\text{b}) \qquad \mathfrak{T}_2 : \begin{cases} x_1' = \alpha_0 \bar{x}_1 & \cdot \qquad \cdot \;, \\ x_2' = -\alpha_3 \bar{x}_1 + \alpha_0 \bar{x}_2 + \alpha_1 \bar{x}_3, \\ x_3' = \alpha_2 \bar{x}_1 - \alpha_1 \bar{x}_2 + \alpha_0 \bar{x}_3; \end{cases}$$

ähnlich ist der Zusammenhang irgend eines Paares entsprechender Geraden u, u' mit ihrer Winkelhalbirenden $\bar{u}$ erster Art:

$$\text{21)} \qquad \mathfrak{T}_2^{-1}: \begin{cases} u_1 = \alpha_0 \bar{u}_1 - \alpha_3 \bar{u}_2 + \alpha_2 \bar{u}_3, \\ u_2 = \quad \cdot \quad + \alpha_0 \bar{u}_2 - \alpha_1 \bar{u}_3, \\ u_3 = \quad \cdot \quad + \alpha_1 \bar{u}_2 + \alpha_0 \bar{u}_3; \end{cases}$$

$$\text{(21 b)} \qquad \mathfrak{T}_1: \begin{cases} u_1' = \alpha_0 \bar{u}_1 + \alpha_3 \bar{u}_2 - \alpha_2 \bar{u}_3, \\ u_2' = \quad \cdot \quad + \alpha_0 \bar{u}_2 + \alpha_1 \bar{u}_3, \\ u_3' = \quad \cdot \quad - \alpha_1 \bar{u}_2 + \alpha_0 \bar{u}_3. \end{cases}$$

Wenn dagegen $S(\alpha)$ eine nicht-involutorische *Umlegung* ist, so kann man die Endpunkte der Sehne xx' in einfacher Weise durch deren Normale $\bar{u}$ darstellen

$$\text{(22)} \qquad T^{-1}: \begin{cases} x_1 = \quad \cdot \quad - \alpha_3 \bar{u}_2 + \alpha_2 \bar{u}_3, \\ x_2 = \alpha_3 \bar{u}_1 + \alpha_0 \bar{u}_2 - \alpha_1 \bar{u}_3, \\ x_3 = -\alpha_2 \bar{u}_1 + \alpha_1 \bar{u}_2 + \alpha_0 \bar{u}_3; \end{cases}$$

$$\text{(22 b)} \qquad T: \begin{cases} x_1' = \quad \cdot \quad + \alpha_3 \bar{u}_2 - \alpha_2 \bar{u}_3, \\ x_2' = -\alpha_3 \bar{u}_1 + \alpha_0 \bar{u}_2 + \alpha_1 \bar{u}_3, \\ x_3' = \alpha_2 \bar{u}_1 - \alpha_1 \bar{u}_2 + \alpha_0 \bar{u}_3. - \end{cases}$$

Wir haben die Parameterdarstellung der Bewegungen und Umlegungen in der Ebene durch einen Grenzübergang aus den Formeln für die Bewegungen im Strahlenbündel hergeleitet, um sie sogleich in einer zweckmässigen Gestalt zu erhalten. Nachträglich mögen wir bemerken, dass dieser Grenzübergang auch entbehrt werden kann. Können doch die Bewegungen ebensowohl wie die Umlegungen in der Ebene nach Belieben als Bewegungen oder Umlegungen eines dreifach ausgedehnten Raumes angesehen werden, der die Ebene enthält.

Gehen wir etwa von den *Bewegungen* des Raumes aus, so brauchen wir nur die Voraussetzung

$$\text{(23 a)} \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_0 = \beta_1 = 0$$

in die Formeln des § 4 einzuführen, um die Bewegungen der Ebene $x_1 = 0$ zu erhalten; ebenso entstehen die Umlegungen dieser Ebene, wenn wir die Annahme

$$\text{(23 b)} \qquad \alpha_0 = \alpha_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

machen. Von den Formeln, die so aus den Formeln (1) des § 4 hervorgehen, lassen wir die Gleichung weg, die den Ausdruck von x_1' durch x_1 angibt, und schreiben sodann an Stelle von x_0 wieder x_1. Führen wir schliesslich noch neue Parameter ein, und zwar bei der Annahme (23a) durch die Substitutionen:

$$\text{(24 a)} \qquad \alpha_0 = \alpha_0^*, \quad \alpha_1 = \alpha_1^*, \quad \beta_2 = \alpha_3^*, \quad \beta_3 = -\alpha_2^*$$

und bei der Annahme (23b) durch die Substitutionen

(24b) $$\beta_0 = \alpha_0^*, \quad \beta_1 = \alpha_1^*, \quad \alpha_2 = \alpha_3^*, \quad \alpha_3 = -\alpha_2^*,$$

so gelangen wir thatsächlich von Neuem zu den soeben aufgestellten Formeln.

Es verdient schon an dieser Stelle bemerkt zu werden, dass man die (entwickelte) Gestalt der Formeln (1)...(8) noch vereinfachen kann, freilich nur mit Hülfe einer imaginären Transformation.*)

Es gibt nämlich in der Ebene ein natürliches System von Parallelcoordinaten, bestehend aus den beiden Büscheln von geraden Linien, die durch die sogenannten unendlich fernen Kreispunkte hindurchlaufen. Sie werden eingeführt durch die imaginäre Transformation

$$y + iz = x, \quad y - iz = \bar{x},$$

oder, wenn wir, um homogen zu machen,

$$x = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \bar{x} = \frac{\xi_3}{\xi_1}$$

setzen, durch die Transformation

(25) $$\begin{cases} x_1 = \xi_1, & 2x_2 = \xi_2 + \xi_3, \quad 2ix_3 = \xi_2 - \xi_3, \\ u_1 = \omega_1, & u_2 = \omega_2 + \omega_3, \quad u_3 = (\omega_2 - \omega_3)\, i. \end{cases}$$

Gestalten wir z. B. die Formeln (1a) demgemäss um, so bieten sich von selbst neue Parameter dar, die wir so bezeichnen wollen:

(26) $$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \alpha_0 + i\alpha_1, & \gamma_{12} &= -\alpha_3 - i\alpha_2, \\ \gamma_{21} &= \alpha_3 - i\alpha_2, & \gamma_{22} &= \alpha_0 - i\alpha_1. \end{aligned}$$

Wir geben nun, mit denselben Nummern bezeichnet, die Formeln an, die durch diese Substitutionen aus unseren Formeln (1)...(8) hervorgehen.

(1a)* $$\begin{cases} \gamma_{11} \cdot x' = \gamma_{22} \cdot x - 2\gamma_{21}, \\ \gamma_{22} \cdot \bar{x}' = \gamma_{11} \cdot \bar{x} + 2\gamma_{12}. \end{cases}$$

(1)* $$\begin{cases} \xi_1' = \gamma_{11}\gamma_{22} \cdot \xi_1, \\ \xi_2' = \gamma_{22}(-2\gamma_{21} \cdot \xi_1 + \gamma_{22} \cdot \xi_2), \\ \xi_3' = \gamma_{11}(\;\;2\gamma_{12} \cdot \xi_1 + \gamma_{11} \cdot \xi_3). \end{cases}$$

(2)* $$\begin{cases} \omega_1' = \gamma_{11}\gamma_{22} \cdot \omega_1 + 2\gamma_{11}\gamma_{21} \cdot \omega_2 - 2\gamma_{12}\gamma_{22} \cdot \omega_3, \\ \omega_2' = \gamma_{11}^2 \cdot \omega_2, \qquad \omega_3' = \gamma_{22}^2 \cdot \omega_3. \end{cases}$$

---

*) Auch bei den Formeln des § 10 ist eine entsprechende Vereinfachung möglich; dort aber geschieht sie durch eine nichtlineare Transformation.

$$(3\text{a})^* \quad \begin{cases} \gamma_{12} x' = -\gamma_{21}\bar{x} - 2\gamma_{22}, \\ \gamma_{21}\bar{x}' = -\gamma_{12} x + 2\gamma_{11}. \end{cases}$$

$$(3)^* \quad \begin{cases} \xi_1' = \gamma_{12}\gamma_{21} \cdot \xi_1, \\ \xi_2' = -\gamma_{21}(2\gamma_{22} \cdot \xi_1 + \gamma_{21} \cdot \xi_3), \\ \xi_3' = \quad \gamma_{12}(2\gamma_{11} \cdot \xi_1 - \gamma_{12} \cdot \xi_2). \end{cases}$$

$$(4)^* \quad \begin{cases} \omega_1' = -\gamma_{12}\gamma_{21} \cdot \omega_1 - 2\gamma_{11}\gamma_{21} \cdot \omega_2 + 2\gamma_{12}\gamma_{22} \cdot \omega_3, \\ \omega_2' = \gamma_{12}^2 \cdot \omega_3, \qquad \omega_3' = \gamma_{21}^2 \cdot \omega_2. \end{cases}$$

$$(5)^* \quad \begin{cases} \gamma_{11}'' = \gamma_{11}\gamma_{11}' \quad \cdot \quad , & \gamma_{12}'' = \gamma_{12}\gamma_{11}' + \gamma_{22}\gamma_{12}', \\ \gamma_{21}'' = \gamma_{11}\gamma_{21}' + \gamma_{21}\gamma_{22}', & \gamma_{22}'' = \quad \cdot \quad + \gamma_{22}\gamma_{22}', \end{cases}$$

$$(6)^* \quad \begin{cases} \gamma_{11}'' = \quad \cdot \quad + \gamma_{21}\gamma_{12}', & \gamma_{12}'' = \gamma_{12}\gamma_{11}' + \gamma_{22}\gamma_{12}', \\ \gamma_{21}'' = \gamma_{11}\gamma_{21}' + \gamma_{21}\gamma_{22}', & \gamma_{22}'' = \gamma_{12}\gamma_{21}' \quad \cdot \quad , \end{cases}$$

$$(7)^* \quad \begin{cases} \gamma_{11}'' = \gamma_{11}\gamma_{11}' + \gamma_{21}\gamma_{12}', & \gamma_{12}'' = \quad \cdot \quad + \gamma_{22}\gamma_{12}', \\ \gamma_{21}'' = \gamma_{11}\gamma_{21}' \quad \cdot \quad , & \gamma_{22}'' = \gamma_{12}\gamma_{21}' + \gamma_{22}\gamma_{22}', \end{cases}$$

$$(8)^* \quad \begin{cases} \gamma_{11}'' = \gamma_{11}\gamma_{11}' + \gamma_{21}\gamma_{12}', & \gamma_{12}'' = \gamma_{12}\gamma_{11}' \quad \cdot \quad , \\ \gamma_{21}'' = \quad \cdot \quad + \gamma_{21}\gamma_{22}', & \gamma_{22}'' = \gamma_{12}\gamma_{21}' + \gamma_{22}\gamma_{22}'. \end{cases}$$

Diese Formeln, von denen wir bei künftiger Gelegenheit noch einmal zu reden haben werden, zeigen deutlich das Verhalten der beiden bei den Bewegungen invarianten Curvenschaaren, sowie das für die Invariantentheorie unserer Gruppe wichtige Zerfallen der ausgearteten Bewegungen und Umlegungen in je zwei getrennte Schaaren. Eben hierdurch ist es ermöglicht, dass die Coefficienten $\gamma_{i\varkappa}$ in den Formeln (1a)* und (3a)* nur linear auftreten.

Da man die Formeln (1a)* . . . (8)* auch leicht aus den gewöhnlichen Formeln für die Transformation rechtwinkliger Coordinaten herleiten kann, so hat man damit einen neuen Weg zu der im gegenwärtigen Paragraphen begründeten Theorie.

Marburg, den 26. Juli 1891.

Zusätze zum I. Abschnitt.

Zu § 6 (S. 473). Den Satz auf S. 464 oben kann man in einfacher Weise auch so darlegen: Man nenne w, $\bar{w}$, w' die drei Ebenen, die den Punkten x, $\bar{x}$, x' durch das Nullsystem $\mathfrak{W}$ zugeordnet werden. Dann schneiden sich w und w' in einer Geraden von $\bar{w}$; diese Ebene aber ist mit der sonst mit $\bar{u}$ bezeichneten Ebene, der Normalebene der Sehne xx' identisch. $\bar{w}$ ist also eine der beiden Winkelhalbirenden von w und w'. Nun hat man nach Construction:

$$w\,\{\mathfrak{W}\}\,x\,\{\mathfrak{T}_1\}\,\bar{x}\,\{\mathfrak{W}\}\,\bar{w}\,\{\mathfrak{W}\}\,\bar{x}\,\{\mathfrak{T}_2\}\,x'\,\{\mathfrak{W}\}\,w',$$

also nach Formel (6) und (7) S. 471

$$w\,\{\mathfrak{T}_2\}\,\bar{w}\,\{\mathfrak{T}_1\}\,w'.$$

Dass $\bar{w}$ die Winkelhalbirende *erster* Art von w und w' ist, ist leicht zu sehen. Vgl. noch den Satz auf S. 497 unten.

Zu § 9 (S. 484). Es war mir entgangen, dass Herr C. Jordan in seiner bekannten Abhandlung (Annali di Matematica, ser. ~~III~~, t. II) II
das Problem der Bewegungsgruppen schon in allgemeinster Weise erledigt hat. Immerhin dürfte die in § 9 mitgetheilte kurze Darlegung, wenn sie auch nichts Neues enthält, vielleicht manchem Leser willkommen sein.

Zu § 10 (S. 487). Der an die Spitze gestellte fundamentale Satz ist bekannt. Er rührt, nach einer Mittheilung von Herrn Schönflies, von dem durch seine Untersuchungen über Krystallstructur verdienten Hessel her.

Nov. 1891.

Inhalt.

Ueber Cremona-Transformationen in der Ebene, welche eine Curve enthalten, die sich Punkt für Punkt selbst entspricht.

Von

Karl Doehlemann in München.

I. Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften.

§ 1.

Formeln für eine ebene Transformation mit einer festen Curve.

Eine Ebene sei durch eine Cremona-Transformation n. Grades eindeutig auf sich selbst bezogen; die Coordinaten eines Punktes dieser Ebene mögen mit x_i oder y_i bezeichnet werden, jenachdem man ihn als Punkt der einen Ebene E_x oder der andern Ebene E_y auffasst. Die Gleichungen der Transformation seien:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

und

$$y_1 : y_2 : y_3 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3.$$

In jeder Ebene sind h Fundamental-Punkte gelegen und zwar seien dieselben in der E_x von den Ordnungen:

$$r_1 \geq r_2 \geq r_3 \cdots \geq r_h,$$

dagegen in der E_y von den Ordnungen:

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \cdots \overline{<} s_h.$$

Wir nehmen an, dass die beiden Systeme in allgemeiner Lage sind, d. h. dass *kein* Fundamental-Punkt der einen Ebene mit einem der andern Ebene zusammenfällt.

Dann gelten die Gleichungen:

$$\sum_i r_i = 3(n-1), \qquad \sum_k s_k = 3(n-1),$$

$$\sum_i r_i^2 = n^2 - 1, \qquad \sum_k s_k^2 = n^2 - 1,$$

$$3r_i - 1 = \sum_k \alpha_{ik}, \qquad 3s_k - 1 = \sum_i \alpha_{ik},$$

$$n r_i = \sum_k s_k \alpha_{ik}, \qquad n \cdot s_k = \sum_i r_i \alpha_{ik},$$

$$r_i r_{i'} = \sum_k \alpha_{ik} \cdot \alpha_{i'k}, \qquad s_k \cdot s_{k'} = \sum_i \alpha_{ik} \cdot \alpha_{ik'},$$

Dabei ist $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ die Zahl, welche angiebt, wie oft die Fundamental-Curve R_i von der Ordnung r_i, die dem Fundamental-Punkt (r_i) entspricht, durch den Fundamental-Punkt (s_k) hindurchgeht, oder auch, wie oft die F.-C. S_k, die dem F.-P. (s_k) entspricht, durch den F.-P. (r_i) läuft.

Es sei nun eine Curve M_x der E_x vorhanden von der Ordnung μ, welche die F.-P. der E_x beziehungsweise zu ϱ_1-, ϱ_2-, $\cdots$ ϱ_h-fachen Punkten hat und dieser Curve entspreche in der Transformation, abgesehen von den sich abtrennenden F.-C., eine Curve M_η von der gleichen Ordnung μ, welche die F.-P. in E_y bezw. zu σ_1-, σ_2-, ..., σ_h-fachen Punkten hat. Wir fragen zunächst nach den Beziehungen zwischen den Grössen ϱ, σ, r, s, α. Es ist für's erste

$$\mu = n\mu - \sum_i r_i \varrho_i = n\mu - \sum_k s_k \sigma_k,$$

also

$$\sum_i r_i \varrho_i = \sum_k s_k \sigma_k = (n-1)\,\mu. \tag{1}$$

Ferner wird die F.-C. S_k von der M_x in $\mu . \sigma_k$ Punkten geschnitten. Diese sind entweder F.-P. der E_x, was $\sum_j \alpha_{kj}\, \varrho_j$ Schnittpunkte liefert oder sie sind keine F.-P. der E_x. Da nun aber M_y σ_k mal durch s_k hindurchgeht, so müssen ebensoviele Schnittpunkte der M_x mit der S_k in von den F.-P. der E_x verschiedene Punkte fallen. Dabei ist vorausgesetzt, dass die M_y in s_k keine F.-C. berührt. Dann hat man aber die beiden Systeme von h Gleichungen:

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{l} \mu s_k = \sum_j (\alpha_{kj}\varrho_j) + \sigma_k \\ \text{und} \\ \mu r_i = \sum_p (\alpha_{pi}\sigma_p) + \varrho_i \end{array} \qquad \begin{Bmatrix} k = 1, 2, \cdots h \\ i = 1, 2, \cdots h \end{Bmatrix}.$$

Summirt man die erste dieser beiden Gleichungen nach k, so kommt:

$$\sum_k \sum_j \alpha_{kj}\varrho_j = \sum_k (\mu s_k - \sigma_k) = \mu \sum_k s_k - \sum_k \sigma_k$$

oder

$$\sum_j \Big(\varrho_j \sum_k \alpha_{jk}\Big) = 3\mu(n-1) - \sum_k \sigma_k.$$

Ersetzt man $\sum_k \alpha_{jk}$ durch seinen Werth, so ergiebt sich

$$3\sum_i r_i\varrho_i - \sum_i \varrho_i = 3\mu(n-1) - \sum_k \varrho_k$$

oder nach (1)

$$\text{(3)} \qquad \sum_i \varrho_i = \sum_k \sigma_k.$$

Ferner ist

$$\varrho_i^2 = \Big(\mu r_i - \sum_p \alpha_{pi}\sigma_p\Big)^2$$

und

$$\sum_i \varrho_i^2 = \mu^2 \cdot \sum_i r_i^2 - 2\mu \cdot \sum_p \cdot \Big(\sigma_p \cdot \sum_i r_i\alpha_{pi}\Big) + \sum_i \Big(\sum_p \alpha_{pi}\sigma_p\Big)^2,$$

woraus nach einigen Umformungen folgt:

$$\text{(4)} \qquad \sum_i \varrho_i^2 = \sum_k \sigma_k^2.$$

Die Formeln (3) und (4) sagen aus, dass das Geschlecht von M_x und M_y das gleiche ist, wie diess wegen der eindeutigen Beziehung der beiden Ebenen ja der Fall sein muss. Aus (3) ergiebt sich auch unter Annahme der Gleichheit des Geschlechtes sofort die Gleichung (4).

Diese Formeln gelten nun auch noch, wenn M_x mit M_y zusammenfällt, d. h. wenn diese Curve durch die Transformation in sich selbst übergeführt wird; sie gelten auch noch, wenn *jeder* Punkt dieser Curve bei der Transformation ungeändert bleibt. Wir wollen dann die Curve M, die sich also Punkt für Punkt selbst entspricht, kurz als „feste" Curve bezeichnen.

Eine solche feste Curve muss dann nothwendig F.-P. enthalten. Ist s_k ein auf ihr gelegener F.-P. der E_x, dem also in der E_y die F.-C. S_k entspricht, so ist s_k, als Punkt der E_y betrachtet, ein ge-

wöhnlicher Punkt, da nach unserer Voraussetzung keine F.-P. der beiden Ebenen zusammenfallen. Also entspricht s_k als Punkt der E_y sich selbst. Es sind aber die Punkte der S_k die einzigen Punkte der E_y, denen s_k entspricht: also muss S_k durch s_k hindurchgehen und da ein vielfacher Punkt einer F.-C. immer ein F.-P. der andern Ebene, so folgt, dass S_k nur einfach durch s_k hindurchgehen kann: also:

„Die auf der „festen" Curve gelegenen F.-P. machen nur insofern eine Ausnahme, als ihnen noch überdiess die Punkte der betr. F.-C. entsprechen".

Es ist nun direct einzusehen, dass eine F.-C. von der festen Curve *nur* in P.-P. geschnitten werden kann. Nehmen wir jetzt an, es gehe

die F.-C. S_k durch den F.-P. s_p ... ${}^k\sigma_p$ mal hindurch und
„ „ R_i „ „ „ r_p ... ${}^i\varrho_p$ „

so können die Grössen ${}^k\sigma_p$ und ${}^i\varrho_p$, wenn k und p bezw. i und p verschieden sind, blos Null oder Eins sein, dagegen muss nach dem Obigen ${}^k\sigma_k = {}^i\varrho_i = 1$ sein. Dann hat man wieder

$$\mu s_k = \sum_j \alpha_{jk} \cdot \varrho_j + \sum_p {}^k\sigma_p \cdot \sigma_p,$$

$$\mu r_i = \sum_j \alpha_{ji} \cdot \sigma_j + \sum_p {}^i\varrho_p \cdot \varrho_p.$$

Die F.-P. der E_y sind aber als Punkte der E_x betrachtet, gewöhnliche Punkte, also werden den $\sum\limits_p {}^k\sigma_p \cdot \sigma_p$ Durchschnittspunkten von M mit S_k die σ_k Durchgänge von M durch s_k entsprechen. Dabei ist dann σ_k nicht mehr nothwendig identisch mit der Anzahl der Tangenten, die in s_k an M vorhanden sind, sondern es bedeutet σ_k die Anzahl der Aeste, mit denen M durch s_k hindurchgeht, die aber zum Theil die gleiche Tangente haben können.

Es ist also

$$\sigma_k = \sum_p {}^k\sigma_p \cdot \sigma_p \quad \text{und} \quad \varrho_i = \sum_p {}^i\varrho_p \cdot \varrho_p.$$

Daraus folgt aber, da ${}^k\sigma_k = {}^i\varrho_i = 1$ und nicht Null sein kann,

$${}^k\sigma_1 = {}^k\sigma_2 = \cdots = {}^k\sigma_{k-1} = {}^k\sigma_{k+1} = \cdots = {}^k\sigma_k = 0,$$

$${}^i\varrho_1 = {}^i\varrho_2 = \cdots = {}^i\varrho_{i-1} = {}^i\varrho_{i+1} = \cdots = {}^i\varrho_h = 0,$$

also der Satz:

„Die F.-C., welche F.-P. entsprechen, die auf der festen Curve gelegen sind, gehen *nur* durch diese, ihnen entsprechenden, F.-P. und zwar *einfach* hindurch."

Natürlich können noch ausserhalb der festen Curve F.-P. vorhanden sein, deren entsprechende F.-C. durch sie hindurchgehen. Diess sind dann isolirte, selbstentsprechende Punkte.

Ist π das Geschlecht der festen Curve, ferner λ_τ die Vielfachheit eines Punktes von M, der nicht in einem F.-P. gelegen ist, so wird

$$\pi = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} - \sum_i \frac{\varrho_i(\varrho_i-1)}{2} - \sum_k \frac{\sigma_k(\sigma_k-1)}{2} - \sum \frac{\lambda_\tau(\lambda_\tau-1)}{2},$$

oder nach (3) und (4)

$$2\pi = (\mu-1)(\mu-2) - 2\sum_i \varrho_i(\varrho_i-1) - \sum \lambda_\tau(\lambda_\tau-1)$$

also

$$(5) \qquad 2\sum_i \varrho_i(\varrho_i-1) + \sum \lambda_\tau(\lambda_\tau-1) \leq (\mu-1)(\mu-2).$$

Würde M zerfallen, so wäre noch

$$(6) \qquad 2\sum_i \varrho_i(\varrho_i-1) + \sum \lambda_\tau(\lambda_\tau-1) \leq \mu(\mu-1).$$

§ 2.

Das System der isologen Curven.

1) Hat man einen festen Punkt O mit den Coordinaten $o_1 o_2 o_3$ gewählt, so kann man die Paare entsprechender Punkte P_x und P_y suchen, deren Verbindungslinie immer durch O geht. Dann beschreiben P_x und P_y die zum Punkte O gehörigen „isologen" Curven J_x und J_y *). Die Gleichungen dieser Curven sind offenbar

$$J_x = \begin{vmatrix} o_1 & o_2 & o_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \psi_1(x) & \psi_2(x) & \psi_3(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad J_y = \begin{vmatrix} o_1 & o_2 & o_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Curven sind also vom Grade $n+1$, (wir nehmen zunächst an, dass die Transformation keine „feste" Curve enthält), gehen durch O hindurch und entsprechen einander in der Transformation. Man kann sie auch wie folgt erhalten: Nimmt man den Strahlenbüschel durch O als in der E_x gelegen, so entspricht ihm ein Büschel von Curven n. Ordg. und J_y ist das Erzeugniss dieser projectiven Büschel. Nimmt man den gleichen Strahlenbüschel als in der E_y gelegen, so erzeugt er mit dem Büschel entsprechender Curven die J_x.

Aus der Gleichungsform ist zu erkennen, dass die zu allen Punkten in jeder Ebene gehörigen isologen Curven je ein Netz bilden. Durch

*) de Jonquières: Nouvelles Annales de Mathématiques. Deux. Série. Tome 3. 1864. — Dewulf, Darboux, Bulletin. Série I. V. 1873.

2 Punkte ist ja auch das Centrum O der „Isologie" und damit die betr. isologe Curve festgelegt. Die sämmtlichen, isologen Curven einer Ebene gehen nun:

a) durch alle sich selbst entsprechenden Punkte der Ebene, für welche also gleichzeitig

$$x_1\varphi_2-\varphi_1x_2=0,\quad x_2\varphi_3-\varphi_2x_3=0,\quad x_3\varphi_1-\varphi_3x_1=0 \text{ und}$$
$$x_1\psi_2-\psi_1x_2=0,\quad x_2\psi_3-\psi_2x_3=0,\quad x_3\psi_1-\psi_3x_1=0$$

wo die φ und ψ in den x geschrieben sind;

b) durch alle F.-P. ihrer Ebene und zwar durch jeden Punkt so oftmal, als seine Ordnung beträgt. Auch diess ersieht man direct aus der obigen Gleichung dieser Curven unter Berücksichtigung des Verhaltens der φ_i und ψ_i in den F.-P.

2) Enthält die Transformation nun eine feste Curve M, deren Ordnung μ und deren Gleichung $M=0$ sein möge, so müssen ersichtlich die Gleichungen der Transformation in folgender Form erscheinen:

$$x_1:x_2:x_3=(y_1f+M\chi_1):(y_2f+M\chi_2):(y_3f+M\chi_3) \text{ und}$$
$$y_1:y_2:y_3=(x_1g+M\varpi_1):(x_2g+M\varpi_2):(x_3g+M\varpi_3),$$

wobei f und g Polynome vom Grade $n-1$, χ_i und ϖ_i vom Grade $n-\mu$. Unter dieser Voraussetzung gehen die Gleichungen der isologen Curven über in:

$$J_x=M\begin{vmatrix} 0_1 & 0_2 & 0_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \varpi_1(x) & \varpi_2(x) & \varpi_3(x)\end{vmatrix}=0 \text{ und } J_y=M\begin{vmatrix} 0_1 & 0_2 & 0_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \chi_1(y) & \chi_2(y) & \chi_3(y)\end{vmatrix}=0.$$

Es sondert sich also, was ja auch geometrisch klar, bei jeder isologen Curve die feste Curve ab, die übrigen, (beweglichen) isologen Curven bilden wieder ein Netz.

Geht die feste Curve durch einen F.-P. etwa s_k mit der Vielfachheit σ_k hindurch, so hat jede isologe Curve J_y noch einen $(s_k-\sigma_k)$-fachen Punkt in s_k. Da $s_k-\sigma_k\geq 0$ sein muss, so folgt auch noch $\sigma_k\leq s_k$, d. h.

„Die feste Curve geht durch einen F.-P. mit einer Vielfachheit hindurch, die *höchstens* gleich der Ordg. des F.-P. werden kann. Diess gilt auch noch, wenn sich F.-P. der beiden Ebenen decken."

§ 3.

„N“ Curven. „L“ Curven.

1) Folgender bekannte Satz über isologe Curven führt uns zu weiteren geometrischen Oertern in der Ebene:

> „Rückt das Centrum $(0_1\, 0_2\, 0_3)$ der Isologie auf einer Geraden $\overline{P_1 P_2}$ fort, so beschreiben die isologen Curven J_x und J_y je ein Büschel.“

Der Satz ist bewiesen, sobald man die Coordinaten eines Punktes der Verbindungslinie $\overline{P_1 P_2}$ in die Gleichung der isologen Curve einführt. Da aber jeder isologen Curve der einen Ebene *eine* isologe Curve der andern Ebene entspricht, so sind diese beiden Büschel von Curven $(n+1)$-Ordg. auch projectiv auf einander bezogen. Sie erzeugen dann in den Schnittpunkten entsprechender Curven eine Curve von der Ordg. $2(n+1)$. Diese enthält nun:

1) die Verbindungslinie $\overline{P_1 P_2}$, da auf ihr sich je 2 entsprechende Curven schneiden;
2) alle selbstentsprechenden Punkte;
3) alle Punkte von der Eigenschaft, dass sie als Punkt R_x und gleichzeitig als Punkt Q_y genommen, mit den entsprechenden Punkten R_y und Q_x in *einer* Geraden liegen, die durch das Centrum der Isologie geht. Den Ort dieser Punkte bezeichnen wir wie Guccia*) als die „N“ Curve.

Enthält die Transformation keine feste Curve, so ist die „N“ Curve von der Ordg. $2n+1$. Ihre Gleichung wird nämlich

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) & \varphi_3(\xi) \\ \psi_1(\xi) & \psi_2(\xi) & \psi_3(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe zeigt, dass die „N“ Curve jeden F.-P. der einen und andern Ebene als einen so vielfachen Punkt enthält als seine Ordg. beträgt.

Tritt in der Transformation eine feste Curve auf, so ist leicht zu sehen, dass diese, 3-fach gerechnet, sich von N absondert. Denn die isologen Curven sind dann noch Curven von der Ordg. $n-\mu+1$, das Erzeugniss der projectiven Büschel ist also zunächst von der Ordg. $2(n-\mu+1)$ und da wieder die Gerade in Abzug zu bringen, so ist der erzeugte Ort von der Ordg. $2n-2\mu+1$; aber auch noch dieses Erzeugniss enthält einfach die feste Curve, also folgt:

---

*) Guccia: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1884—1887.

„Enthält eine Cremona-Transformation n. Grades eine feste Curve μ. Ordg., so ist der Ort aller Punkte von der Eigenschaft, dass sie mit den beiden, ihnen in jeder Ebene entsprechenden Punkten in einer Geraden liegen, eine Curve von der Ordg. $2n - 3\mu + 1$.“*)

2) Die Verbindungslinien eines Punktes der „N“-Curve mit den beiden entsprechenden Punkten umhüllen eine Classencurve L.**) Auch diese ist wie die „N“-Curve für quadratische Transformationen zuerst von Hirst***) angegeben worden. Enthält die Transformation keine feste Curve, so folgt für die Classe von L der Ausdruck $n^2 + n - 2$.

Es kann nun die Ordnung der „N“-Curve höchstens Null, nie aber negativ werden, also ist

$$2n - 3\mu + 1 \geq 0.$$

Setzt man $n - \mu = k$, wo $k > 0$, so folgt daraus

$$n \leq 3k + 1,$$

von welcher Formel wir später eine Anwendung machen werden.

Ist speciell

$$2n - 3\mu + 1 = 0,$$

so enthält die Transformation keinen Ort N. Dann ist nothwendig $\mu > 0$ d. h. die Transformation muss eine feste Curve enthalten. Es wird dann für $k = 1$, $n = 4$; $k = 2$, $n = 7$ u. s. f. Ob die betreffenden Transformationen existiren, muss erst noch untersucht werden. Wir werden sehen, dass die Transformation $k = 1$, $n = 4$ möglich ist, die Transformation $k = 2$, $n = 7$ dagegen nicht.

§ 4.

Coincidenzpunkte. Umhüllungscurve H.

1) Ist P ein sich selbst entsprechender, isolirter Punkt (Coincidenzpunkt) und *nicht* gleichzeitig ein F.-P., so entspricht jeder beliebigen Curve durch P eine Curve der andern Ebene, die auch wieder durch P hindurchgeht. Die Tangenten an diese beiden Curven in P sollen „entsprechende Richtungen“ heissen. Wir stellen nun fest:

Definition: „Eine *selbst* entsprechende Richtung soll eine solche sein, welche mit ihrer entsprechenden Richtung zusammenfällt.“

Einer Geraden, die eine selbstentsprechende Richtung enthält entspricht also eine Curve (oder ein Curvensystem), welche die Gerade im Punkte P berührt.

---

*) Die „N“-Curve kommt nicht zu Stande und *jeder* Punkt der Ebene hat die erwähnte Eigenschaft, wenn $\mu = n$. (Siehe § 5.)

**) Guccia: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo: 1884—1887.

***) Hirst: Quarterly Journal: n. 68. 1881.

Ist nun P kein F.-P., so sind folgende Fälle möglich:

a) es giebt durch P zwei (reelle, imaginäre, oder in eine zusammenfallende) selbstentsprechende Richtungen, die Doppelstrahlen der beiden Büschel entsprechender Richtungen;

b) jede Richtung durch P ist eine selbstentsprechende Richtung. Dies ist schon dann der Fall, wenn mehr als 2 selbst entsprechende Richtungen durch P vorhanden sind.

Coincidenzpunkte vom Charakter a) sollen Coincidenzpunkte 1. Art heissen, die vom Typus b) dagegen Coincidenzpunkte 2. Art. Die Möglichkeit des Vorkommens dieser letztern in nicht involutorischen Systemen habe ich in meiner Inaugural-Dissertation*) pag. 33 nachgewiesen.

Auf jeder selbstentsprechenden Richtung durch P liegen 2 einander entsprechende, zu P unendlich benachbarte Punkte, die aber nicht zusammenfallen. Sie können z. B. auf verschiedenen Seiten von P gelegen sein.

2) Ist P ein Coincidenzpunkt und gleichzeitig ein F.-P. etwa s_k der E_y, so entspricht ihm die F.-C. S_k. Ist nicht auch ein F.-P. der E_x in P gelegen, so geht S_k einfach durch P hindurch. In einem solchen Coincidenzpunkte giebt es *keine* Büschel entsprechender Richtungen.

Nimmt man aber S_k als eine Curve der E_y, so entspricht ihr ein gewisses Curvensystem, in dem auch S_k enthalten ist, also ist jede Tangente in s_k an S_k als eine selbstentsprechende Richtung zu betrachten und man kann sagen:

„Die Tangente an eine F.-C. in dem ihr entsprechenden F.-P. ist eine sich selbstentsprechende Richtung.“

Dagegen ist zu bemerken, dass *diese* selbstentsprechenden Richtungen, die von einem F.-P. ausgehen, im allgemeinen keine zwei, zum Coincidenzpunkt unendlich benachbarte einander entsprechende Punkte enthalten.

3) Hat man nun eine Transformation mit einer festen Curve M, so sind deren Punkte Coincidenzpunkte und zwar können diese lauter Coincidenzpunkte der 1. Art sein, oder es befinden sich darunter einzelne der 2. Art, oder es sind lauter Coincidenzpunkte der 2. Art, unter denen endlich auch noch einzelne der 1. Art auftreten können.

Die beiden letzten Fälle sind speciellere, wir nehmen im Folgenden an, dass der erste oder zweite Fall vorliege. Dann gehen durch jeden Punkt von M, der kein F.-P. oder kein Coincidenzpunkt 2. Art,

*) Doehlemann: Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen. München, Theodor Ackermann: 1890.

im allgemeinen 2 selbstentsprechende Richtungen und eine von ihnen wird mit der Tangente an M zusammenfallen.*) Die andern, selbstentsprechenden Richtungen werden eine Curve H umhüllen, die auch für die Transformation charakteristisch ist.

Die Tangenten von M sind als selbstentsprechende Richtungen dadurch ausgezeichnet, dass auf ihnen *je zwei zusammenfallende*, selbstentsprechende Punkte gelegen sind. Dann folgt:

„Jede Tangente an eine F.-C. in dem auf M gelegenen F.-P., dem sie entspricht, ist im Allgemeinen eine Tangente der Curve H.“

Geht die feste Curve einmal oder öfters durch einen F.-P. s_k, so brauchen die Aeste von S_k, die durch s_k gehen, nicht die durch s_k gehenden Aeste von M zu berühren. Dies ist vielmehr nur dann nothwendig der Fall, wenn die Transformation eine *involutorische*. Uebrigens ist noch folgendes zu bemerken: Ist s_k ein auf M gelegener F.-P. und fällt kein F.-P. der E_x mit ihm zusammen, so entspricht dem Büschel von Geraden durch s_k ein Büschel von Curven $(n - s_k)$. Ordg. in der E_x. Nun kann dann s_k einer der Basispunkte dieses Büschels sein oder es giebt nur eine einzige Curve in dem genannten Büschel, die durch s_k läuft. Dann ist aber nach bekannten Sätzen über das Erzeugniss projectiver Curvenbüschel im ersten Falle s_k ein Doppelpunkt, im letztern ein einfacher Punkt des Erzeugnisses, das hier aus der festen Curve M und der isologen Curve J_x des Punktes s_k besteht. Jedenfalls folgt aber:

„Die feste Curve M hat in den auf ihr gelegenen F.-P., die nicht mit F.-P. der andern Ebene zusammenfallen, einfache oder höchstens Doppelpunkte.“

Es ist nun auch einzusehen, wie beim Auftreten einer festen Curve in einer Transformation die „N“ und die „L“ Curve in Theile zerfallen. Auf jeder Tangente der Curve H liegen ja unendlich benachbart zum Coincidenzpunkt zwei einander entsprechende Punkte, die also offenbar die Eigenschaft des Ortes „N“ haben. Daher sondert sich die feste Curve von dem Orte N ab. Ferner haben die Tangenten von H die Eigenschaft der Tangenten von L. In Folge dessen sondert sich beim Auftreten einer festen Curve auch H als ein Theil von L ab.

4) *Anzahl der Coincidenzpunkte.* Um für eine Cremona-Transformation mit einer festen Curve die Anzahl der übrigen, isolirten, Coincidenzpunkte zu bestimmen, nehmen wir, wie bekannt, die zu 2 beliebigen Punkten A und B in einer Ebene, etwa der E_x, gehörigen isologen Curven. Diese schneiden sich:

---

*) Vergl. auch: Bertini: Annali di Matematica. Serie II, Tom. VIII. 1877 (Anmerkg. zu Nr. 12). Caporali: Rendiconti della R. Accademia di Napoli. 1879.

a) in $(n-\mu)$ Punkten, die auf $\overline{AB}$ liegen;
b) in den F.-P. der E_x und zwar beträgt die Summe dieser Schnittpunkte

$$\sum_i (r_i-\varrho_i)^2=\sum_i r_i^2-2\sum_i r_i\varrho_i+\sum_i \varrho_i^2$$
$$=n^2-1-2\mu(n-1)+\sum_i \varrho_i^2.$$

Die übrigen Schnittpunkte müssen selbstentsprechende (Coincidenz-) Punkte sein.

Die Anzahl dieser Punkte ist dann aber

$$(n+1-\mu)^2-n+\mu-n^2+1+2\mu(n-1)-\sum_i \varrho_i^2$$

oder

$$j=n+2+\mu^2-3\mu-\sum_i \varrho_i^2.$$

Für $\mu=0$ und $\sum_i \varrho_i^2=0$ erhält man daraus die $n+2$ Coincidenzen einer Transformation ohne eine feste Curve.

5) Um auch die Classe von H zu bestimmen, erwähnen wir vorher einen Zusammenhang zwischen der Curve H und den isologen Curven. Hat man einen Punkt O und eine seiner isologen Curven, so schneidet diese die feste Curve ausser in F.-P. noch in einer Reihe von Punkten, durch welche auch die entsprechende isologe Curve geht. Als Doppelpunkte des Erzeugnisses der projectiven Büschel liefern diese Punkte mit O verbunden die Tangenten von O aus an H. Bemerken wir, dass jede Tangente von H von *einem* bestimmten Punkte der Curve M „ausgeht," so gilt der Satz:

> „Betrachtet man die von einem Punkte O aus an die Curve H gehenden Tangenten, so gehen die beiden zu O gehörigen isologen Curven durch die Punkte von M, von welchen die Tangenten ausgehen."

Daraus bestimmt sich die Classe δ von H leicht als

$$\delta=\mu(n-\mu+1)-\sum_i \varrho_i(r_i-\varrho_i)=\sum_i \varrho_i^2-\mu(\mu-2).$$

Es hängen also sowohl γ als δ blos von μ, n und $\sum_i \varrho_i^2$ ab und bleiben die gleichen, wenn diese 3 Grössen sich nicht ändern.

6) Die Classe der Curve L ferner ergiebt sich jetzt aus der Ueberlegung, dass die beiden, zu *einem* Punkte gehörigen, isologen Curven sich ausser im Centrum der Isologie, ausser in den F.-P. und den

Punkten der festen Curve und ausser in den isolirten Coincidenzpunkten in ebensovielen Punkten schneiden als die Classe λ von L beträgt. Es wird also:

$$\lambda = (n-\mu+1)^2 - 1 - j - \delta = n^2 + n - 2 + \mu^2 - 2n\mu - \mu.$$

Dies ist also die Classe der L-Curve, nachdem H sich abgesondert. Es ergiebt sich aus diesen Gleichungen auch die von Zeuthen*) auf ähnliche Weise abgeleitete Formel:

$$j = n + 2 - \mu - \delta.$$

§ 5.

Weitere Sätze über die festen Curven, die eine Transformation enthalten kann. Classe einer Transformation.

1) Der soeben erwähnte Zusammenhang zwischen der festen Curve und den isologen Curven bestimmt zwar zum Theil auch das Netz der isologen Curven, doch ist er nicht dazu hinreichend; vielmehr ist klar:

„Die isologen Curven gehen immer noch durch gewisse F.-P."

In der That könnte ja, wenn eine isologe Curve nicht durch F.-P. hindurchginge, die entsprechende isologe Curve unmöglich vom gleichen Grade sein. Ueberdies folgt dies auch aus den Gleichungen (5) und (6) auf pag. 571, welche unter dieser Annahme übergehen in:

$$(\mu-1)(\mu-2) \geq 2(n-1)(n-2)$$

bezw.

$$\mu(\mu-1) \geq 2(n-1)(n-2).$$

Diese Gleichungen können aber bloss bestehen, wenn $\mu > n$ und der Fall $\mu = n = 1$ ist der der Collineation. Dass $\mu > n$ unzulässig, folgt ja sofort daraus, dass die irgend einer Geraden entsprechende Curve ja durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit der festen Curve gehen muss.

2) Ist $\mu = n$, enthält also die Transformation eine feste Curve vom höchstmöglichen Grade, so ist die Transformation eine sogenannte Jonquières-Transformation und ihre beiden $(n-1)$-fachen F.-P. fallen zusammen, während überdies die zu diesen Punkten gehörigen Strahlbüschel sich Strahl für Strah ldecken. Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte gehen also stets durch einen festen Punkt.**) Ich habe in meiner Dissertation solche Transformationen als perspective Jonquières-Transformationen bezeichnet.

Man kann auch leicht für die Zahl μ eine obere Grenze ableiten, wenn man bedenkt, dass die feste Curve je durch irgend 2 Büschel

*) Zeuthen: Comptes rendus. Tome 78. 1874.

**) Bertini: Annali di Matematica Serie II, Tom VIII, 1877 (No. 19).

einander entsprechender Curven muss erzeugt werden können. Sind r_1, r_2, r_3, r_4 die F.-P. höchster Ordg. der Transformation, sodass $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq r_4$, so ist bekanntlich

$$r_1 + r_2 + r_3 > n$$

und also

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = n + 2 + \eta,$$

wo η Null oder positiv ist. Dann entspricht aber einem Kegelschnitt durch diese 4 F.-P. eine Curve von der Ordg. $n - 2 - \eta$ und das Erzeugniss des Kegelschnittbüschels und des entsprechenden Curvenbüschels ist von der Ordg. $n - \eta$. Dann folgt aber:

„Ist η der Ueberschuss der Summe der 4 höchsten F.-P. (einer Ebene) über die Zahl $n + 2$, so kann die feste Curve höchstens vom Grade $n - \eta$ sein, wobei η Null oder positiv."

$\eta =$ Null giebt hier den Fall der Jonquières-Transformation. Die Transformation 4. Grades z. B. mit 3 Doppelpunkten und 3 einfachen Punkten kann demnach höchstens eine Curve 3. Ordg. als feste Curve enthalten.

3) Andererseits gilt auch folgender Satz (S. 574):

„Soll eine Transformation n. Grades eine feste Curve μ. Ordg. enthalten, so ist damit eine *obere Grenze* für den Grad n der Transformation überhaupt gegeben. Ist nämlich $n - \mu = k$, so ist immer

$$n \leq 3k + 1."$$

Diese Zahl k hat nun auch eine geometrische Bedeutung. Sie giebt, wie leicht zu erkennen, die Anzahl der Paare entsprechender Punkte der Transformation, die auf einer beliebigen Geraden der Ebene gelegen sind. Caporali hat (loc. cit.) für *involutorische* Transformationen die Anzahl solcher Punktpaare als die „Classe" der Transformation bezeichnet und Bertini hat*) die *involutorischen* Transformationen der Classen 0, 1, 2, sowie die Jonquières-Transformationen der Classen $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{2}$ angegeben. Für eine *involutorische* Transformation ist natürlich die Classe $k = \frac{n+\mu}{2}$, weil die Schnittpunkte irgend einer Geraden mit der ihr entsprechenden Curve sich zu Paaren anordnen. Offenbar lässt sich aber der Begriff der Classe als identisch mit der Anzahl der Paare entsprechender Punkte auf einer beliebigen Geraden, auch auf nicht involutorische Transformationen ausdehnen. Es ist dann nur zu bemerken, dass die Classe einer Transformation halb so gross wird, wenn sie involutorisch wird.

Dieser Begriff der Classe kann dann auch zu einer Eintheilung

*) Bertini: Annali di Mat. Serie II, tom. VIII. 1877. Rendiconti del Ist. Lomb. Serie II. Vol. XVI. 1883.

der eindeutigen Transformationen überhaupt benutzt werden. Man erhält nämlich:

1) $k = 0$, $\mu = n$ d. h. die Transformationen von der Classe 0 sind die „perspectiven“ Jonquières-Transformationen;

2) $k = 1$, $\mu = n - 1$, dann ist $n \leq 4$,

3) $k = 2$, $\mu = n - 2$, „ „ $n \leq 7$ u. s. f.

Wir sehen also: Alle Transformationen der ersten Classe d. h. die Transformationen n. Ordg. mit einer festen Curve $(n-1)$. Ordg. sind vom 4. oder niederen Grade; die Transformationen der 2. Classe sind höchstens vom Grade 7 u. s. f. Enthält die Transformation n. Grades keine feste Curve, so ist sie auch von Classe n. Je niederer die Classe ist, um so beschränkter wird die Anzahl der möglichen Transformationen sein. Die möglichen Transformationen der 1. und 2. Classe werden wir im letzten Abschnitt ableiten. Wir untersuchen vorher aber noch, welche feste Curven eine Jonquières-Transformation enthalten kann.

II. Abschnitt.

Die Jonquières-Transformationen mit festen Curven.

§ 6.

Jonquières-Transformationen mit nicht zusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-Punkten.

1) Bei einer Jonquières-Transformation besteht, wenn n der Grad der Transformation, das System der F.-P. in jeder Ebene aus einem $(n-1)$-fachen F.-P. M_x (bezw. M_y) und aus $2(n-1)$ einfachen F.-P. Die Strahlbüschel M_x und M_y sind projectiv und erzeugen einen durch ihre Mittelpunkte hindurchgehenden Kegelschnitt. Wir wollen zeigen, dass dieser Kegelschnitt und *nur* dieser eine feste Curve für die Transformation sein kann.

Gehen wir, um zunächst eine quadratische Transformation dieser Art abzuleiten, aus von einem Kegelschnitt K und wählen auf ihm 4 Punkte A_1, A_1', B_1, B_1' ganz willkürlich. Zu jedem Punkte P_x, finden wir den entsprechenden durch folgende Construction: wir ziehen $A_1 P_x$ und $A_1' P_x$, diese treffen K noch je in einem Punkte. Durch diese sowie durch B_1 bezw. B_1' ziehen wir die Verbindungsstrahlen und der Schnittpunkt P_y dieser beiden Strahlen soll P_x entsprechen. Es sind also die Büschel A_1 und B_1, sowie A_1' und B_1' projectiv durch K aufeinander bezogen. Wird der Schnittpunkt von $\overline{A_1 B_1'}$ und $\overline{B_1 A_1'}$ mit A_1'' und gleichzeitig mit B_1'' bezeichnet, so erhält man durch diese Beziehung eine quadratische Transformation und zwar die

perspective Jonquières-Transformation 2. Grades. $A_1'' \equiv B_1''$ ist der „Mittelpunkt" derselben. K ist dabei eine feste Curve. Wendet man diese Transformation k mal in der Ebene an unter Beibehaltung des nämlichen Kegelschnittes K, so gelangt man zu dem Satze:

> „Man kann durch eine Transformation von der Ordg. 2^k mit $3 \ldots 2^{k-1}$-fachen, $3 \ldots 2^{k-2}$-fachen ... 3 einfachen F.-P. in jeder Ebene die Ebene so auf sich selbst beziehen, dass der Kegelschnitt K eine feste Curve ist. Von den Tripeln von F.-P. gleicher Ordg. liegen je zwei (in jeder Ebene) auf dem Kegelschnitt."

2) Trifft man für die folgenden quadratischen Transformationen specielle Annahmen (verlegt man von den 4 neu zu wählenden Punkten einen nach B_1) so erhält man (vergl. auch meine Dissertation pag. 19) statt der Transformation von der Ordg. 2^k eine allgemeine Jonquières-Transformation und es folgt:

> „Eine Jonquières-Transformation beliebiger Ordg. kann den Kegelschnitt K, den die projectiven Büschel M_x und M_y erzeugen, als feste Curve enthalten. Von den $2(n-1)$ F.-P. 1. Ordg. in jeder Ebene liegen je $(n-1)$ auf dem Kegelschnitt K."

Nun muss aber bei einer Jonquières-Transformation jeder Coincidenzpunkt mit M_x und M_y verbunden entsprechende Strahlen der projectiven Büschel M_x und M_y liefern, also folgt:

> „Eine Jonquières-Transformation mit nicht zusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-P. kann überhaupt *nur* den durch die Büschel M_x und M_y erzeugten Kegelschnitt und keine andere Curve höherer Ordg. als feste Curve enthalten."

Es ist klar, dass isolirte Coincidenzpunkte bei dieser Transformation *nicht* auftreten; die Classe der Curve H ist n; da H überhaupt vom gleichen Geschlecht wie M, so ist H in diesem Falle auch eine rationale Curve. —

3) *Der Kegelschnitt K zerfällt in 2 Gerade und diese beiden sind fest.* Dieser specielle Fall ergiebt sich ohne weiteres aus den in 1) und 2) angestellten Betrachtungen, welche durchaus ungeändert bleiben, wenn an Stelle des Kegelschnittes K ein Geradenpaar tritt, so dass auf der einen Geraden A_1 und B_1 liegen, auf der anderen dagegen A_1' und B_1'. Im Schnittpunkt der beiden Geraden hat dann die zur Erzeugung dienende quadratische Transformation einen Coincidenzpunkt 2. Art, da durch ihn 3 sich selbst entsprechende Richtungen gehen.

Es folgt dann wieder durch wiederholte Anwendung dieser quadratischen, perspectiven Transformation:

> „Die allgemeine Jonquières-Transformation mit nicht zusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-P. kann als feste Curve

auch 2 Gerade enthalten, von denen die eine der Verbindungslinie der beiden $(n-1)$-fachen F.-P., während auf der andern von den $2(n-1)$ F.-P. 1. Ordg, einer jeden Ebene je $(n-1)$ liegen."

4) Der Vollständigkeit wegen sind nun auch noch die Fälle zu erwähnen, wo die Jonquières-Transformation *eine* feste Gerade enthält. Es zerfällt dann auch wieder der durch die Büschel M_x und M_y erzeugte Kegelschnitt in 2 Gerade, aber von diesen ist die eine eine feste, die andere bloss eine selbstentsprechende. Wir erhalten offenbar 2 Fälle:

a) Nehmen wir eine Gerade g und 4 Punkte A_1, A_1', B_1, B_1' ausserhalb derselben, so kann man ebenso wie in 1) zu jedem Punkt der A-Ebene einen Punkt der B construiren und umgekehrt, in dem an Stelle des frühern Kegelschnittes K die Gerade g benutzt wird. Es sind dann auch wieder die Büschel A_1 und B_1 einerseits und A_1' und B_1' andererseits projectiv und perspectiv (zur Geraden g). Dadurch erhält man eine quadratische Transformation und es wird der Schnittpunkt von $\overline{A_1A_1'}$ mit g der F.-P. B_1'', sowie der Schnittpunkt von $\overline{B_1B_1'}$ mit g der F.-P. A_1''. — Die erhaltene Transformation hat g als feste Gerade, $\overline{A_1B_1}$ und $A_1'B_1'$ sind selbst entsprechende Gerade, ihr Schnittpunkt ist ein Coincidenzpunkt. Diese Transformation ist unter dem Namen der „Steiner'schen Verwandtschaft" (schiefen Projection) allbekannt.

Nimmt man jetzt die B-Ebene gleichzeitig als C-Ebene und bezieht diese mittels 4 neuer Punkte C_1, C_1', D_1, D_2' und unter Benutzung der nämlichen Geraden g auf die D-Ebene, also auch die A- auf die D-Ebene u. s. f., so erhält man nach k-maliger Wiederholung dieser quadratischen Transformation:

> „Eine Transformation von der Ordg. 2^k mit $3\ldots2^{k-1}$-fachen, $3\ldots2^{k-2}$-fachen ... 3 einfachen F.-P. in jeder Ebene kann eine Gerade als feste Curve enthalten, auf der in jeder Ebene von jedem Tripel von F.-P. *einer* gelegen ist."

Macht man für die folgenden quadratischen Transformationen specielle Annahmen, indem man C_1 mit B_1 zusammenfallen lässt, dann E_1 mit D_1 u. s. f., so erhält man die allgemeine Jonquières-Transformation und es folgt:

> „Die Büschel M_x und M_y einer Jonquières-Transformation können perspectiv sein zu einer Geraden. Diese ist eine feste, während der Strahl $\overline{M_xM_y}$ blos eine selbstentsprechende Gerade vorstellt. Auf der festen Geraden liegen in jeder Ebene $(n-1)$ der $2(n-1)$ F.-P. 1. Ordg."

Ich habe diese Transformation schon früher*) stereometrisch, durch ein Strahlsystem, erzeugt, ganz ähnlich wie Steiner die nach ihm benannte Beziehung.

b) Es ist aber auch der andere Fall möglich, wo die Büschel M_x und M_y wieder perspectiv sind, die Verbindungslinie $\overline{M_x M_y}$ aber ist eine *feste* Gerade, der perspective Durchschnitt jedoch nicht. Wir construiren am einfachsten direct diese Beziehung: Wir nehmen die Büschel M_x und M_y perspectiv zu einer Geraden g; auf $2(n-1)$ Strahlen durch M_y wählen wir die $2(n-1)$ F.-P. 1. Ordg. $B_1 B_1' \dots$ $\dots B_1^{(2n-3)}$. Auf dem, dem Strahl $\overline{M_y B_1}$ entsprechenden Strahl werde der zugeordnete F.-P. A_1 angenommen. Dann bestimmen M_y in Verbindung mit den $2n-3$ Punkten $B_1' \dots B_1^{(2n-3)}$ ein Büschel von Curven $(n-1)$. Ordg., die in M_y einen $(n-2)$-fachen Punkt haben, während sie durch die übrigen genannten Punkte einfach hindurchgehen.

Zu einem Punkte P_x finden wir dann den entsprechenden wie folgt: Wir ziehen $\overline{A_1 P_x}$; diese trifft $\overline{M_x M_y}$ in einem Punkte und durch diesen Punkt geht eine Curve des oben genannten Büschels. Der Strahl, der $\overline{M_x P_x}$ entspricht, schneidet auf dieser Curve $(n-1)$. Ordg. den entsprechenden Punkt P_y aus. Offenbar kann man dann auch zu jedem Punkte P_y einen und nur einen Punkt P_x finden (im allgemeinen). Man erhält dann leicht folgendes:

> „Eine Jonquières-Transformation kann auch die Verbindungslinie $\overline{M_x M_y}$ der beiden $(n-1)$-fachen F.-P. als feste Curve enthalten, während der perspective Durchschnitt der Büschel M_x^n und M_y *keine feste*, ja keine selbstentsprechende Gerade."

Die Steiner'sche Verwandtschaft stellt den einfachsten Fall dieser Transformation vor, die man also als eine „allgemeine" Steiner'sche Verwandtschaft bezeichnen könnte. Damit sind alle möglichen Fälle der allgemeinen Jonquières-Transformation mit festen Curven erschöpft.

§ 7.

Jonquières-Transformationen mit zusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-P.**).

Wenn M_x mit M_y zusammenfällt, so sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wo die beiden projectiven Büschel blos 2 Doppelstrahlen

*) Doehlemann: Schloemilch, Zeitschrift für Math. und Physik. Jahrg. XXXIII. 1888.

**) In diesem *einzigen* Falle ist also die Voraussetzung nicht mehr erfüllt, dass *keine F.-P.* der beiden Ebenen zusammenfallen.

enthalten, die auch zusammenfallen können, und wo *jeder* Strahl dieser Büschel mit dem ihm entsprechenden sich deckt.

1) Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Sind 2 reelle Doppelstrahlen g_1 und g_2 vorhanden, so können diese selbstentsprechend sein. Auf jedem liegen dann 2 Coincidenzpunkte. Es kann aber auch der Fall eintreten:

a) Die beiden Strahlen g_1 und g_2 sind feste Gerade.

Dann muss zunächst nach § 2, 2 die F.-C., die z. B. M_x entspricht, mindestens von der 3. Ordg. sein, also die Transformation mindestens vom 4. Grade. Die beiden festen Geraden sind die Doppelpunktstangenten für die *beiden* F.-C. 3. Ordg. Um die Möglichkeit dieser Transformation abzuleiten, nehmen wir, wenn g_1 und g_2 vorgegeben, zunächst eine Curve C^{n-1} von der Ordg. $n-1$, die in M (dem Schnittpunkt von g_1 und g_2) einen $(n-2)$-fachen Punkt hat, von dessen $(n-2)$ Tangenten 2 mit g_1 und g_2 zusammenfallen. Ausserdem geben wir uns irgend eine Curve n. Ordg. C^n, die in M einen $(n-1)$-fachen Punkt hat. Dann schneiden sich C^n und C^{n-1} ausser in M noch in $2(n-1)$ Punkten, die wir als einfache F.-P. der E_y betrachten. Jeder Geraden der E_x ordnen wir nämlich jetzt die Curve n. Ordg. zu, die in M einen $(n-1)$-fachen Punkt hat, durch die $2(n-1)$ Punkte geht und ausserdem durch die 2 Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit g_1 und g_2. Man beweist unschwer, dass dann einem Büschel von Geraden ein Büschel von Curven n. Ordg. C^n zugewiesen ist und umgekehrt: Es ergiebt sich dann:

> „Eine Jonquières-Transformation mit gemeinsamen $(n-1)$-fachen F.-P., deren Grad $n \geqq 4$, kann 2 Gerade durch den Mittelpunkt als feste Curven enthalten. Diese beiden Geraden sind dann Tangenten an jede der F.-C., die dem Mittelpunkt entsprechen.“

Bemerkung. Wir können auch, während in dem oben betrachteten Falle eine Gerade und die ihr entsprechende Curve sich einfach auf g_1 und g_2 schnitten, g_1 und g_2 einander unendlich nahe rücken lassen, so dass jede Gerade die ihr entsprechende Curve im Schnittpunkt mit dieser Geraden $g_1 \equiv g_2$ berührt. Dann ist jede Gerade der Ebene eine selbstentsprechende Richtung und die Gerade, welche als feste Curve auftritt, besteht hier aus lauter Coincidenzpunkten 2. Art, mit alleiniger Ausnahme des Punktes M, der ein Coincidenzpunkt 1. Art.

b) die Transformation enthält *eine* feste Gerade g.

Es genügt dann, wenn die F.-C., die dem Mittelpunkt entspricht, ein Kegelschnitt ist (für jede Ebene), also muss die Transformation mindestens vom 3. Grad sein. Wählen wir die projectiven Strahlbüschel in M so, dass sie blos einen Doppelstrahl, nämlich g, haben, so lässt

sich diese Transformation ganz ebenso erzeugen wie die Transformation mit nicht zusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-P. in § 6, 4, b) also:

„Eine Jonquières-Transformation mit zusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-P. vom Grade $n \geq 3$ kann *eine* Gerade durch den Mittelpunkt als feste Curve enthalten. Diese ist dann in ihm Tangente an jede der beiden F.-C. $(n-1)$. Ordnung."

Durch die gleiche Betrachtung lässt sich die Transformation herleiten auch für den Fall, dass die Doppelstrahlen der projectiven Büschel in M sich zwar nicht vereinigen, dass aber blos *einer* von ihnen eine *feste* Gerade ist, während der andere eine selbstentsprechende Gerade mit 2 Coincidenzpunkten vorstellt.

2) *Decken sich die beiden projectiven Büschel M_x und M_y Strahl für Strahl*, so hat man also eine perspective Jonquières-Transformation mit $M_x = M_y = M$ als Mittelpunkt. Nimmt man irgend eine Gerade in der einen Ebene, so wird diese von der entsprechenden Curve in der andern Ebene in n Punkten getroffen und wegen der perspectiven Lage müssen offenbar diese Punkte Coincidenzpunkte sein. Es folgt also:

„Jede perspective Jonquières-Transformation n. Ordg. ist von der Classe 0, d. h. sie enthält eine feste Curve von der n. Ordg., die im Mittelpunkt einen $(n-2)$-fachen Punkt besitzt."

III. Abschnitt.

Die Transformation der 1. und 2. Classe.

§ 8.

Die Transformationen der 1. Classe.

1) Die Transformationen der Classe 0 waren, wie wir gesehen haben, die perspectiven Jonquières-Transformationen. Von den Transformationen der 1. Classe d. h. den Transformationen n. Grades mit einer festen Curve $(n-1)$. Ordg. haben wir bereits (§ 5) abgeleitet, dass sie höchstens vom 4. Grad sein können. —

Allgemein sind bei einer Transformation von der Classe k die isologen Curven von der Ordg. $k+1$, für die Transformationen 1. Classe werden diese also Kegelschnitte. Dieselben müssen ein Netz bilden und daraus lassen sich die möglichen Fälle leicht ableiten. Dass diese Kegelschnitte durch keinen der F.-P. gehen, ist nach § 5 ausgeschlossen, also bleiben folgende Fälle zu betrachten: Die Kegelschnitte gehen:

a) durch einen F.-P.,
b) durch zwei F.-P.,
c) durch drei F.-P.

Dabei kann die feste Curve zerfallen oder nicht. Wir nehmen zunächst das letztere an.

ad a) Ist r_k die Vielfachheit des F.-P. durch den alle Kegelschnitte der einen Ebene hindurchgehen, so muss, da die entsprechenden Curven auch wieder Kegelschnitte sein müssen:

$$2 = 2n - r_k$$

sein, also

$$r_k = 2(n-1)$$

was unmöglich, da die Vielfachheit eines F.-P. höchstens $(n-1)$ betragen kann.

ad b) Es ist nach Gleichung (5) des § 1

$$2\sum_i \varrho_i(\varrho_i - 1) + \sum \lambda_J(\lambda_J - 1) \leq (\mu-1)(\mu-2)$$

also für $\mu = n-1$ sicher auch

$$\sum_i \varrho_i(\varrho_i - 1) \leq (n-2)(n-3) \leq n^2 - 5n + 6.$$

Sind nun r_i und r_k die beiden F.-P. der E_x, durch welche die Kegelschnitte gehen, so ist

$$\sum_j \varrho_j = \sum_i r_i - 2 = 3n - 5, \quad \sum_j \varrho_i^2 = \sum_j r_j^2 - 2(r_i + r_k) + 2$$

also

$$\sum_j \varrho_j^2 - \sum \varrho_j = n^2 - 3n + 6 - 2(r_i + r_k)$$

und daraus in Verbindung mit der obigen Gleichung:

$$r_i + r_k \geq n.$$

Da aber das obere Zeichen unmöglich, so wäre $r_i + r_k = n$. Die Gleichung (1) § 1 liefert aber

$$r_i + r_k = 2(n-1)$$

also

$$n = 2(n-1)$$

oder

$$n = 2.$$

Dieser Fall ist also blos möglich bei quadratischen Transformationen.

ad c) Sind r_i, r_k, r_j die 3 F.-P., durch welche die Kegelschnitte gehen, so ist

$$\sum_p \varrho_p = 3(n-2), \quad \sum_p \varrho_p^2 = n^2 + 2 - 2(r_i + r_j + r_k).$$

Dann folgt wieder aus der Gleichung (1)

$$r_i + r_k + r_j = 2(n-1).$$

Da nun die Bedingungen:

$$r_i + r_k \leq n, \quad r_k + r_j \leq n, \quad r_i + r_j \leq n$$

blos die schon bekannte Bedingung $n < 4$ liefern, so ist dieser Fall möglich. —

Zerfällt die feste Curve, so bleibt im Falle a) der Beweis für die Unmöglichkeit der gleiche, im Falle b) ergiebt sich wieder

$$r_i + r_k = 2(n-1),$$

welche Gleichung nur für $r_i = 1$, $r_k = 1$, $n = 2$ d. h. für quadratische Transformationen zu erfüllen ist, der Fall c) endlich zeigt sich auch hier als möglich.

Nun wissen wir, dass die quadratische Transformation der ersten Classe blos die Steiner'sche sein kann; die Transformation 3. Ordg. ist ohnedies eine Jonquières-Transformation und kann als solche, wenn sie von der ersten Classe sein soll, nur einen Kegelschnitt oder ein Geradenpaar enthalten. Es bleibt also nur noch die Transformation 4. Ordg. zu untersuchen. Nun giebt es zwei Transformationen 4. Ordg., die eine ist eine Jonquières-Transformation und kann also keine feste Curve 3. Ordg. enthalten. Für den Fall c) kommt sie auch deswegen nicht in Betracht, weil $r_i + r_j + r_k = 2(n-1) = 6$ sein muss. Es bleibt also blos noch die Transformation 4. Ordg., bei welcher in jeder Ebene 3 Doppelpunkte und 3 einfache Punkte das System der F.-P. ausmachen.

Wir wollen folgende Bezeichnung einführen: In der E_x seien die 3 Doppelpunkte r_1, r_2, r_3 und die 3 einfachen Punkte r_4, r_5, r_6; in der E_y die Doppelpunkte s_1, s_2, s_3 und die einfachen Punkte s_4, s_5, s_6. Es entsprechen den Punkten r_1, r_2, r_3 die Kegelschnitte

$$(s_1\, s_2\, s_3\, s_5\, s_6), \quad (s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_6), \quad (s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_5)$$

und den Punkten r_4, r_5, r_6 die Geraden $(s_2\, s_3)$, $(s_1\, s_3)$, $(s_1\, s_2)$. Ebenso für die andere Ebene. Wir haben uns jetzt zu überzeugen, dass diese Transformation eine feste Curve 3. Ordg. enthalten kann.

2) *Geometrische Erzeugung der Transformation* 4. *Ordg.* 1. *Classe* Wir wenden den Satz (§ 3) an, dass die isologen Curven ein Büschel beschreiben, wenn das Centrum der Isologie auf einer Geraden fortrückt. Nimmt man also in unserer zu construirenden Transformation ein Büschel von Kegelschnitten, so muss diese mit dem entsprechenden Büschel einmal die feste Curve 3. Ordg. erzeugen und ferner noch die Gerade, welche die einander entsprechenden Grundpunkte der Büschel verbindet. (*N* Curve ist keine vorhanden.) Wählen wir nun 3 Punkte r_1, r_2, r_3 ganz willkürlich und ebenso 3 Punkte s_1, s_2, s_3,

ausserdem ein Paar Punkte $A_x A_y$. Jedem Kegelschnitt des Büschels (A_x, r_1, r_2, r_3) ordnen wir dann *den* Kegelschnitt zu, der durch den zweiten Schnittpunkt dieses ersten Kegelschnittes mit $\overline{A_x A_y}$ und durch A_y, s_1, s_2, s_3 geht. Ebenso soll umgekehrt jedem Kegelschnitt des Büschels $(A_y s_1 s_2 s_3)$ der Kegelschnitt im ersten Büschel entsprechen, der ihn auf $\overline{A_x A_y}$ schneidet. Diese Kegelschnittbüschel sind also projectiv und erzeugen ausser der Geraden $\overline{A_x A_y}$ eine Curve 3. Ordg. C^3, die durch $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$ geht und vom Geschlecht 1 sein wird. Dann kann man aber zu jedem Punkte B_x der einen Ebene den entsprechenden B_y der andern Ebene in folgender Weise finden: Durch $r_1 r_2 r_3 A_x B_x$ ist *ein* Kegelschnitt bestimmt, ihm entspricht *ein* Kegelschnitt des Büschels (s_1, s_2, s_3, A_y) und beide Kegelschnitte schneiden sich auf $\overline{A_x A_y}$ in einem Punkte O. $\overline{B_x O}$ trifft dann aber den andern Kegelschnitt noch in einem ihm entsprechenden Punkte B_y. Ebenso ist umgekehrt zu jedem Punkte B_y ein Punkt B_x zu finden. Offenbar ist dadurch eine eindeutige Beziehung der Ebene hergestellt. Die beiden entsprechenden Kegelschnitte sind eindeutig aufeinander bezogen, sie gehören als isologe Curven zu dem Punkte O. Da ferner die weitern Schnittpunkte der Kegelschnitte auf der C^3 gelegen sind, so folgt, *dass die C^3 sich Punkt für Punkt selbst entspricht.*

Lässt man jetzt B_x auf einer Geraden h fortrücken, so beschreibt B_y eine Curve 4. Ordg. Denn diese Curve hat mit h 4 Punkte gemein, nämlich:

1) die 3 Schnittpunkte mit der C^3, die sich selbst entsprechen;

2) durch den Schnittpunkt von $\overline{A_x A_y}$ und h geht ein Kegelschnitt des Büschels (r_1, r_2, r_3, A_x); diesem entspricht ein Kegelschnitt im andern Büschel $(s_1 s_2 s_3 A_y)$, der h in einem Punkte B_y^0 trifft. Dies ist der einzige Punkt der Curve auf h, der einem Punkte B_x^0 entspricht. Denn es muss O auf h gelegen sein und dies ist blos für den erwähnten Kegelschnitt der Fall. *Die Transformation ist also von der 4. Ordg.*

Die Gerade $\overline{A_x A_y}$ nimmt keine besondere Stellung ein. Wählt man B_x auf ihr, so schneidet die Tangente in B_x an den Kegelschnitt $(B_x A_x r_1 r_2 r_3)$ auf dem entsprechenden Kegelschnitte den Punkt B_y aus.

Singuläre Elemente. Auch die F.-P. und F.-C. sind sofort zu erhalten. Nimmt man z. B. einen Punkt in unendlicher Nähe von r_1, so muss man einen Kegelschnitt wählen, der in r_1 diese vorgegebene Tangente hat. Diesem entspricht wieder ein bestimmter Kegelschnitt im andern Büschel und $\overline{O r_1}$ schneidet den entsprechenden Punkt aus. Es ist dann aber das Büschel $\overline{O r_1}$ projectiv dem Kegelschnittbüschel

$(s_1 s_2 s_3 A_y)$ und diese beiden erzeugen ausser der Geraden $\overline{A_x A_y}$ noch einen Kegelschnitt, der durch s_1, s_2, s_3 und r_1 geht. Dieser Kegelschnitt entspricht also dem Punkte r_1.

Ebenso zeigt man, dass z. B. der Geraden $\overline{r_1 r_2}$ d. h. jedem ihrer Punkte immer der Schnittpunkt s_6 von $\overline{r_1 r_2}$ mit der C^3 entspricht.

Wir gelangen also zu dem Resultate:

„Die Transformation 4. Ordg. mit 3 Doppelpunkten und 3 einfachen Punkten kann eine allgemeine Curve 3. Ordg. als feste Curve enthalten. Diese geht durch die sämmtlichen F.-P. beider Ebenen hindurch und jedem F.-P. entspricht eine F.-C., die durch ihn hindurchgeht. Es liegen also 6mal 2 F.-P. der einen Ebene mit einem F.-P. der andern Ebene auf einer Geraden und 6mal 5 F.-P. der einen Ebene mit einem F.-P. der andern Ebene auf einem Kegelschnitt."

Wir haben demnach folgende Transformationen der 1. Classe:

I) $n = 4$. Transformation mit 3 Doppelpunkten und 3 einfachen Punkten und einer festen Curve 3. Ordg.

II) $n = 3$. Jonquières-Transformation mit nichtzusammenfallenden $(n-1)$-fachen F.-P. und einem festen Kegelschnitt (§ 6, 1).

III) $n = 2$. Steiner'sche Transformation (§ 6, 2).

IV) $n = 1$. Allgemeine Collineation ohne eine feste Gerade.

Was das Zerfallen der festen Curve betrifft, so kann an Stelle der Curve 3. Ordg. ein Kegelschnitt und eine Gerade oder auch das System von 3 Geraden treten. Dass der Kegelschnitt bei der Jonquières Transformation zerfallen kann, wurde schon (§ 6, 3) bemerkt.

Voraussetzung war immer, dass keine F.-P. der beiden Ebenen zusammenfallen.

Involutorisch kann von diesen Transformationen *keine* werden.

§ 9.

Die Transformationen der 2. Classe.

1) Auch Transformationen 2. Classe d. h. Transformationen n. Ordg. mit einer Curve von der Ordg. $n-2$ giebt es nur eine beschränkte Anzahl.

Wir haben bereits gesehen, dass die Transformationen dieser Classe höchstens vom Grade $n = 7$ sein können. Aber auch diese Grenze wird noch nicht erreicht, vielmehr können diese Transformationen, wie gleich gezeigt werden soll, höchstens vom Grade 6 sein. In der That, benutzt man die Tabellen, die für die verschiedenen Werthe von n die möglichen Systeme von F.-P. enthalten, so ergiebt

sich unter Anwendung des Satzes 2, § 5, dass von den Transformationen $n = 7$ keine eine feste Curve 5. Ordg. enthalten, also von der 2. Classe sein kann. —

Auch von den Transformationen $n = 6$ kann nur *eine einzige*, nämlich die mit 2 dreifachen Punkten, 4 Doppelpunkten und 1 einfachen Punkt in Betracht kommen.

Bemerken wir ferner, dass die Transformationen 2. und. 3. Grades, welch' letztere eine Jonquières-Transformation, sowie die Jonquières-Transformationen überhaupt *zunächst* ausser Acht gelassen werden können, da wir ja bereits wissen, welche feste Curven diese Transformationen enthalten können, es sind also blos die Werthe $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ zu berücksichtigen. —

Nun sind die isologen Curven bei diesen Transformationen von der 3. Ordg. und zwar allgemein oder rational. Wir unterscheiden die Fälle, wo jede isologe Curve in den F.-P. selbst nur *einfache* Punkte hat und wo jede in einem der F.-P. einen Doppelpunkt besitzt. Dabei können im ersten Fall die isologen Curven *ausserhalb* der F.-P. einen Doppelpunkt besitzen.

I. Die isologen Curven gehen durch die F.-P., die sie enthalten, nur je einfach hindurch.

Bezeichnet man die Summe der Ordnungen der F.-P. einer Ebene, z. B. der Ebene E_x, durch welche jede isologe Curve hindurchgeht, mit $S(r_i)$, so muss man haben:

$$S(r_i) = 3n - 3$$

weil die den isologen Curven entsprechenden Curven wieder von der 3. Ordg. Da aber auch $\sum_i r_i = 3n - 3$, so folgt für diesen Fall:

„Die isologen Curven einer Ebene gehen durch *sämmtliche* F.-P. dieser Ebene hindurch."

Es sind also alle Fälle erschöpft, wenn wir unter den Transformationen $n = 4$ bis $n = 6$ die mit 6 oder 7 F.-P. in jeder Ebene heraussuchen. Diess liefert

a) 6 F.-P. $n = 4$: 3 Doppelpunkte, 3 einfache Punkte,
$n = 5$: 6 Doppelpunkte,

b) 7 F.-P. $n = 5$: 1 dreifachen P., 3 Doppelpunkte, 3 einfache P.,
$n = 6$: 2 dreifache P., 4 „ 1 einfachen P.

Die unter a) genannten Fälle sind weiter zu untersuchen. Für b) ergiebt sich aber:

$$\sum_i \varrho_i = \sum_i r_i - 7 = 3n - 10$$

und

$$\sum_i \varrho_i^2 = \sum_i r_i^2 - 2\sum r_i + 7 = n^2 - 6n + 12.$$

Nun sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wo die feste Curve zerfällt oder nicht. Zerfällt sie nicht, so ist nach Gl. 5, § 1:

$$n^2 - 11n + 32 + \sum \lambda_J(\lambda_J - 1) \leq 0.$$

Diese Gleichung ist aber für $n = 5$ und $n = 6$ *nicht* erfüllt.

Würde dagegen die feste Curve zerfallen, so wäre nach Gl. 6, § 1:

$$n^2 - 13n + 38 + \sum \lambda_J(\lambda_J - 1) \leq 0.$$

Dieser Gleichung kann man mit $n = 5$ und $n = 6$ genügen, doch kann ihr zufolge die feste Curve für $n = 5$ höchstens einen Doppelpunkt, für $n = 6$ höchstens 2 Doppelpunkte enthalten. Betrachtet man aber das System der F.-P. in den beiden möglichen Fällen, so müsste die feste Curve 2 bezw. 4 Doppelpunkte besitzen, also sind diese Fälle nicht möglich, so dass blos a) weiter zu behandeln.

II. Die isologen Curven haben in einem der F.-P. einen Doppelpunkt. Ist r_1 die Vielfachheit des F.-P. der E_x, in dem die isologen Curven dieser Ebene einen Doppelpunkt haben, so können die isologen Curven ausserdem noch durch 1 F.-P. oder durch 2, 3 und 4 F.-P. gehen. Wir betrachten der Reihe nach diese Fälle.

1) Es wäre dann

$$2r_1 + r_2 = 3(n-1);$$

also müsste die Transformation drei $(n-1)$-fache F.-P. haben, was blos für $n = 2$ möglich.

2) Man hätte dann

$$2r_1 + r_2 + r_3 = 3n - 3,$$

ferner da $r_1 + r_2 \leq n$

$$2(r_1 + r_2 + r_3) \leq 3n,$$

also

$$r_2 + r_3 \leq 3,$$

daraus

$$2r_1 \geq 3n - 6.$$

Setzt man $r_1 = n - 1 - \varepsilon$, wo ε positiv (und nicht Null) so wird in dieser Gleichung

$$4 - n \leq 2\varepsilon,$$

also

$$n < 4.$$

3) Ist

$$2r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 3n - 3,$$

so hat man die beiden Fälle:

a) $n = 4$, 3 Doppelpunkte, 3 einfache Punkte,

b) $n = 5$, 1 dreifacher Punkt, 3 Doppelpunkte, 3 einfache Punkte.

Diese sind weiter zu betrachten.

4) Hätte man

$$2r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 3n - 3,$$

ferner demzufolge

$$\sum_i \varrho_i = 3n - 9 \quad \text{und} \quad \sum_i \varrho_i^2 = n^2 - 6n + 13,$$

so sind wieder die beiden Fälle zu trennen. Zerfällt die feste Curve nicht, so ergiebt sich wie oben:

$$n^2 - 11n + 32 + \sum \lambda_\tau(\lambda_\tau - 1) \leq 0,$$

welche Gleichung nicht zu erfüllen für $n = 5$ und $n = 6$.

Zerfällt dagegen die feste Curve, so erhält man

$$n^2 - 13n + 38 + \sum \lambda_\tau(\lambda_\tau - 1) \leq 0.$$

Dieser Gleichung genügen $n = 5$ und $n = 6$ und zwar folgende Fälle:

$n = 5$,	1 dreifacher Punkt,	3 Doppelpunkte,	3 einfache Punkte,
	—	6 „	—
$n = 6$,	2 dreifache Punkte,	4 „	1 einfacher Punkt.

Dann könnte aber die feste Curve für $n = 5$ höchstens 1 Doppelpunkt enthalten, für $n = 6$ höchstens 2. Entprechend dem System der F.-P. hätte aber die feste Curve 2, bezw. 4 Doppelpunkte, so dass also diese Fälle auszuschliessen. Es kommen also blos in 3) a) und b) in Betracht.

2) Erzeugung der möglichen Transformationen 2. Classe.

A) Ist zunächst $n = 4$ (Ia, 1. Fall), so hat man als feste Curve einen Kegelschnitt, der durch die 3 Doppelpunkte in jeder Ebene hindurchgehen muss. Um diese Transformation direct zu erhalten, wählen wir einen Kegelschnitt K und auf ihm beliebig die Punkte r_1, r_2, s_1, s_2, s_3 sowie s_4 und s_5 beliebig *ausserhalb* des Kegelschnittes. (Bezeichnung wie in § 8, 1.) Dem Strahlbüschel r_1 ordnen wir nun das Kegelschnittbüschel $(s_1 s_2 s_3 s_4)$ zu und zwar so, dass jedem Strahl der Kegelschnitt entspricht, der durch den 2. Schnittpunkt des Strahles mit K geht und auch umgekehrt. Ebenso soll dem Strahlbüschel r_2 in gleicher Weise der Kegelschnittbüschel $(s_1 s_2 s_3 s_5)$ zugeordnet werden. Irgend ein Punkt der E_x ist dann Schnittpunkt 2er Strahlen der Büschel r_1 und r_2 und ihm entspricht der letzte Schnittpunkt der beiden entsprechenden Kegelschnitte. In ähnlicher Weise findet sich zu jedem Punkt der E_y der entsprechende in E_x. Man sieht leicht, dass man auf diese Weise die obige Transformation erhält. r_3 z. B. ist der letzte Schnittpunkt des Kegelschnittes $(s_1 s_2 s_3 s_4 s_5)$ mit K.

Der Kegelschnitt K kann nicht in 2 Gerade zerfallen.

B) Ist $n = 5$ (Ia, 2. Fall) so muss also die feste Curve 3. Ordg. durch die sämmtlichen F.-P. beider Ebenen einfach hindurchgehen. In der That hat auch jede Curve 3. Ordg., die durch die 6 F.-P. der einen Ebene hindurchgeht, zur entsprechenden eine Curve 3. Ordg., die durch die F.-P. der andern Ebene geht.

Wir wählen nun einen Punkt d_1 und 6 Punkte $d_1', d_2' d_3', d_4', d_5', d_6'$ und zwar so, dass $d_2', d_3', d_4', d_5', d_6'$ und d_1 auf *einem* Kegelschnitte gelegen sind. Zieht man durch d_1' eine beliebige Gerade g, die aber für die ganze folgende Betrachtung unverändert bleibt, so schneidet eine beliebige Gerade h durch d_1 die g in X. Jeder Geraden h des Büschels (d_1) kann man dann *die* Curve 3. Ordg. zuordnen, die durch X, $d_2', d_3', d_4', d_5', d_6'$ geht und d_1' zum Doppelpunkt hat. Umgekehrt ist zu jeder Curve 3. Ordg. von der beschriebenen Art ein Strahl in (d_1) zu construiren.

Nimmt man als specielle Curve 3. Ordg. des Büschels den Kegelschnitt $(d_1' d_3' d_4' d_5' d_6')$ und dazu die Gerade $\overline{d_1' d_2'}$, so schneidet dieser Kegelschnitt g noch in einem Punkte P, so dass $\overline{d_1 P}$ die entsprechende Gerade. $\overline{d_1 P}$ trifft aber diesen Kegelschnitt noch im Punkte d_2 und $\overline{d_1 P}$ und $\overline{d_1' d_2'}$ schneiden sich in Q. *Dann liegen d_2 und Q auf der Curve 3. Ordg. C^3, welche der Strahlbüschel (d_1) und der ihm projective Büschel von Curven 3. Ordnung erzeugen, wenn man von der ebenfalls erzeugten Geraden g absieht.*

Auf die gleiche Weise wie d_2 kann man noch 4 andere Punkte, d_3, d_4, d_5, d_6 sich verschaffen, die auch alle auf der C^3 liegen. Wählt man jetzt ein Büschel von Curven 3. Ordg., welche d_2' zum Doppelpunkt haben und durch $d_1', d_3', d_4', d_5', d_6'$ gehen, so schneidet jede Curve dieses Büschels die C^3 noch in 2 beweglichen Punkten, deren Verbindungslinie, da C^3 eine allgemeine Curve 3. Ordg., durch einen Punkt von C^3 geht. Dieser Punkt muss d_2 sein, was man erkennt, wenn man als specielle Curve 3. Ordg. des Büschels die Gerade $\overline{d_1' d_2'}$ in Verbindung mit dem Kegelschnitt $(d_2' d_3' d_4' d_5' d_6')$ nimmt. Also folgt:

> „Die nämliche Curve C^3 kann auch erzeugt werden durch den Büschel d_2 und den Büschel von Curven 3. Ordg. mit d_2' als Doppelpunkt und $d_1', d_3', d_4', d_5', d_6'$ als einfachen Punkten."

Natürlich erzeugen *diese* beiden Büschel ausserdem noch eine Gerade durch d_2'.

Damit ist aber die Möglichkeit der punktweisen Beziehung der Ebene gegeben. Irgend ein Punkt P_x ist Schnittpunkt 2er Strahlen der Büschel d_1 und d_2 und ihm entspricht der letzte Schnittpunkt der beiden entsprechenden Curven 3. Ordg. Ebenso umgekehrt. Beschreibt

P_x eine Gerade, so sind auch die Büschel $\overline{d_1 P_x}$ und $\overline{d_2 P_x}$ projectiv, ebenso die entsprechenden Büschel von Curven 3. Ordg. Diese erzeugen zunächst eine Curve 6. Ord., von der sich aber $\overline{d_1' d_2'}$ lostrennt als selbstentsprechende Linie.

Damit ist die Möglichkeit dieser Transformation dargethan. Alle Punkte der C^3 entsprechen sich selbst. Jedem Punkt z. B. d_1 entspricht ein Kegelschnitt $(d_1 d_2' d_3' d_4' d_5' d_6')$, der durch ihn hindurchgeht. Es liegen also 12 mal 6 der F.-P. auf einem Kegelschnitt.

Anmerkung. Die einfachste Abbildung einer Fläche 3. Ordg. auf eine Ebene ist dadurch zu erreichen, dass man*) 2 Gerade a und c der Fläche auswählt, die sich nicht schneiden und eine Gerade b, welche a und c trifft. Die Bildebene legt man durch b und erzeugt das Bild durch einen Strahl, der immer a und c trifft und auf der Fläche den zugehörigen Punkt ausschneidet. — Bildet man nun eine Ebene, welche b und b' der Fläche enthält, in doppelter Weise auf die Fläche ab, so dass also jedem Punkt der Fläche 2 Punkte der Ebene entsprechen, so ist dadurch die Ebene eindeutig auf sich selbst bezogen. Man erhält dann einen speciellen Fall der obigen Transformation; die feste C^3 ist in 3 Gerade, die Schnittcurve mit der Fläche 3. Ordg., zerfallen.

C) Ist $n = 4$ (II, a) so erkennt man, dass dies die Transformation ist, welche durch die erste Wiederholung der fundamentalen, perspectiven, quadratischen Jonquières-Transformation (§ 6, 1) entsteht. Der feste Kegelschnitt geht durch 2 Doppelpunkte und 2 einfache Punkte in jeder Ebene. Die Verbindungslinie der beiden, *nicht* auf dem Kegelschnitt gelegenen, Doppelpunkte enthält noch je einen F.-P. 1. Ordg. und entspricht sich selbst. Der Kegelschnitt kann auch in 2 Gerade zerfallen. (§ 6, 3.)

D) Ist $n = 5$, (II, b) so besteht das System der F.-P. in der einen Ebene aus einem dreifachen Punkte t_3, 3 Doppelpunkten d_1, d_2, d_3 und 3 einfachen Punkten e_1, e_2, e_3. Ebenso hat man in der andern Ebene den 3-fachen Punkt τ_3, die Doppelpunkte $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, die einfachen Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Es entspricht dem Punkte t_3 die Curve 3. Ordnung $(\tau_3^2 \delta_1 \delta_2 \delta_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$, dem Punkte e_1 der Strahl $\overline{\varepsilon_1 \tau_3}$, dem Punkte d_1 der Kegelschnitt $(\varepsilon_1 \tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3)$ u. s. f.

Soll eine feste Curve 3. Ordg. C^3 auftreten, so muss diese durch sämmtliche F.-P. einfach hindurchgehen. Wir bemerken zunächst, dass dem Büschel t_3 das Kegelschnittbüschel $(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \tau_3)$ entspricht und zwar sind entsprechende Curven der beiden Büschel gegeben, wenn die F.-P. sämmtlich bekannt sind.

Um nun die Beziehung in der gewünschten Weise zu erhalten,

*) Clebsch: Math. Annalen Bd. 5.

nehmen wir t_3, d_1, d_2, d_3 sowie τ_3, δ_1, δ_2, δ_3 beliebig an und ordnen den Strahlen $\overline{t_3 d_1}$, $\overline{t_3 d_2}$, $\overline{t_3 d_3}$ des Büschels t_3 die Kegelschnitte $\tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3 d_1$, $\tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3 d_2$, $\tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3 d_3$ zu. Dann ist die projective Beziehung der beiden Büschel bestimmt und dieselben erzeugen eine Curve 3. Ordg. C^3, welche durch $t_3 d_1 d_2 d_3 \tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3$ geht. Wir denken uns aber nun den Punkt d_1 als variabel; dann erhält man also verschiedene Curven C^3. Wir denken uns eine solche gefunden, dass sie die Eigenschaft hat, dass $\overline{XY}$ durch den Punkt τ_3 geht, wobei X der Schnittpunkt von $\overline{d_1 d_2}$ mit der C^3 und Y der letzte Schnittpunkt von $\overline{t_3 d_3}$ mit der gleichen Curve. Offenbar ist dies immer möglich.

Wir können nämlich dann die nämliche Curve C^3 auch erzeugen durch den Strahlbüschel τ_3 und den Kegelschnittbüschel $(t_3 d_1 d_2 d_3)$. Denn da für den zerfallenen Kegelschnitt $\overline{t_3 d_2}$, $\overline{d_1 d_2}$ $\overline{XY}$ die Verbindungslinie der beiden letzten Schnittpunkte ist und da diese durch τ_3 läuft, so muss das gleiche von allen solchen Verbindungslinien 2 Schnittpunkte gelten. Der Punkt Y sei jetzt mit ε_3 bezeichnet, so dass also dem Kegelschnitt $\overline{t_3 d_3}$, $\overline{d_1 d_2}$ der Strahl $\overline{\tau_3 \varepsilon_3}$ entspricht. Ebenso entsprechen dann den Kegelschnitten $\overline{t_3 d_3}$, $\overline{d_2 d_3}$ und $\overline{t_3 d_2}$, $\overline{d_2 d_3}$ die Strahlen $\overline{\tau_3 \varepsilon_1}$ und $\overline{\tau_3 \varepsilon_2}$ und es liegen ε_1, ε_2, ε_3 auch auf der C^3. Ebenso erhält man in den Schnittpunkten von $\overline{\tau_3 \delta_2}$ und $\overline{\tau_3 \delta_3}$ die Punkte e_2 und e_3, welche auch die Eigenschaft haben, dass die, den durch sie gehenden Strahlen, entsprechenden Kegelschnitte durch sie hindurchgehen.

Nun kann man einem Punkt P_x der einen Ebene (tde) in folgender Weise einen Punkt P_y der anderen Ebene $(\tau\delta\varepsilon)$ zuordnen: Durch P_x geht ein Strahl des Büschels t_3 und ein Kegelschnitt des Büschels $(t_3 d_1 d_2 d_3)$. Diesen beiden Elementen entspricht ein Kegelschnitt des Büschels $(\tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3)$ und ein Strahl des Büschels τ_3. Diese beiden schneiden sich (ausser in τ_3) im entsprechenden Punkt P_y.

Lässt man jetzt P_x auf einer Geraden sich bewegen, so beschreibt P_y eine Curve, deren Ordg. sich wie folgt bestimmt. Da jeder Kegelschnitt des Büschels $(t_3 d_1 d_2 d_3)$ die Gerade in 2 Punkten schneidet, welche einander eindeutig entsprechen, so sind auch die Strahlen von t_3 nach 2 solchen Schnittpunkten einander eindeutig zugewiesen. Es sind also auch die 2 Kegelschnitte des Büschels $(\tau_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3)$, die diesen Strahlen entsprechen, einander eindeutig zugeordnet. Dem Kegelschnitt dagegen, der in der ersten Ebene das Punktpaar ausschnitt, entspricht eine einzige Gerade des Büschels τ_3. Dann sehen wir aber, dass die einer Geraden entsprechende Curve in folgender Weise entsteht:

„Man hat ein Strahlenbüschel und ein Kegelschnittbüschel. Jedem Strahl sind 2 Kegelschnitte zugeordnet, jedem Kegelschnitt dagegen entspricht nur 1 Strahl. Man

sucht den Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente."

Wie man aber aus der durch dieses System auf einer beliebigen Geraden erzeugten (1, 4) Correspondenz schliesst, ist das Erzeugniss dieser Büschel eine Curve 5. Ordg., welche τ_3 zum 3-fachen, δ_1, δ_2, δ_3 zu Doppelpunkten und ε_1, ε_2, ε_3 zu einfachen Punkten hat.

Die Beziehung der beiden Ebenen ist dann leicht vollständig nachzuweisen. Da ferner die Punkte d_1, d_2, d_3, ε_1, ε_2, ε_3, e_1, e_2, e_3 Coincidenzpunkte und da eine Transformation 5. Ordg. höchstens 7 Coincidenzpunkte haben kann, so muss die C^3 sich Punkt für Punkt selbst entsprechen. Damit ist die Existenz dieser Transformation nachgewiesen.

Nehmen wir nun auch die bisher unbeachtet gebliebenen Jonquières-Transformationen hinzu, so erhalten wir folgende Transformationen 2. Classe:

$n = 5$: I) 6 Doppelpunkte in jeder Ebene (B),

II) 1 dreifacher F.-P., 3 Doppelpunkte, 3 einfache F.-P. (D).

$n = 4$: a) 3 Doppelpunkte, 3 einfache F.-P.

III) Der feste Kegelschnitt geht durch die 6 Doppelpunkte (A).

IV) Der feste Kegelschnitt geht durch 4 Doppel- und 4 einfache F.-P. (C).

b) Jonquières-Transformationen.

V) Mit nichtzusammenfallenden 3-fachen Punkten. Der feste Kegelschnitt geht durch die beiden 3-fachen F.-P. und durch $2(n-1)$-fache F.-P. (§ 6, 2).

VI) Mit zusammenfallenden 3-fachen F.-P. und 2 festen Geraden durch diesen 3-fachen F.-P. (§ 7, 1a).

$n = 3$: Jonquières-Transformationen.

a) Mit nicht zusammenfallenden Doppelpunkten:

VII) Die feste Gerade enthält je 2 einfache F.-P. einer jeden Ebene (§ 6, 4, a).

VIII) Die feste Gerade verbindet die beiden Doppelpunkte (§ 6, 4, b).

b) Mit zusammenfallenden Doppelpunkten:

IX) Die eine feste Gerade geht durch den gemeinsamen Doppelpunkt (§ 7, 1, b).

$n = 2$: X) Die allgemeine quadratische Transformation ohne eine feste Curve.

Vergleichen wir damit die Involutionen 1. Classe, welche Bertini (l. c.) angegeben hat, so zeigt sich, dass von den *hier* aufgeführten allgemeinen Transformationen I, II, III, VI, IX, X auch involutorisch werden können, wobei die Classe sich auf 1 reducirt. Bei den übrigen ist dies nicht möglich. Andererseits existiren die *ausserdem* von Bertini angegebenen Involutionen *nur* in involutorischer Lage. —

Transformationen, bei denen F.-P. in Gruppen zusammenrücken oder F.-C. zerfallen, waren bei allen Betrachtungen ausgeschlossen.

München, Juli 1891.

Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente.*)

Von

Fr. Schilling in Göttingen.

Die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie lassen sich bekanntlich ansehen als Relationen zwischen den 3 Kantenwinkeln λ, μ, ν und den 3 Seitenwinkeln l, m, n eines räumlichen Dreikants, dessen Scheitel im Kugelmittelpunkt liegt, und dessen Kanten die Schnittgeraden der 3 Seitenebenen des vorliegenden sphärischen Dreiecks sind. Von diesem Umstande ausgehend kann man die Frage stellen:

„*Lassen die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht auch eine einfache geometrische Deutung zu, wenn man in denselben den Grössen λ, μ, ν; l, m, n nicht mehr reelle, sondern complexe Werthe beilegt?*“

Ich habe in Beantwortung dieser Frage folgendes gefunden:

Man setze zunächst:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \quad l = l' + il'',$$
$$\mu = \mu' + i\mu'', \quad m = m' + im'',$$
$$\nu = \nu' + i\nu'', \quad n = n' + in''.$$

Man betrachte alsdann das Gebilde dreier beliebig im Raume gelegenen, gegen einander windschiefen Geraden I, II, III, welche die Kugel in reellen Punkten schneiden, und construire die drei inneren kürzesten Abstände, welche im Sinne der nicht-Euklidischen Geometrie oder (um jedes Streifen metaphysischer Fragen zu vermeiden) im Sinne der auf die Kugel zu gründenden projectiven Massgeometrie zwischen je zweien der Geraden I, II, III stattfinden. Es sei hierbei allgemein

*) Abgedruckt aus Nr. 5 der Göttinger Nachrichten v. J. 1891.

der Abstand zweier Punkte wie der Winkel zweier Ebenen definirt als $\frac{i}{2} \cdot \log DV$, wo DV das Doppelverhältniss bedeutet, welches die beiden Punkte resp. Ebenen mit den reellen oder imaginären Elementen ihres Trägers bilden, die der Fundamentalfläche angehören, [d. h. mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel]. Man bezeichne dann den Winkel der jedesmaligen beiden Ebenen, welche durch je eine der Geraden I, II, III und die zu ihr gehörigen kürzesten Abständen sich legen lassen, bez. mit λ', μ', ν', dagegen die durch die kürzesten Abstände auf den Geraden I, II, III abgeschnittenen Längen mit $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$. Entsprechend setze man den Winkel der beiden Ebenen, die sich durch je einen der kürzesten Abstände und die zugehörigen beiden Geraden legen lassen, gleich l', m', n', die Länge der kürzesten Abstände selbst gleich il'', im'', in'', wo sich l' und il'' z. B. auf den kürzesten Abstand der Geraden II, III beziehen sollen.

Das Resultat meiner Betrachtung war dann das folgende:

„*Setzt man die so definirten Grössen in der oben angegebenen Weise zu den* 6 *Grössen* λ, μ, ν; l, m, n *zusammen, so bestehen zwischen den letzteren gerade die Formeln, wie sie die Relationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie darstellen.*“

Es ist nicht schwer, die hiermit angedeuteten allgemeinen Betrachtungen für den Fall, dass die drei Geraden I, II, III sich innerhalb oder ausserhalb der Kugel in einem Punkte schneiden oder in einer Ebene liegen, zu specialisiren.

Ich möchte diesen Angaben jedoch noch die folgende Bemerkung hinzufügen:

Die angegebene Erweiterung der Bedeutung der sphärischen Formeln hängt auf's engste zusammen mit folgender Beziehung:

Wenn man im Falle, dass die drei Geraden I, II, III sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, um dieselben nach einander Drehungen des Gesammtraumes (im nicht-Euklidischen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, im gewöhnlichen Euklidischen Sinne) ausführt entspr. um die doppelten Winkel des zugehörigen sphärischen Dreiecks, so geht der Raum bekanntlich in sich selbst über. (Vgl. Hamilton, Lectures on Quaternions 1853, Art. 280 und 346). Dem entspricht nun bei unseren windschiefen Geraden I, II, III der folgende Satz:

„*Führt man um die Geraden I, II, III als Schraubenaxen nach einander drei nicht-Euklidische Schraubenbewegungen aus, deren Drehwinkel und Verschiebungsgrösse beziehungsweise gegeben sind durch*

$$2(\lambda' + i\lambda''),\quad 2(\mu' + i\mu''),\quad 2(\nu' + i\nu''),$$

so kommt der Raum gleichfalls in seine ursprüngliche Lage zurück."

Der Beweis dieses letzten Satzes ist besonders einfach mit Benutzung des Hülfssatzes zu führen, dass jede Schraubenbewegung sich durch die Aufeinanderfolge zweier Rotationen von der Periode 2 ersetzen lässt.

Göttingen, im Juni 1891.

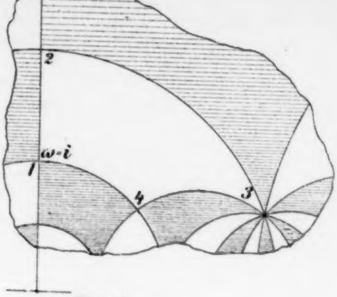


Fig. 1.

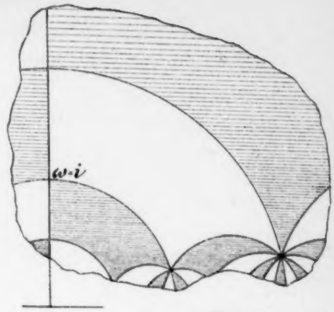


Fig. 2.

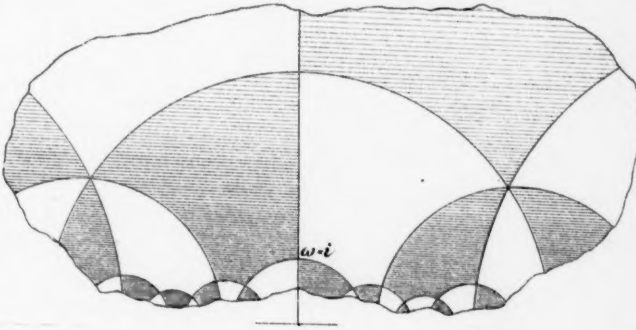


Fig. 3.

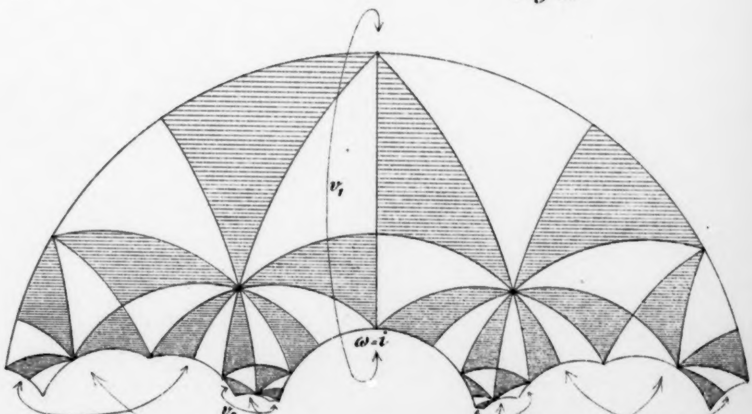


Fig. 4.